Michael WALSER m.walser@htlsaalfelden.at

Gammafunktion - Fakultät von reellen Zahlen

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:
  Gammafunktion nach Gauß, Integralrechnung, Fakultät
- Kurzzusammenfassung

Die Idee zu diesem Artikel ist entstanden, als es im Unterrichtsgegenstand "Qualitätsmanagement und Angewandte Statistik (QMAS)" darum ging, mit statistischen Methoden das Lebensdauerverhalten von Glühbirnen zu beschreiben. Dabei habe ich festgestellt, dass der Gafik-Taschenrechner TI-Voyage 200 PLT (Texas Instruments) nicht in der Lage war die Fakultät von reellen Zahlen zu berechnen. Ziel dieser Arbeit war es, die erweiterte Gammafunktion nach Gauß trotz der Schwächen des TI-Voyage zu implementieren. Die Brauchbarkeit des Algorithmus soll nun mit MathCAD nachgewiesen werden. Als Vergleich dient die bereits in MathCAD implementierte Gammafunktion $\Gamma(x)$.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

Interessant war es in diesem Zusammenhang besonders, den Unterschied zwischen MathCAD und dem TI-Voyage 200 darzustellen. Während Mathcad ohne weiteres in der Lage ist, das Gauß-Integral für einen Wert x **numerisch zu berechnen, gelingt das dem TI nicht einmal mit numerischen Methoden in einem tolerierbarem Zeitraum (< 5 min). Das Lösen derselben Aufgabe mit einem entsprechenden Algorithmus gelingt dabei in <u>weniger als einer Sekunde</u>, wobei die Genauigkeit beliebig variiert werden kann. Die Gammafunktion selbst ist, wie bereits erwähnt, zum Beispiel bei Lebensdaueruntersuchungen in der Statistik und dem Qualitätsmanagement wichtig.**

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

Angewandte Mathematik, 4./5. Jahrgang: Reihenentwicklungen, Statistik

- Mathcad-Version: **Mathcad 11**
- Literaturangaben:

- **Wikipedia Die freie Online-Enzykopedädie**
  (http://www.wikipedia.org)
- **am Research - Mathematica MathWorld**
  (http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html)
- **Analysis I Gammafunktion (Skriptum) Prof. Rost Universität Heidelberg**
  (http://mathphys.fsk.uni-heidelberg.de/skripte/Files/Mathe/Analysis/Rost/ana1_WS9798.zip)
- **Funktionstheorie (Skriptum) Dr. Demel-Team & Trappaschmidti**
  (http://www.hirnwindungen.de/Mathe/skripte/funktionentee.pdf)
- **Diverse GuideBooks, Software, SDK's…**
  (http://www.education.ti.com)

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

Alle Beispiele wurden nebenbei auch auf einem TI-Voyage 200 PLT mit Betriebssystem-Version 2.09 (27.03.2003) nachvollzogen.

Inhaltsübersicht

1) mathematische Grundlagen

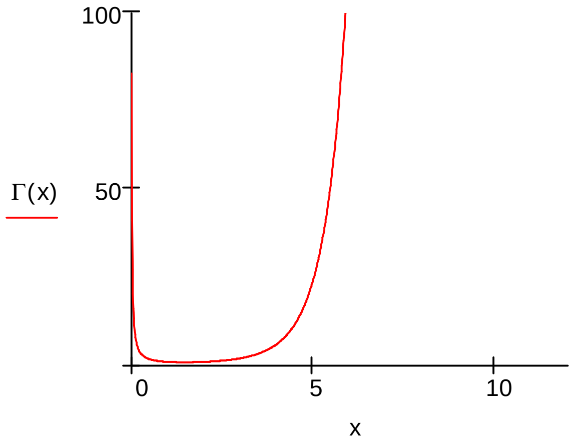
zur Inhaltsübersicht

Die Gamma-Funktion wurde von Leonhard Euler zur Interpolation (Nährung) der Fakultätsfunktion ($f(x) = x!$) entdeckt. Er stellte 1730 in einem Brief an den Mathematiker Christian Goldbach folgendes Integral vor:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-1}\, dt$$

Dieses Integral ist definiert für alle $x \in \mathbb{R} > 0$

Ausserdem weist die Gammafunktion keine Nullstelle auf. Der nachfolgende Graph zeigt die Gammafunktion:



Aus der Funktionsgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

lässt sich mit Hilfe der "Vollständigen Induktion" (mathematischs Beweisverfahren) für alle natürlichen Zahlen beweisen dass gilt:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

siehe http://www.hirnwindungen.de/mathe/skripte/funktionentee.pdf - Seite 65 18.2.2 Elementare Sätze; Satz 2

auf diese Beweisführung wird an dieser Stelle aber verzichtet.Die in Mathcad eingebaute Gammafunktion erlaubt aber eine Verifizierung dieser Behauptung:

