

Peter Schüller

peter.schueller@bmbwk.gv.at

## Polynomfunktionen - Fundamentalsatz der Algebra



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**  
**Polynomfunktionen, Fundamentalsatz der Algebra, Grad eines Polynoms, einfache und mehrfache Nullstellen**
- **Kurzzusammenfassung**  
**An Hand ausgewählter Beispiele werden die besonderen Eigenschaften von Polynomfunktionen (vor allem auf graphischem Weg) herausgearbeitet und zusammengefaßt. In diesem Zusammenhang werden die Aussagen des Fundamentalsatzes der Algebra bestätigt bzw. eingeführt. Zum Abschluß wird noch gezeigt, wie man aus einem gegebenen (beliebigen) Graphen den Grad des Polynoms ermitteln kann.**
- **Didaktische Überlegungen**  
**Die Schüler kennen bereits Merkmale und Zusammenhänge der besonderen Punkte wie Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte und haben an Hand "technischer" Funktionen (Kombinationen aus Winkelfunktionen, Exponentialfunktionen...) diese bereits mehrmals näher untersucht und durchgerechnet. Ich führe dann im Nachhinein die Polynomfunktionen als einen Sonderfall ein, der durch seine Besonderheiten eine Reihe von Vorteilen bringt und weise (insbesondere im Hinblick auf die späteren Reihenentwicklungen) auf die besondere Stellung in der Mathematik hin.**
- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**  
**Angewandte Mathematik, 3.Jahrgang, alle Abteilungen**
- **Mathcad-Version:**  
**Mathcad 2001 / 2000 / 8 / 7**



### 0) Definition:

Wir definieren eine Polynomfunktion als  $p_n(x) := (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$ , wobei  $n$  als der Grad des Polynomes bezeichnet wird.

### 1) Untersuchungen zum Thema Nullstellen:

Betrachten wir vorerst ein Polynom vom Grad 2.

$$X := -10, -9.95.. 10$$

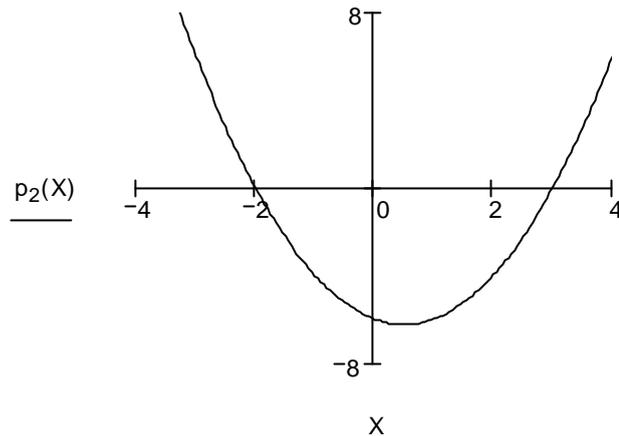
$$p_2(x) := (x + 2) \cdot (x - 3)$$

oder durch ausmultiplizieren

$$p_2(x) := x^2 - x - 6$$

Wir erhalten also eine Parabel.

Untersuchen wir die Nullstellen, so erkennen wir die Werte -2 und +3. Durch einfaches Überlegen ist dies leicht zu begründen [  $(x+2)(x-3)=0$  ]. Gleichzeitig ist aber auch leicht zu sehen (algebraisch und geometrisch), daß es keine weiteren Nullstellen geben kann.

