Heinrich Schmidhuber heinrich_schmidh@hotmail.com

Fehlerrechnung in der Optik

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Fehlerarten, Fehlerfortplanzung, lin. Regression, Linsengleichung

- Kurzzusammenfassung

  Die Brennweite einer Sammellinse (mit Angabe der Fehlergrenzen) soll durch Messung der Gegenstands- und Bildweite ermittelt werden. Dazu wird zu Beginn der Größtfehler und seine Abhängigkeit vom zu wählenden Messbereich bestimmt. Um einen möglichen systematischen Fehler zu erkennen, wird die Brennweite danach auf zwei Arten errechnet.
  Zuletzt wird noch ein Verfahren vorgestellt, wie mögliche systematische Abweichungen eliminiert werden können.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Die Schüler sollten sowohl mit den mathematischen (Fehlerfortpflanzung,..) als auch physikalischen (dünne/dicke Linsen,...) Inhalten vertraut sein.
  Zeitaufwand: inklusive Messung: 6UE

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Optiklabor, 4.Jahrgang, Mechatronik;
  AM, Lineare Regression, Fehlerfortpflanzung 3.Jahrgang, Mechatronik

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001i

- Literaturangaben:

  G. Schröder technische Optik Würzburg:Vogel, 1998

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Diese Arbeit wird von mir im Optiklabor verwendet. (4. Jahrgang, Mechatronik)
  Sicherlich auch im AHS-Bereich (Physik) einsetzbar.

Ermittlung der Brennweite einer Sammellinse

Die Brennweite wird aus Bildweite b und Gegenstandsweite g nach der Formel 1/f = 1/g +1/b errechnet.
Vor Messbeginn wird der Größtfehler abgeschätzt.

$$f(g,b) := \frac{b \cdot g}{g+b}$$

Formel nach f aufgelöst.

Bei absoluten Fehlern Δg (Messfehler in g) und Δb (Messfehler in b) gilt für Δf (Fehler in f):

$$\Delta f(g,b,\Delta g,\Delta b) := \left|\frac{d}{dg} f(g,b)\right| \cdot \Delta g + \left|\frac{d}{db} f(g,b)\right| \cdot \Delta b$$

eigentlich partielle Ableitungen

$$\Delta f(g,b,\Delta g,\Delta b) \rightarrow \left|\left[\frac{b}{(g+b)} - b \cdot \frac{g}{(g+b)^2}\right]\right| \cdot \Delta g + \left|\left[\frac{g}{(g+b)} - b \cdot \frac{g}{(g+b)^2}\right]\right| \cdot \Delta b$$

symb. Ergebnis

Zur Bestimmung des optimalen Messbereiches eine graphische Darstellung des absoluten Fehlers (Δf):

Anzahl der Unterteilungen in g-Richtung: $N := 20$ $\quad i := 0..N$ $\quad g_{min} := 5cm$ $\quad g_{max} := 50cm$

Anzahl der Unterteilungen in b-Richtung: $M := 20$ $\quad j := 0..M$ $\quad b_{min} := 10cm$ $\quad b_{max} := 50cm$

Mit i, j ...Laufvariablen
b_{min}, b_{max}... minimale, maximale Bildweite
g_{min}, g_{max}... minimale, maximale Gegenstandsweite