$\Gamma(7) = 720$ $\quad$ $6! = 720$

Es gibt demnach 2 Wege, um die Fakultätsfunktion darzustellen:

1.) Für alle $n \in \mathbb{N}$ kann mit der Produktformel gerechnet werden, die jeder Taschenrechner verwendet:

$$n! = \prod_{n=1}^{n} n$$

2. Für alle $n \in \mathbb{R}$ muss das Euler-Integral angesetzt werden. Dies kann aber besonders bei CAS wie der "Advanced Mathematics Software" die etwa der TI verwendet, aber auch beim Einsatz von MathCAD zu Problemen führen:

$$\Gamma_e(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-1}\, dt$$

$\boxed{\Gamma_e(0.3) = \blacksquare\blacksquare}$

Konvergenz gegen eine Lösung nicht möglich.

1.1 Darstellung und Näherung der Gammafunktion

1.1.1 Gamma-Funktion nach Gauß

Carl Friedrich Gauß hat um 1820 den Definitionsbereich der Gammafunktion auf den negativen Zahlenbereich ausgeweitet, gemäß folgendem Definitionsbereich

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$$

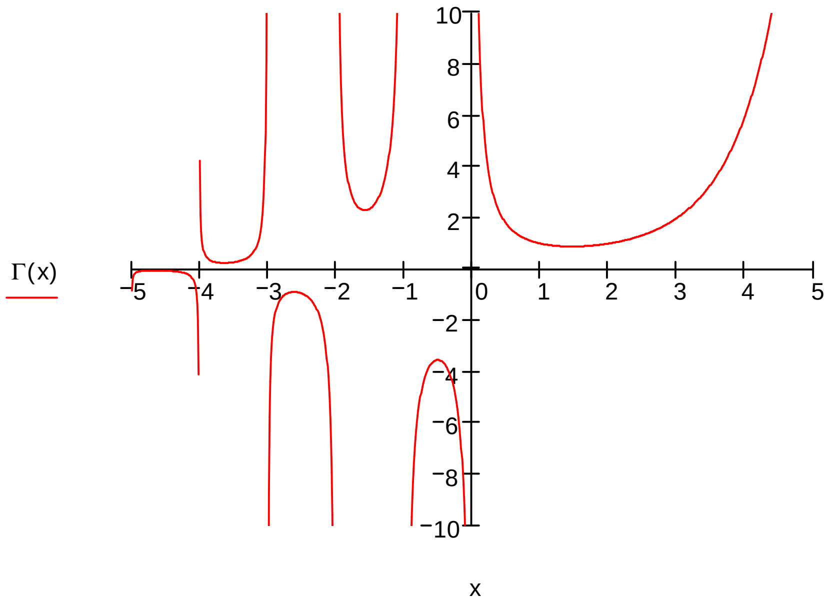
Die Gamma-Funktion nach C.F. Gauß

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2) \ldots \cdot (x+n)} \right] \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$$

oder in einer alternativen Schreibweise:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n!\, n^x}{x \cdot \prod_{n=1}^{n} (x+n)} \right] \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$$

der folgende Graph soll den erweiterten Definitionsbreich zeigen:



1.1.2 Näherung nach Stirling

Im 18. Jahrhundert war ein solches Integral natürlich sehr schwer zu berechnen. James Stirling entwickelte deshalb um etwa 1720 herum eine Nährungsformel zur Berechnung der Funktionswerte:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x - \frac{1}{2}} \cdot e^{-x}$$

Allerdings unterschätzt diese einfache Näherungsformel den tatsächlichen Funktionswert an der Stelle x, deshalb hat man die "einfache Stirlingformel" im Laufe der Zeit durch einen Korrekturfaktor erweitert. Diese Näherung basiert auf der folgenden Reihenentwicklung nach Stirling:

$$\ln(n!) = n \cdot \ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260 \cdot n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \ldots.$$

(*weitere Informationen sowie die verwendeten Formel siehe unter http://de.wikipedia.org/wiki/Stirling-Formel)*

Als Näherung betrachet man lediglich eine endliche Anzahl von Gliedern. Der Fehler liegt in der Größenordnung des ersten vernachlässigten Gliedes (da eine alternierende Reihe vorliegt). Bricht man beispielsweise nach dem dritten Glied ab, ist der absolute Fehler kleiner als $\frac{1}{12n}$ ist. Je kleiner n wird, desto mehr Glieder müssen angehängt werden um ein akkurates Ergebnis zu erhalten.