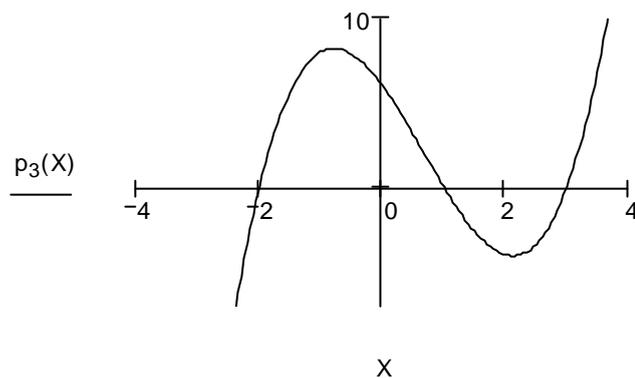


### Diskussion:

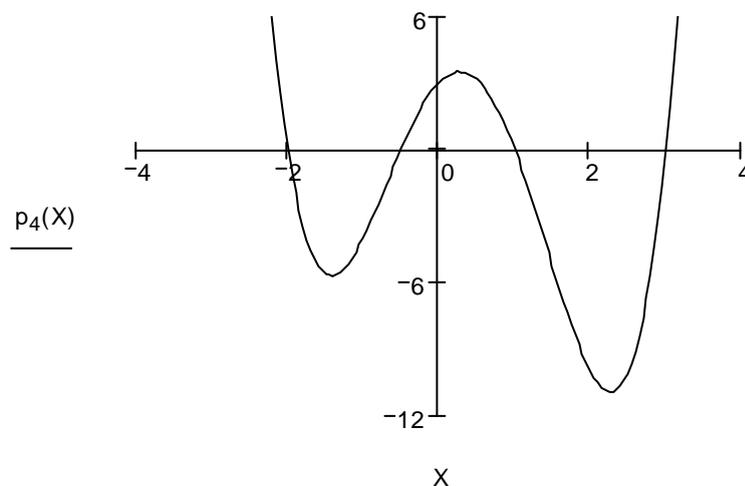
Die Form  $p_n(x) := (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$  bestimmt sichtlich nicht nur den Grad, sondern auch die Anzahl und die Werte der Nullstellen.

Wir versuchen es mit mehreren Faktoren:

$$p_3(x) := (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$$

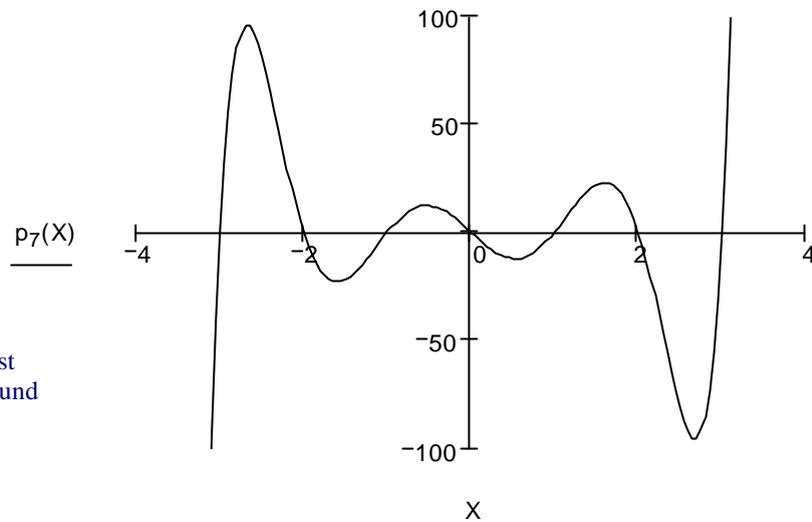


$$p_4(x) := (x + 2) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$$



Wir sehen unsere Vermutungen bestätigt. Und weils mir einem CAS so leicht geht, darfs ruhig ein bisschen mehr sein....

$$p_7(x) := (x + 3) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$



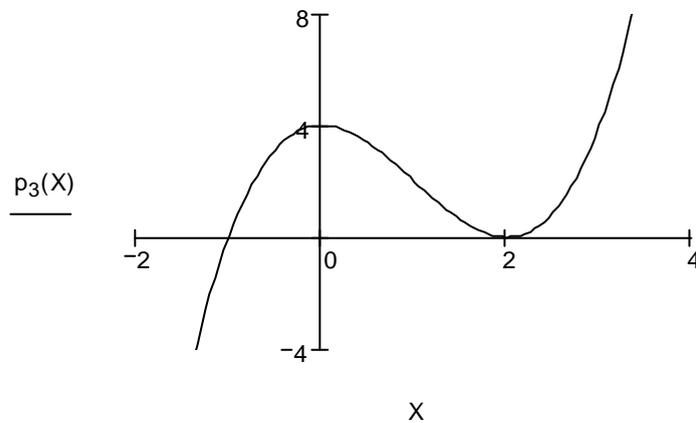
Experimentiere nach Herzenslust mit verschiedenen Polynomen und überdenke die Ergebnisse.....