$$g_i := g_{min} + \frac{i}{N} \cdot (g_{max} - g_{min})$$

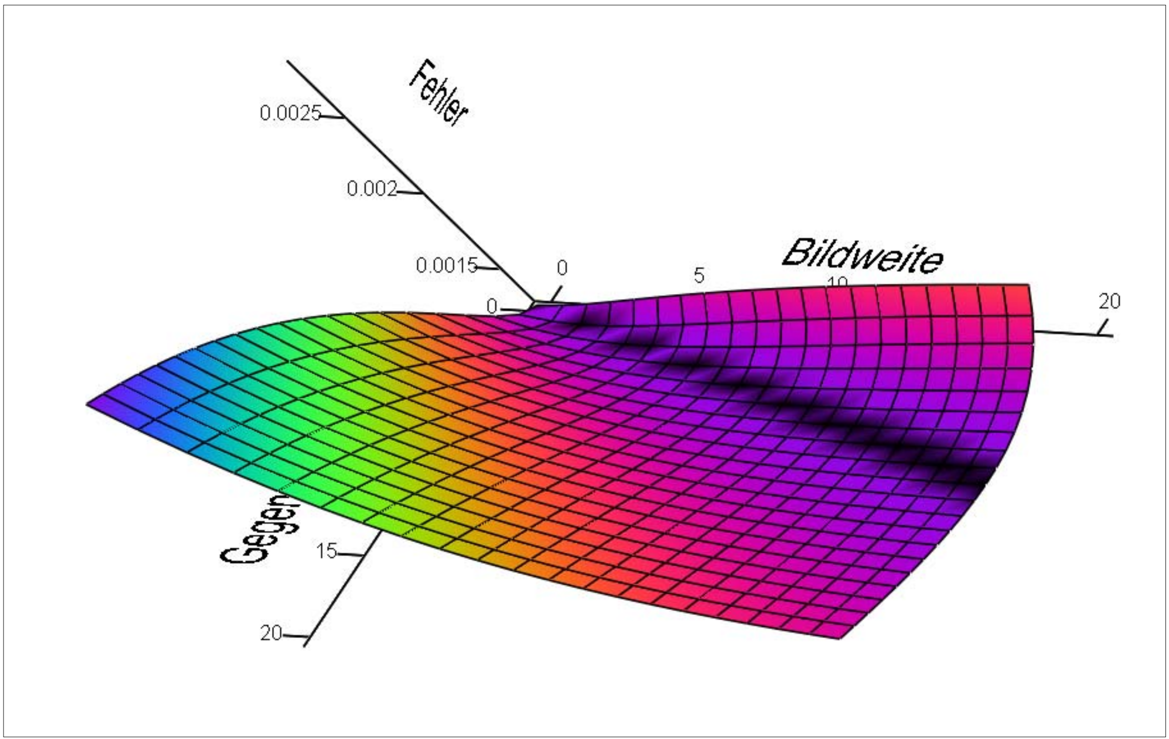
$$b_j := b_{min} + \frac{j}{M} \cdot (b_{max} - b_{min})$$

errechnete Gitterpunkte

Mit den Fehlern: $\Delta b := 4mm$ $\quad \Delta g := 2mm$ folgt für den absoluten Fehler in der Brennweite:
(Δg ergibt sich aus den Ablesefehlern von G (1 mm) und L (1 mm).
Der Fehler ist bei der Bildweite größer, da das subjektive
Schärfeempfinden eine Rolle spielt) Siehe unten (Messaufbau)

$$Fehler_{absolut_{i,j}} := \Delta f(g_i, b_j, \Delta g, \Delta b)$$

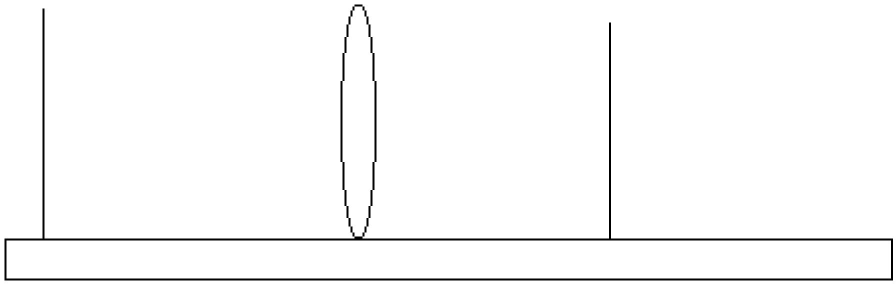
Ausgabematrix für 3-D-Plot



$Fehler_{absolut}$

Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass Ergebnisse mit geringen Fehlern (dunkler Bereich) dann gelingen, wenn b etwas kleiner als g ist (in Abhängigkeit von Δb und Δg).