Aus dieser Näherung ergibt sich schließlich die "korrigierte" Stirling-Formel

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x+\mu(x)}$$

Wobei das $\mu(x)$ in der e-Potenz durch die entsprechenden Korrekturglieder ersetzt werden kann.

Es bleibt an dieser Stelle zu erwähnen, dass eine derart korrigierte Stirling-Formel eine erstaunliche Genauigkeit erreicht. Eine weitere Korrektur würde die Genauigkeit weiter verbessern. Setzt man für $\mu(x) = \frac{1}{12x}$ ein, so überschätzt man den tatsächlichen Wert. Deshalb kann der Wert exakt mit $0 < \mu < \frac{1}{12x}$ angegeben werden, wobei die Lage von $\mu(x)$ nur geschätzt werden kann.

Beispiel : Es seien $St(x) := \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x}$

und $St2(x) := \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x+\frac{1}{12 \cdot x}}$ die Näherungen für die Gammafunktion gemäß oben.

$St(5) = 23.604$ unterschätzt $\Gamma(5) = 24$

$St2(5) = 24.0005274$ überschätzt $\Gamma(5) = 24$ allerdings entsprechend geringer!

1.2.3. Ergänzungssatz der Gamma-Funktion

Aus dem Ergänzungssatz der Gamma-Funktion (durch Gauß) ergibt sich folgende Beziehung. Es gilt:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma_1(x+n)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot \ldots .[x+(n-1)]}$$

setzt man nun für $\Gamma_1(x)$ die Gamma-Funktion bzw. deren Näherung nach Stirling ein und betrachtet den Korrekturfaktor $\mu(x)$, für den die entsprechenden Korrekturglieder eingesetzt werden müssen, so ergibt sich nach einigen Vereinfachungen folgende Formel für $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{x+(n+1)}} \cdot [x+(n+1)]^{x+(n+1)} \cdot e^{-[x+(n+1)]+\frac{1}{12 \cdot [x+(n+1)]}-\frac{1}{360 \cdot [x+(n+1)]^3}}}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot \ldots .[x+(n-1)]}$$

oder auch

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{a}} \cdot a^a \cdot e^{-a+\frac{1}{12 \cdot a}-\frac{1}{360 \cdot a^3}}}{b}$$

mit: $a = x + (n+1)$

$b = x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot \ldots .[x+(n-1)]$

n stellt nun den "Genauigkeitsgrad" der Funktionsgleichung dar. Diese Formel arbeitet aber bereits bei einem $n = 4$ erstaunlich genau, was in folgendem Beispiel gezeigt werden soll. Als Referenzwert dient in jedem Fall der Funktionswert, der durch die bereits in Mathcad implementierten Gammafunktion berechnet wird.

Als erstes wird die Funktion als Γ_X definiert. $x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot ....[x+(n-1)]$: wird einfach durch eine Produktformel ersetzt, die genau das selbe darstellt:

$$\Gamma_X(x,n) := \frac{\sqrt{\dfrac{2\cdot\pi}{x+(n+1)}} \cdot [x+(n+1)]^{x+(n+1)} \cdot e^{-[x+(n+1)]+\frac{1}{12 \cdot [x+(n+1)]}-\frac{1}{360 \cdot [x+(n+1)]^3}}}{x \cdot \prod_{n=1}^{n} (x+n)}$$

Als nächstes soll n und damit die Genauigkeit der Funktion varrieren. Dabei ist zu beachten, dass gilt: $n \in \mathbf{Z}$

$n := 1 .. 10$

x stellt den entsprechenden Punkt dar, für den ein Funktionswert berechnet werden soll. Dieser Wert kann beliebig sein, muss aber im Definitionsbereich liegen.

$x := \frac{1}{3}$

$\text{ORIGIN} \equiv 1$

Funktionswerte

$\Gamma_X(x,n) =$

	1
1	2.67891122760114
2	2.67893367966162
3	2.67893719503922
4	2.67893805438180
5	2.67893832982309
6	2.67893843582041
7	2.67893848236265
8	2.67893850494229
9	2.67893851678649
10	2.67893852340229

Exakter Wert von MathCAD

$\Gamma(x) = 2.67893853470775$

Die Genauigkeit ist meiner Ansicht nach doch recht erstaunlich.