### Diskussion:

In den Nullstellen wechselt die Funktion die Seite der x-Achse. Somit muß zwischen jeweils zwei Nullstellen ein Punkt existieren, in welchem die Funktion am weitesten von der x-Achse entfernt ist, also "faktisch umdreht" und zur x-Achse zurückkehrt - ein Extremwert.

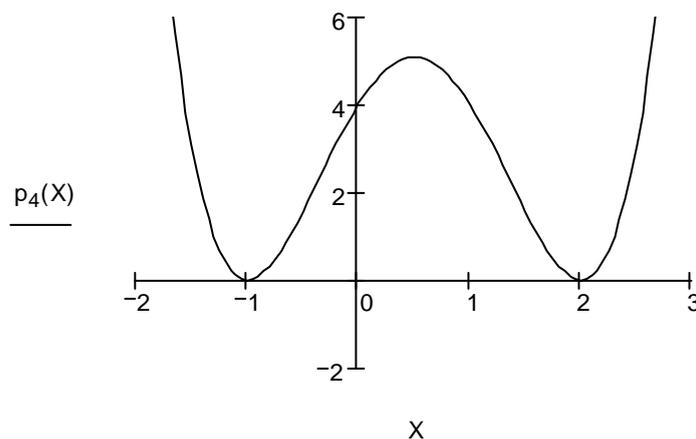
Was geschieht nun, wenn ein Zerlegungsbinom als Potenz auftritt? Man nennt dies eine **mehrfache Nullstelle**.

$$p_3(x) := (x + 1) \cdot (x - 2)^2$$



oder auch

$$p_4(x) := (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2$$



Sichtlich erhalten wir in diesem Fall bei jeder mehrfachen Nullstelle einen Extremwert. Hierfür gibt es einfache Erklärungen:

**Algebraisch:** doppelte Nullstellen bleiben beim Ableiten erhalten --> somit müssen sie auch Extremwert sein.

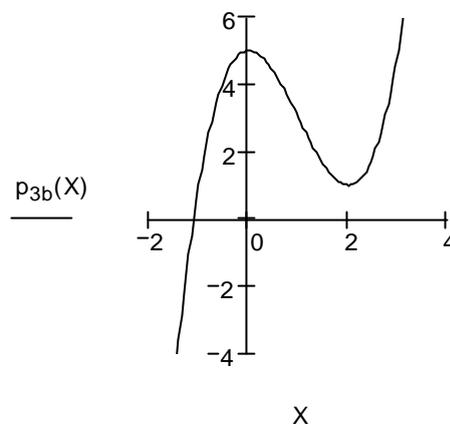
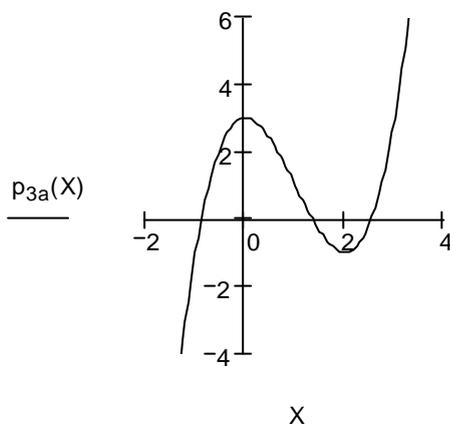
$$p_3(x) := (x + 1) \cdot (x - 2)^2$$

$$\frac{d}{dx}(x + 1) \cdot (x - 2)^2 \rightarrow (x - 2)^2 + 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \quad \text{der Faktor (x-2) ist natürlich noch vorhanden}$$