Zur Messung (schematischer Aufbau):



Gegenstand (G) Linse (L) Bild (B)
optische Bank mit Messleiste
g = L - G b = B - L

Messergebnisse (M) von Schülern aus einer Exceltabelle eingelesen:

Mess :=
schmh_Messwerte.xls

Lesebereich mit rechter Maustaste/ Eigenschaften bestimmt werden

Mess =

	0	1	2
0	16	30	46
1	16	29	46
2	16	28	48
3	16	31	46
4	16	32	46
5	16	33	46

1. Spalte....Ort des Gegenstandes

2. Spalte....Ort der Linse

3. Spalte....Ort des Bildes

alle Ergebnisse in cm

$g := \left(Mess^{\langle 1\rangle} - Mess^{\langle 0\rangle}\right)\cdot cm$ $b := \left(Mess^{\langle 2\rangle} - Mess^{\langle 1\rangle}\right)\cdot cm$ $n := 0 .. \text{länge}(g) - 1$ Anzahl der Messergebnisse

$f_n := \frac{g_n \cdot b_n}{g_n + b_n}$ errechnete Brennweiten

$\text{mittelwert}(f) = 74.21\,mm$ Mittelwert der Brennweiten

$\Delta F_n := \Delta f\left(g_n, b_n, \Delta g, \Delta b\right)$ Größtfehler jeder Messung

$\max(\Delta F) = 1.94\,mm$ max. Größtfehler der Messung

Zur Kontrolle wird aus den Messpaaren (1/b, 1/g) die Regressionsgerade ermittelt, denn mit **1/b = -1/g +1/f**
1/b...y
1/g...x
k...-1
d...1/f

folgt, dass a) die Steigung -1 sein soll (die Regressionsgerade ist genau jene Gerade, bei der die Abweichungen durch zufällige Fehler minimal sind);

und

b) die aus 1/d bestimmte Brennweite dem Mittelwert(f) entsprechen sollte.

Achtung: Gilt nur, wenn b und g ungefähr gleich groß sind, da ansonsten die Abweichungen durch die Transformation (1/g und 1/b) nicht mehr symmetrisch sind (scheinbarer systematischer Fehler).

$x_n := \frac{1}{g_n}$ $\qquad$ $y_n := \frac{1}{b_n}$

$\frac{1}{\mathrm{achsenabschn}(x, y)} = 71.1\,\mathrm{mm}$ $\qquad$ $\mathrm{neigung}(x, y) = -1.092$

engl. neigung = slope
achsenabschn = intercept

Die großen Abweichungen deuten auf einen systematischen Fehler hin!!!

Mögliche Erklärungen:

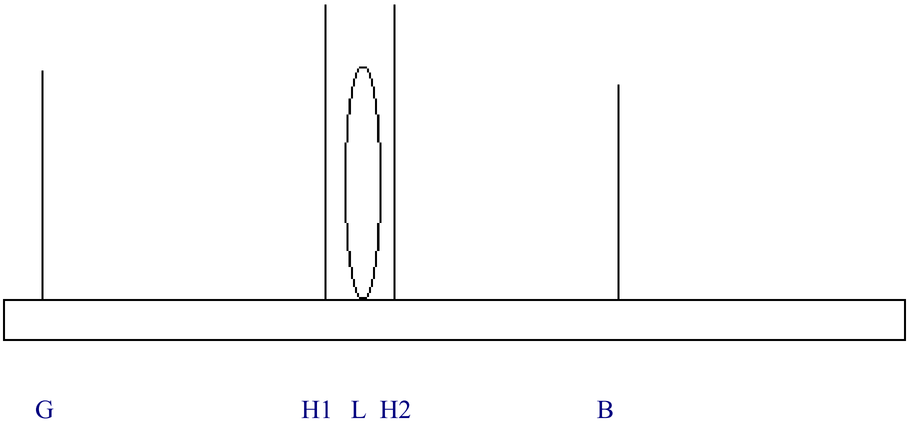
a) Die Gegenstandsweite g bzw. die Bildweite b sind nur bei dünnen Linsen gleich dem Abstand Gegenstand-Linse bzw. Bild-Linse. Bei dicken Linsen[1] muss der Abstand zwischen Gegenstand (Bild) und der Hauptebene zur Bestimmung von g bzw. b ermittelt werden. D.h., dass die gemessenen Werte um x bzw. y von g und b abweichen.