Berechnung der Fehlerwerte:

Der absolute Fehler ist definiert mit $f_{abs} = \text{istwert} - \text{sollwert}$ $\qquad f_{abs}(x_i, x_S) := x_i - x_S$

Der relative Fehler ist definiert mit $f_{rel} = \dfrac{\text{istwert} - \text{sollwert}}{\text{sollwert}}$ $\qquad f_{rel}(x_i, x_S) := \dfrac{x_i - x_S}{x_S}$

Es soll nun jeweils der relative als auch der absolute Fehler berechnet werden:

$f_{abs}\left(\Gamma(x), \Gamma_X(x,n)\right) =$

	1
1	$2.731\cdot10^{-5}$
2	$4.855\cdot10^{-6}$
3	$1.340\cdot10^{-6}$
4	$4.803\cdot10^{-7}$
5	$2.049\cdot10^{-7}$
6	$9.889\cdot10^{-8}$
7	$5.235\cdot10^{-8}$
8	$2.977\cdot10^{-8}$
9	$1.792\cdot10^{-8}$
10	$1.131\cdot10^{-8}$

$f_{rel}\left(\Gamma(x), \Gamma_X(x,n)\right) =$ %

	1
1	$1.019\cdot10^{-3}$
2	$1.812\cdot10^{-4}$
3	$5.001\cdot10^{-5}$
4	$1.793\cdot10^{-5}$
5	$7.648\cdot10^{-6}$
6	$3.691\cdot10^{-6}$
7	$1.954\cdot10^{-6}$
8	$1.111\cdot10^{-6}$
9	$6.690\cdot10^{-7}$
10	$4.220\cdot10^{-7}$

Grenzwerte

Mathcad stößt bei Zahlen mit Beträgen größer als 10^{307} an seine Grenzen, und gibt bei einem entsprechend großem n eine Fehlermeldung aus. Der letzte für Mathcad noch berechenbare Wert für unser $x = \frac{1}{3}$ liegt bei $n = 141$

$$\Gamma_X\left(\frac{1}{3}, 141\right) = 2.67893853470793$$

$$\Gamma_X\left(\frac{1}{3}, 142\right) = \blacksquare\blacksquare$$

Beim Versuch, diesen Ausdruck auszuwerten,
wurde eine Zahl mit einem Betrag
größer als 10^307 gefunden.

je größer x wird, desto geringer muss dann auch n ausfallen, um für Mathcad noch berechenbar zu sein.

Interessant sind aber dennoch Funktionswerte und Fehler für die letzten 10 n-Werte: $n := 1 .. 141$

Funktionswerte

$\Gamma_X(x,n) =$

	1
1	2.67891122760114
2	2.67893367966162
3	2.67893719503922
4	2.67893805438180
5	2.67893832982309
6	2.67893843582041
7	2.67893848236265
8	2.67893850494229
9	2.67893851678649
10	2.67893852340229
11	2.67893852729358

Exakter Wert von MathCAD

$\Gamma(x) = 2.67893853470775$

$f_{abs}(\Gamma(x), \Gamma_X(x,n)) =$

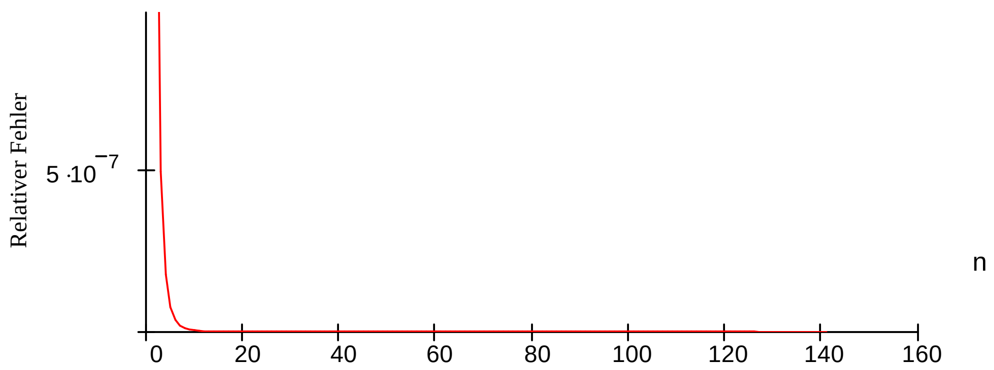
	1
1	$2.731 \cdot 10^{-5}$
2	$4.855 \cdot 10^{-6}$
3	$1.340 \cdot 10^{-6}$
4	$4.803 \cdot 10^{-7}$
5	$2.049 \cdot 10^{-7}$
6	$9.889 \cdot 10^{-8}$
7	$5.235 \cdot 10^{-8}$
8	$2.977 \cdot 10^{-8}$
9	$1.792 \cdot 10^{-8}$
10	$1.131 \cdot 10^{-8}$
11	$7.414 \cdot 10^{-9}$