**Geometrisch:** wir verschieben das Polynom jeweils um 1 nach oben und nach unten

$$p_{3a}(x) := (x + 1) \cdot (x - 2)^2 - 1$$

$$p_{3b}(x) := (x + 1) \cdot (x - 2)^2 + 1$$



**Wir erkennen:** verschieben wir die x-Achse, so rücken die beiden Nullstellen immer näher, fallen sie schließlich zusammen, so bilden sie einen Extremwert (x-Achse wird Tangente).

Was geschieht aber danach?

Geometrisch verschwinden beide Nullstellen gleichzeitig. Was bedeutet dies aber algebraisch?

Wir betrachten zuerst  $p_{3a}(x)$ :

$$p_{3a}(x) := (x + 1) \cdot (x - 2)^2 - 1 \quad \text{oder} \quad p_{3a}(x) := x^3 - 3 \cdot x^2 + 3$$

wir sehen leicht, daß drei reelle Nullstellen vorhanden sind.

Nun aber das noch oben verschobene Polynom  $p_{3b}(x)$ :

$$p_{3b}(x) := (x + 1) \cdot (x - 2)^2 + 1 \quad \text{oder} \quad p_{3b}(x) := x^3 - 3 \cdot x^2 + 5$$

$$x^3 - 3 \cdot x^2 + 5 = 0 \quad \text{hat als Lösung(en)} \quad \left( \begin{array}{l} -1.104 \\ 2.052 - 0.565j \\ 2.052 + 0.565j \end{array} \right)$$

Wir sehen, daß zwei Nullstellen algebraisch noch vorhanden, aber in den komplexen Bereich "abgerutscht" sind. Aus all dem läßt sich nun einfach erkennen, daß immer nur zwei Nullstellen gleichzeitig "verschwinden" können (also komplex werden).

Was bedeutet nun eine **dreifache Nullstelle**?

Versuchen wir vielleicht vorerst algebraisch zu überlegen! Der Faktor  $(x - \alpha_i)^3$  muß nach den Gesetzen der Differentialrechnung nun nicht nur die 1. Ableitung "überstehen", sondern auch noch in der 2. Ableitung vorhanden sein!

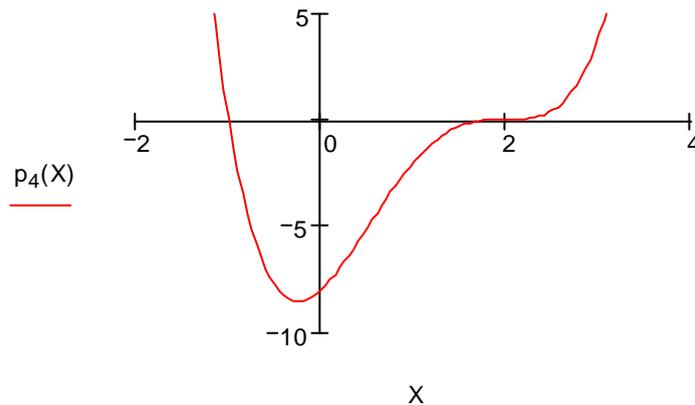
$p_4(x) := (x + 1) \cdot (x - 2)^3$  sei eine Polynomfunktion  $p_4(x)$  mit dreifacher Nullstelle

$\frac{d}{dx} p_4(x) \rightarrow (x - 2)^3 + 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)^2$  ist dann die 1. Ableitung

$\frac{d^2}{dx^2} p_4(x) \rightarrow 6 \cdot (x - 2)^2 + 6 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$  die 2. Ableitung

Richtig! Der Faktor  $(x-2)$  ist immer noch vorhanden. Die bedeutet, das der Punkt mit  $x = 2$  nicht nur Nullstelle und Extremwert ist, sondern auch noch ein Wendepunkt sein muß. Wir schauen uns dies sofort in der Graphik an:

$p_4(x) := (x + 1) \cdot (x - 2)^3$



Einen solchen Punkt bezeichnen wir als Flachpunkt.

