

Schmidhuber Heinrich heinrich_schmidhuber@hotmail.com

Bestimmen der Abstrahlcharakteristik eines Schwarzen Strahlers

[Link zur Beispielsübersicht](#)



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**
Transformation von Messwerten, Einlesen von Daten
- **Kurzzusammenfassung**
Messwerte die von einem Sensor, dessen relative Sensibilität bekannt ist, sollen auf absolute Werte umgerechnet werden.
- **Lehrplanbezug**
Angew. Mathematik, 4.Jahrgang, Abteilung Mechatronik



Aufgabenstellung

Alkohol immer ein brisantes Thema

Die Gefahr Alkohol am Steuer verliert leider nie an Aktualität. Im Jahr 2003 ereigneten sich um 3,8 Prozent mehr Alkoholunfälle als im Jahr davor. Bei 2.841 Unfällen (plus 3,8%) wurden 4.020 (plus 3,1%) Menschen verletzt und 84 (minus 8,7%) getötet. Ganz zu Schweigen von der Dunkelziffer im Bereich der Alkoholunfälle, die nach wie vor sehr hoch ist. (Quelle BEV)

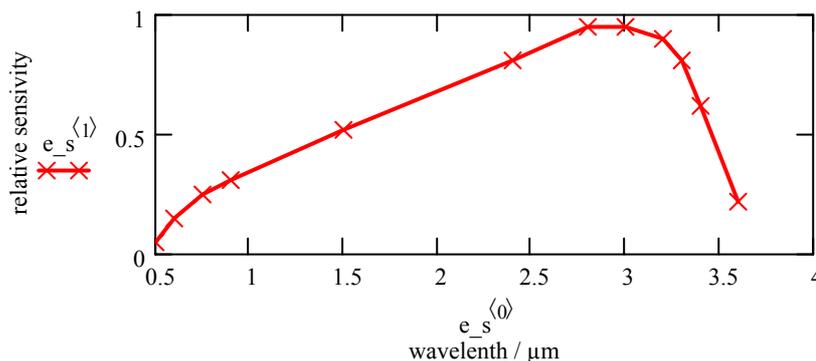
Da der Gesetzesgeber in Österreich ein eigenen Grenzwert für die Atemalkoholkonzentration (AAK max. 0,25 mg/l) beschlossen hat, ist keine Umrechnung auf Blutalkoholkonzentration (BAK max. 0.5 ‰) notwendig. Daher sind die Anforderungen an die in Österreich verwendenden Geräte äußerst hoch, denn die Ergebnisse müssen beweissicher sein!

Aus diesem Grund wird das **Absorptionsspektrum der Atemluft** gemessen (Ethanol hat im 9 Mikrometerbereich einen Absorptionskoeffizienten nahe 1)

Ein schwarzer Strahler, der in einem Alkomaten zum Einsatz kommen soll, wird mit einem Infrarotsensor ausgemessen. Der Sensor hat folgende spektrale Sensivität:

$e_s :=$	0.50 0.05
	0.60 0.15
	0.75 0.25
	0.90 0.31
	1.50 0.52
	2.40 0.81
	2.80 0.95
	3.00 0.95
	3.20 0.90
	3.30 0.81
	3.40 0.62
	3.60 0.22

Sensibilität des Sensors



Dabei erhält man die Messwerte, die in der Datei: **Messwerte Sensor.xls** abgespeichert sind.

Aufgabenstellungen:

- Die spektrale Sensibilität soll als stetige Funktion im Bereich [0,5 µm ; 3,6µm] angegeben werden.
- Es soll diejenige Wellenlänge bestimmt werden, bei der der Strahler die max. Leistung abgibt. (Ablesen aus der Wertetabelle) und dann daraus die Temperatur ermittelt werden. Wie vertrauenswürdig ist dieses Ergebnis? Begründen Sie.
- Weiters soll die Temperatur bestimmt werden, bei der das Maximum der Leistung bei 9 µm liegt.
- Begründen Sie, wieso ein schwarzer Strahler mit $\lambda_{max} = 9 \mu\text{m}$ nicht brauchbar wäre.