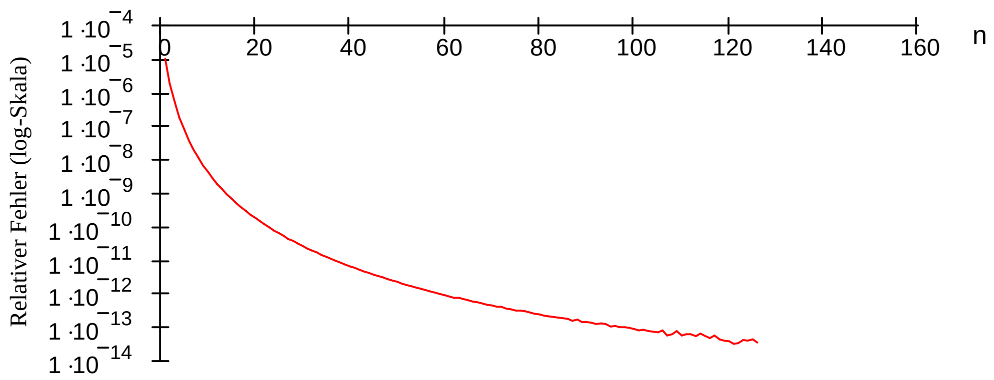
$f_{rel}(\Gamma(x), \Gamma_X(x,n)) =$

	1
1	$1.019 \cdot 10^{-3}$
2	$1.812 \cdot 10^{-4}$
3	$5.001 \cdot 10^{-5}$
4	$1.793 \cdot 10^{-5}$
5	$7.648 \cdot 10^{-6}$
6	$3.691 \cdot 10^{-6}$
7	$1.954 \cdot 10^{-6}$
8	$1.111 \cdot 10^{-6}$
9	$6.690 \cdot 10^{-7}$
10	$4.220 \cdot 10^{-7}$
11	$2.768 \cdot 10^{-7}$

%

Natürlich kann man es mit der Genauigkeit auch übertreiben. Da der Taschenrechner TI-Voyage 200 PLT standardmäßig auf Fließkommazahlen bis 6 Dezimalen eingestellt ist, kann man mit $n = 10$ rechnen. Größere Genauigkeiten werden dann ja sowieso gerundet.
Hier in diesem Beispiel wurde lediglich aus Demonstrationsgründen bis an die Grenzen von Mathcad gerechnet, um zu zeigen, wie sich die Genauigkeit in Abhänigkeit von n verhält:





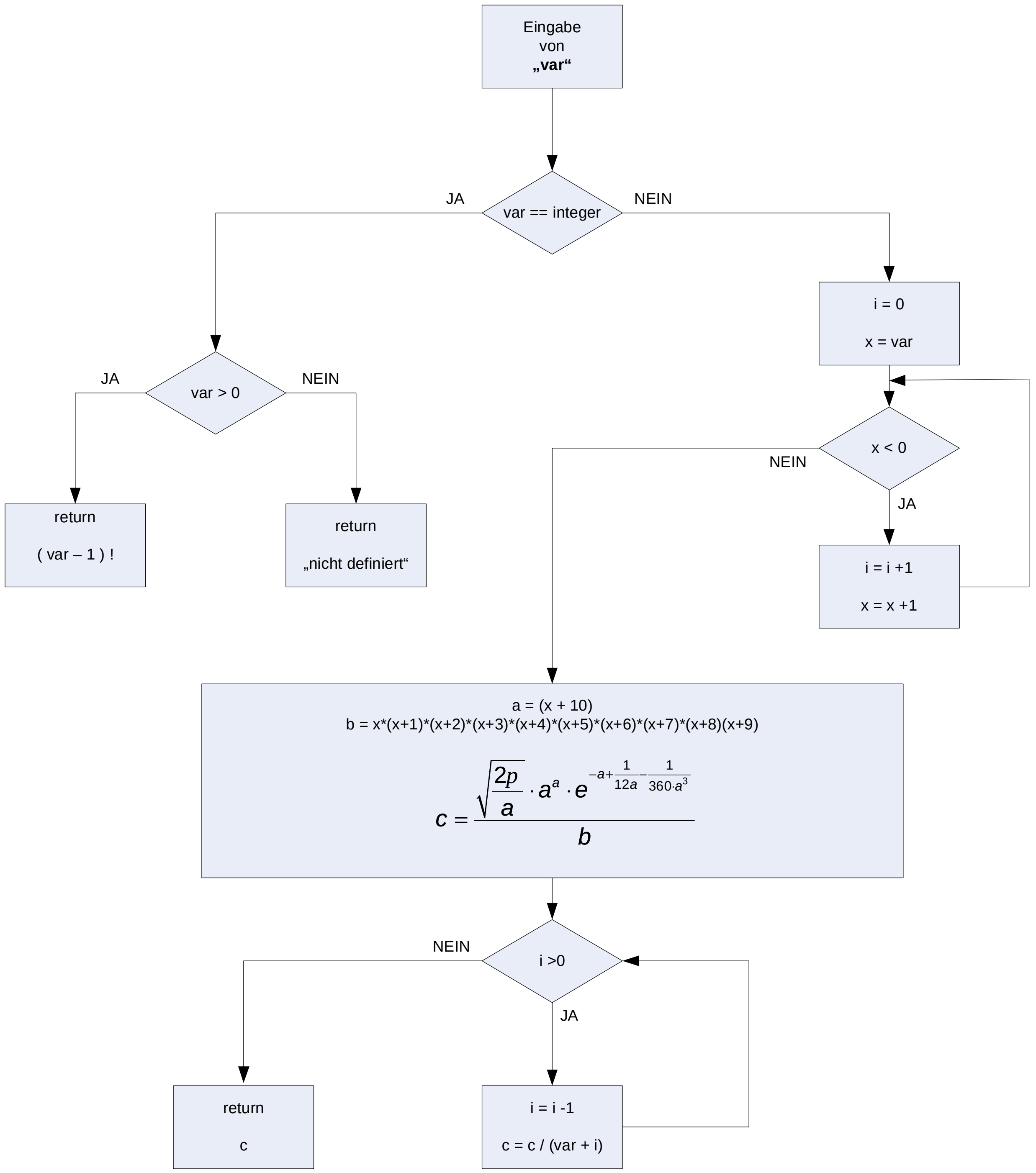
2) Entwurf eines Algorithmus

zur Inhaltsübersicht

Die Formel, die die Funktionswerte an der Stelle x berechnet, wird von oben übernommen, jedoch müssen für einen brauchbaren Algorithmus noch einige Sonderfälle berücksichtigt werden:

- ist x eine positive ganze Zahl, so gilt: $\Gamma(n) = (n-1)!$
- ist x eine negative ganze Zahlel oder ist $x = 0$, so ist die Funktion an dieser Stelle nicht definiert
- für negative ganze Zahlen (mit Ausnahme von negativen ganzen Zahlen) müssen ausserdem noch ein paar spezielle Korrekturen durchgeführt werden.

Ein Algorithmus, der alle diese Sonderfälle berücksichtigt könnte im Blockdiagramm dann etwa so aussehen:



überträgt man das Blockdiagramm in die Mathcad eigene Programmiersprache, entsteht folgendes Programm

$$
\mathrm{gamma}(var, n) :=
\left|
\begin{array}{l}
\text{return } (var - 1)! \quad \text{if} \quad var > 0 \wedge \mathrm{floor}(var) = var \\
\text{Fehler}(\text{"Nicht für 0 oder negative ganze Zahlen definiert"}) \quad \text{if} \quad var < 0 \wedge \mathrm{floor}(var) = var \\
\text{otherwise} \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
i \leftarrow 0 \\
x \leftarrow var \\
\text{while} \quad x < 0 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
i \leftarrow i + 1 \\
x \leftarrow x + 1
\end{array}
\right. \\
a \leftarrow x + (n + 1) \\
b \leftarrow x \cdot \displaystyle\prod_{n=1}^{n} (x + n) \\
c \leftarrow \dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{2 \cdot \pi}{a}} \cdot a^{a} \cdot e^{-a + \frac{1}{12 \cdot a} - \frac{1}{360 \cdot a^{3}}} \right)}{b} \\
\text{while} \quad i > 0 \qquad \text{if} \quad i > 0 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
i \leftarrow i - 1 \\
c \leftarrow \dfrac{c}{var + i}
\end{array}
\right. \\
\text{return } c
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Die Funktion beinhaltet den Wert, für der der Funktionswert berechnet werden soll (var) und den n-Faktor.