## 2) Fundamentalsatz der Algebra:

Die Nullstellenberechnung von Polynomfunktionen ist gleichzusetzen mit dem Lösen von algebraischen Gleichungen n-ten Grades:

$$p_n(x) := (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \text{ entspricht } p_n(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Berechnet man nun die Nullstellen, so erhält man  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , also eine Gleichung n-ten Grades.

Aus den vorangegangenen Untersuchungen können wir nun folgende Sätze formulieren:

**Eine Gleichung n-ten Grades [mit reellen Koeffizienten] hat immer genau n Lösungen (Wurzeln) im Bereich C.**

**Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Lösungen (Wurzeln) der Gleichung, so läßt sich die Gleichung in der Form  $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) = 0$  darstellen.**

### 3) Überlegungen zum Thema Extremwerte, Wendepunkte:

Da eine Polynomfunktion vom Grad n die Form  $p_n(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  hat, muß nach den Grundregeln der Differentialrechnung ihre 1. Ableitung vom Grad n-1 sein und ihre 2. Ableitung vom Grad n-2.

Die Berechnung von Extremwerten und Wendepunkte führt wiederum auf das Lösen von algebraischen Gleichungen n-ten Grades, die sich von jenen der Nullstellenberechnung lediglich im Grad der Gleichungen unterscheiden.

In diesem Sinne lassen sich eine Reihe von prägnanten Aussagen machen, die speziell auf Polynomfunktionen zutreffen.

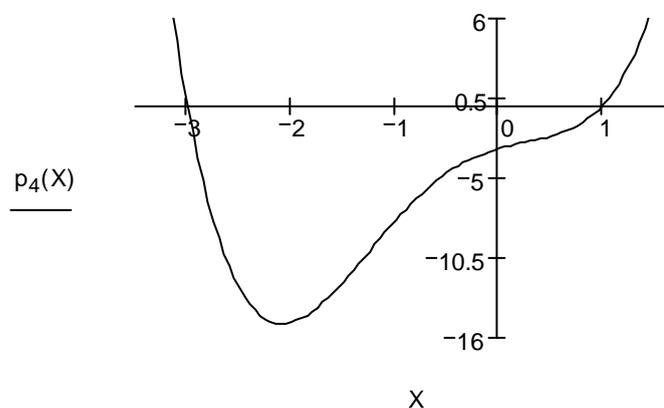
### **Aussagen mit spezieller Gültigkeit für Polynomfunktionen**

- **Eine Polynomfunktion n-Grades hat maximal n reelle Nullstellen.**
- **Diese Anzahl kann sich jeweils um Vielfache von 2 verringern (komplexe Lösungen).**
- **Polynomfunktionen von ungeradem Grad haben somit immer mindestens eine reelle Nullstelle.**
- **Eine Polynomfunktion n-Grades kann maximal n-1 Extremwerte aufweisen**  
[Schnellbestimmung des Grades durch Zählen der Extremwerte].
- **Zwischen zwei Nullstellen muß mindestens ein Extremwert liegen.**
- **Eine Polynomfunktion n-Grades kann maximal n-2 Wendepunkte aufweisen.**

### 4) Graphische Bestimmung des Grades einer Polynomfunktion

Wir haben aus unseren Überlegungen erkannt, daß die Anzahl der Nullstellen oder Extremwerte nicht immer die richtige Auskunft über den Grad der Polynomfunktion gibt. Betrachten wir etwa folgendes Beispiel:

$$p_4(x) := x^4 - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 3$$



Wir könnten diese Polynomfunktion als ein wenig "entartet" bezeichnen. Angenommen, wir wissen nun, daß es sich hier um eine Polynomfunktion handelt, wissen jedoch ihre Gleichung nicht. Haben wir eine Möglichkeit, trotzdem ihren Grad zu bestimmen?