und/oder

b) Die Markierungen der opt. Reiter entsprechen nicht den wahren Orten von G, B, oder L (sytematischer Messfehler)

1)
Anmerkung: Dünne Linsen sind per Definition Linsen, bei denen die Strahlen durch den Mittelpunkt keine Brechung/Verschiebung erfahren. Bei dicken Linsen ist dies schon der Fall (siehe Parallelverschiebung durch eine planparallele Platte); diesen Effekt wird durch die Einführung der beiden Hauptebenen Rechnung getragen.Oftmals wird die Länge Hauptebene-Brennpunkt auch Gauß´sche Brennweite bezeichnet.

Um dennoch für beide Fälle Lösungen zu erhalten, erfolgt nun die folgende Überlegung:



wobei x = L - H1 und y = H2 -L ist.

Jetzt sollen die neuen Gegenstands- und Bildweiten bestimmt werden.Und zwar mit:

$B_{neu} = b_{alt} - yy$ $\qquad$ $B(yy) := b - yy$

$G_{neu} = g_{alt} - xx$ $\qquad$ $G(xx) := g - xx$

$xx := 0\mathrm{mm}$

Startwerte für die Abweichungen (für den Lösungsblock erforderlich)

$yy := 0\mathrm{mm}$

$CTOL := 10^{-18}$ Damit wird die Güte der Lösung von minfehl() bestimmt. [Je kleiner CTOL desto genauer; muss hier so klein sein, weil Mathcad intern mit Meter rechnet und die Abweichungen sich in mm- bzw im mm^2-Bereich (bei der Berechnung der Geraden) bewegen]

Vorgabe

$$\text{neigung}\left(\frac{1}{G(xx)}, \frac{1}{B(yy)}\right) = -1$$

Die Steigung der Geraden soll den Wert -1 haben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \text{minfehl}(xx, yy)$$

Ergebnisse der Abweichungen: $x = 3.29\,\text{mm}$ $y = -3.24\,\text{mm}$

Das Ergebnis deutet auf einen **sytematischen Messfehler** hin, da bei symmetrischen Bi-Linsen (wie hier verwendet) die Hauptebenen ebenfalls symmetrisch liegen (und d.h., x = y)!!

Um zu überprüfen, ob die von MATHCAD ermittelten Werte physikalisch sinnvoll sind, erfolgt eine graphische Darstellung der korrigierten Messwerte und der Regressionsgeraden im Vergleich zur anfangs bestimmten Brennweite:

$G_n := g_n - x$ $B_n := b_n - y$

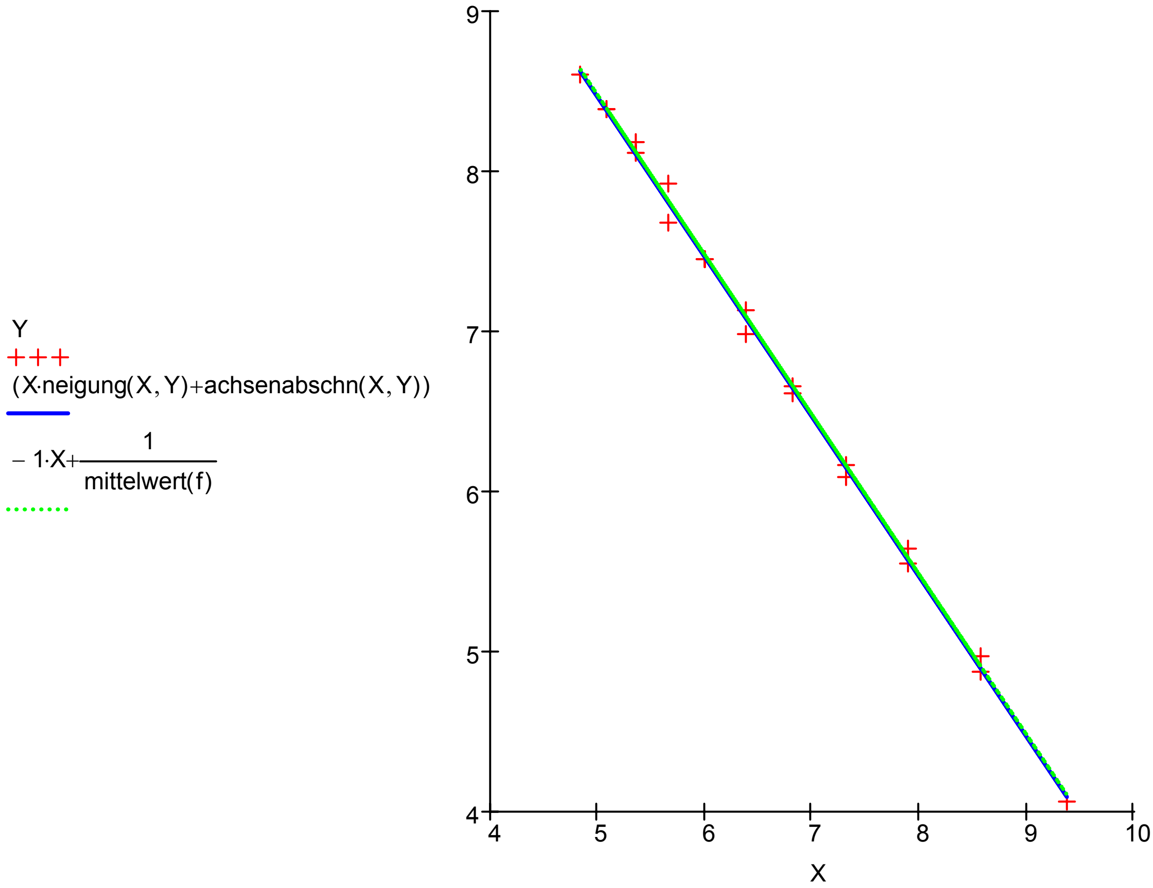
$X_n := \frac{1}{G_n}$ $Y_n := \frac{1}{B_n}$

$f_{gauß} := \frac{1}{\text{achsenabschn}(X, Y)}$

$\text{neigung}(X, Y) = -0.999999972195$

Ist schon besser!

Die blaue Linie sollte parallel zur Grünen sein.



Damit lautet das Ergebnis für die (Gauß'sche) Brennweite: $f_{gauß} = 74\,mm$

$$\begin{pmatrix} f_{oben} \\ f_{unten} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_{gauß} + max(\Delta F) \\ f_{gauß} - max(\Delta F) \end{pmatrix}$$ Bestimmung des Fehlerbereiches

Innerhalb des Bereiches: $\begin{pmatrix} f_{oben} \\ f_{unten} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \\ 72 \end{pmatrix} mm$

Mit dem systematischen Messfehler in g: $x = 3.3\,mm$

Mit dem systematischen Messfehler in b: $y = -3.2\,mm$

Anmerkungen: In diesem Fall hat sich der systematische Messfehler nur geringfügig auf das Ergebnis (Brennweite) ausgewirkt.
Die Ursache dürfte ein Messfehler in der Ortsbestimmung der Linse sein (weil: (x + y) ist ungefähr gleich 0).

> Bei Messfehlern in G (bzw. B) ist x>>y (bzw. umgekehrt).
> Und bei einer dicken Bi-Linse mit beträchtlichem Hauptebenenabstand gilt: x ist ungefähr gleich y.
> Die Lage der Hauptebenen wird in der Praxis mit "Methode nach BESSEL" bestimmt.