ACHTUNG: diese Funktion berechnet den GAMMA-FUNKTIONSWERT UND NICHT DIE FAKULTÄT von VAR, um die FAKULTÄT zu berechnen gilt wiederum der Zusammenhang:

$$\Gamma(x) = (x - 1)!$$

also müsste demensprechend eine Fakultätsfunktion wie folgt aussehen:

$$\mathrm{fakult}(var, n) := \mathrm{gamma}(var + 1, n)$$

$$\mathrm{fakult}\left(\frac{1}{3}, 10\right) = 0.893 \qquad \Gamma\left(\frac{1}{3} + 1\right) = 0.893$$

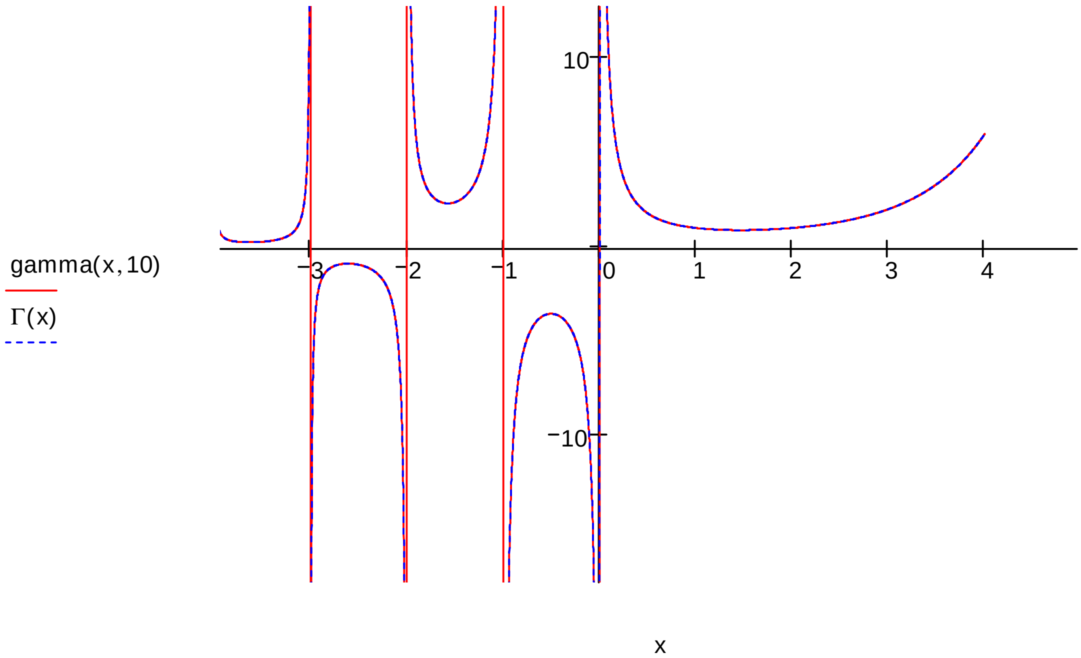
$$\mathrm{fakult}(5, 0) = 120 \qquad \Gamma(6) = 120$$

umgeschrieben als Funktion für den TI Voyage 200 muss der Algorithmus dann so aussehen (TI-Basic):

```
Gamma(var)

Func
Local a,b,c,i,x

If iPart(var)=var Then
    If var>0 Then
         Return (var-1)!
    Else
         Return "undefiniert"
    EndIf

Else
    0→i
    var→x

    While x<0
         i+1→i
         x+1→x
    EndWhile

    (x+10)→a
    x*(x+1)*(x+2)*(x+3)*(x+4)*(x+5)*(x+6)*(x+7)*(x+8)*(x+9)→b

    √((2*π)/a)*a^a*e^(⁻a+(1/(12*a))-(1/(360*a^3)))/b→c

    If i>0 Then
         While i>0
              i-1→i
              c/(var+i)→c
         EndWhile
    EndIf

    Return approx(c)

EndIf
EndFunc
```

Dass dieser Algorithmus funktioniert, soll ein grafischer Vergleich zeigen:

$x := -4, -3.999 .. 4$



Auch die Fehlermeldung sollte funktionieren, falls ein undefinierter Bereich eingegeben wird:

gamma(−3, 10) = ■■
Nicht für 0 oder negative ganze Zahlen definiert

zur Inhaltsübersicht

3) Anwendungsbeispiel: Berechnung der durchschnittlichen Lebensdauer (Weibullverteilung

Die klassische Lebensdauerverteilung ist die Weibullverteilung. Bei der Berechnung der durchschnittlichen Lebensdauer (= Erwartungswert der entsprechenden Weibullverteilung !) gibt es eine Anwendung der Euler´schen Gammfunktion, wie im folgenden ausgeführt wird:

$$G_{weibull}(t, T, b) := 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

Verteilungsfunktion der Weibullverteilung = 1 - R(t)

b ... Ausfallssteilheit
T ... charakteristische Lebensdauer

Wir benötigen die Dichtefunktion der Weibullverteilung (=Ableitung der Verteilungsfunktion):

$$g_{weibull}(t, T, b) := \frac{d}{dt} G_{weibull}(t, T, b) \qquad g_{weibull}(t, T, b) \rightarrow \left(\frac{t}{T}\right)^b \cdot \frac{b}{t} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{T}\right)^b\right]$$

$$\mu(T,b) := \int_0^{\infty} t \cdot g_{weibull}(t,T,b)\,dt$$

Erwartungswert = mittlere Lebensdauer einer Weibullverteilung mit den Parametern b und T.