**algebraische Überlegung:**

Nutzen wir die Fähigkeiten der Computeralgebra und schneiden wir etwa ein Polynom 4. Grades mit einer beliebigen Geraden, die aber jedenfalls nicht die x-Achse sein soll!

$$p_4(x) := x^4 - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 3 \quad g(x) := 6 \cdot x - 3$$

dies ergibt algebraisch:  $x^4 - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 3 = 6 \cdot x - 3$

und umgeformt:  $x^4 - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 - 4 \cdot x = 0$

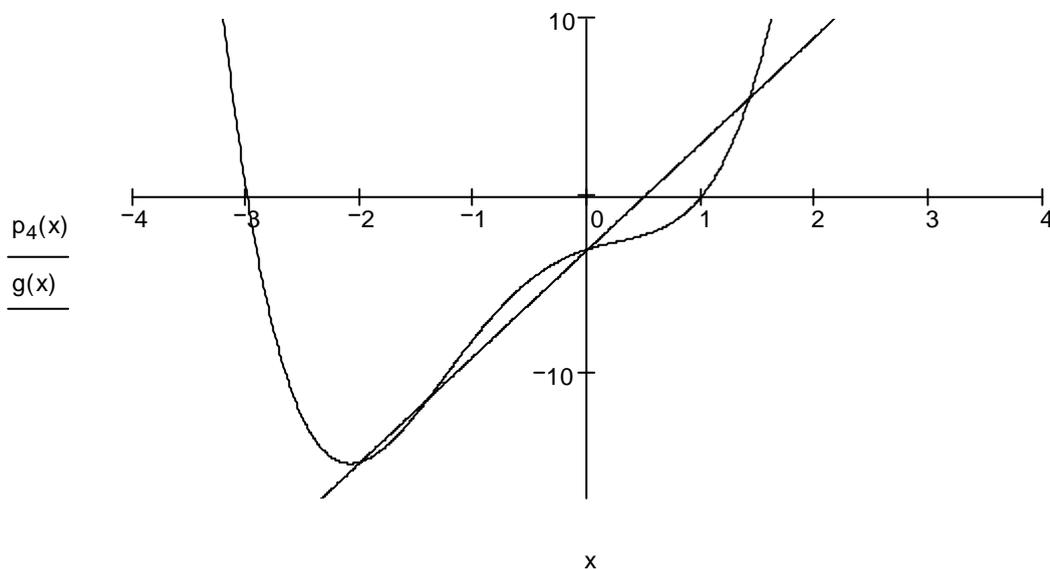
also wieder eine Gleichung vom Grad 4.

**Diskussion:**

Der Schnitt einer Polynomfunktion (Grad n) mit einer Geraden (Grad 1) führt stets wieder auf eine Gleichung vom Grad n. [Die Berechnung der Nullstellen ist eben nur der Spezialfall des Schnittes mit der Geraden x-Achse]. Somit gibt uns nicht nur die Zahl der Nullstellen Auskunft über den Grad der Funktion, sondern der Schnitt mit jeder beliebigen Geraden. Wir brauchen lediglich ein Lineal nehmen und es so in die Graphik legen, daß wir möglichst viele Schnittpunkte erhalten. Die Maximalzahl gibt uns dann Auskunft über den Grad der Funktion.

**Die maximale Anzahl der Schnittpunkte einer Polynomfunktion mit einer beliebigen Geraden gibt Auskunft über den Grad des Polynomes.**

In unserem Falle sieht die so aus:

**5) Rekonstruktion der Gleichung aus dem Graphen (Interpretation von Graphen)**

Übungsvorschlag: Zum Abschluß könnte man nun noch versuchen, verschiedene Polynomfunktionen, deren Graphen vorgegeben sind, mit dem erworbenen Wissen zu "rekonstruieren". Zu diesem Zweck benutzen wir unser angesammeltes Wissen aus den vorangegangenen Seiten - und natürlich unser CAS, um schnell "Testen" zu können.