Die mittlere Lebensdauer μ und die charakteristische Lebensdauer T kann nun über eine Faktor a(b) in Abhängigkeit von der Ausfallsteilheit dargestellt werden:

$$\mu = a(b) \cdot T$$

Der Faktor a(b) ist für b>1 (also für Elemente mit Verschleisserscheinungen = Phase III der Badewannenkurve) stets kleiner als 1 - also ist in diesem Fall die mittlere Lebensdauer stets kleiner als die charakteristische Lebensdauer.

Der Faktor a(b) ist b<1 (also für sogenannte "Frühausfälle" = Phase I der Badewannenkurve) stets größer als 1 - also ist in diesem Fall die mittlere Lebensdauer stets größer als die charakteristische Lebensdauer

Nur für den Fall b=1 (konstante Ausfallrate; ***Exponentialverteilung***) ist mittlere Lebensdauer gleich der charakteristischen Lebensdauer.

Dies wird in den nachfolgenden Berechnungsbeispielen und der Grafik verifiziert:

$T := 1$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit)

$$a(b) := \frac{\mu(T,b)}{T}$$

$a(1) = 1$

$a(0.8) = 1.133$

$a(0.5) = 2$

$a(1.5) = 0.903$

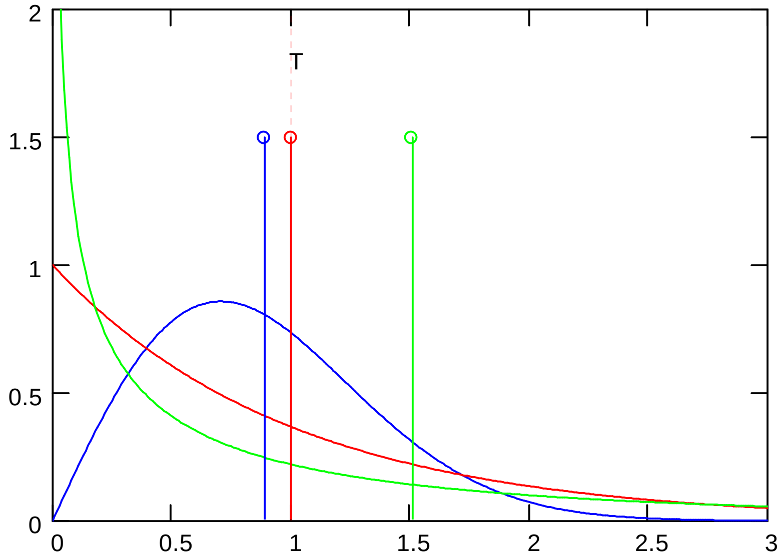
$a(2) = 0.886$

$a(3) = 0.893$

$a(5) = 0.918$

Graphische Gegenüberstellung zwischen charakteristischer Lebensdauer T und durchschnittlicher Lebensdauer

$$tt := 0, \frac{1}{100} .. 3$$



Dichte der Weibullverteilung mit b=2
Dichte der Weibullverteilung mit b=1
Dichte der Weibullverteilung mit b=0.6
Erwartungswert für b=0.6
Erwartungswert für b=1
Erwartungswert für b=2

In Formelsammlungen findet man (im Gegensatz zu oben) meist die folgende Definition des Zusammenhanges, welcher die Eulersche Gammfunktion bzw. die Fakultät verwendet:

$$a(b) = \left(\frac{1}{b}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)$$

Wie folgende Berechnungsbeispiele zeigen, erhält man mit obiger Berechnungsformel und über die Gammafunktion die gleichen Werte!

$a(3) = 0.893$ $\quad\Gamma\left(\frac{1}{3} + 1\right) = 0.893$

$a(1.5) = 0.903$ $\quad\Gamma\left(\frac{1}{1.5} + 1\right) = 0.903$

$a(0.6) = 1.505$ $\quad\Gamma\left(\frac{1}{0.6} + 1\right) = 1.505$

Man könnte daher auch definieren:

$$a(b) := \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)$$

zur Inhaltsübersicht