Tipp: $\lambda_{max} * T = 2,9 * 10^{-3} \text{ m} * \text{K}$

Einlesen und Umrechnen der Werte

A :=
messwerte Sensor.x Messwerte einlesen

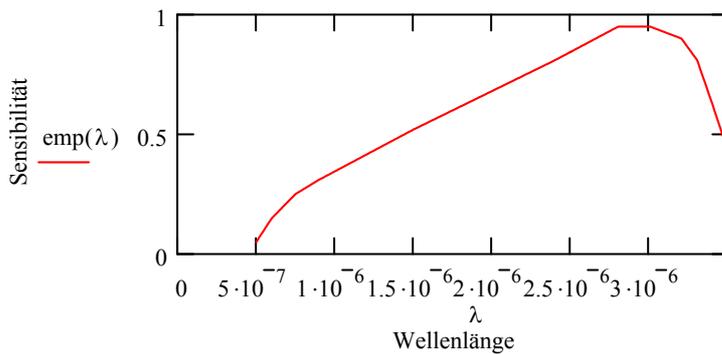
	0	1
173	2.26	3.25
174	2.27	3.29
175	2.28	3.34
176	2.29	3.39
177	2.3	3.43

Darstellung der relativen Sensibilität des Sensors als stetige Fkt.

$emp(\lambda) := \text{linterp}(e_s^{(0)} \cdot 10^{-6}, e_s^{(1)}, \lambda)$

Zwischen den Punkten linear interpolieren ist notwendig, da danach auch für Werte die zwischen den angegebenen Sensibilitätsdaten liegen, Absolutwerte ermittelt werden sollen

$\lambda := 0.5 \cdot 10^{-6}, 0.51 \cdot 10^{-6} .. 3.5 \cdot 10^{-6}$



$B := A^{(0)} \cdot 10^{-6}$ Notwendig für richtige Einheiten

$A_{\text{absolut}} := \frac{A^{(1)}}{emp(B)}$ $A(\lambda) := \frac{\text{linterp}(A^{(0)} \cdot 10^{-6}, A^{(1)}, \lambda)}{emp(\lambda)}$

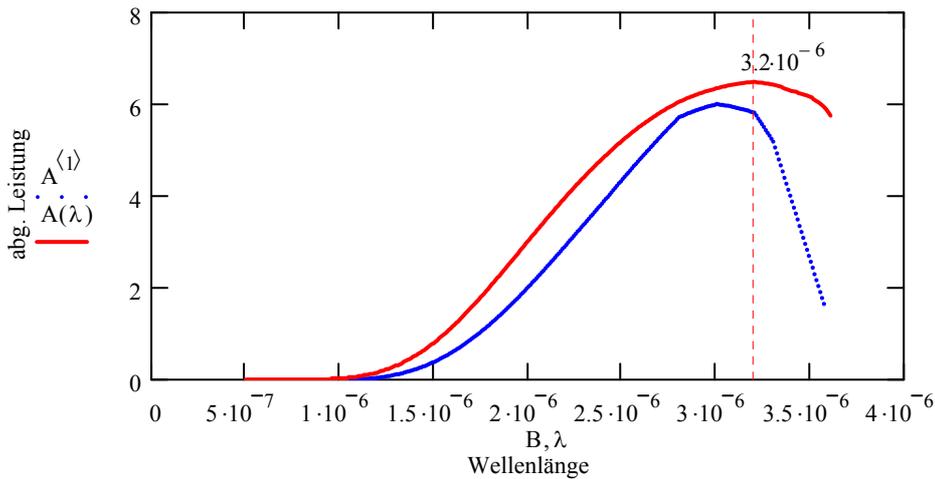
Werte um Sensorempfindlichkeit bereinigt
Einmal als Vektor und einmal als Funktion

Darstellung und Vergleich der Roh- mit den bereinigten Werten

$k := 1.381 \cdot 10^{-23}$ $c := 2.998 \cdot 10^8$ $h := 6.626 \cdot 10^{-34}$

$$P(\lambda) := \frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{k \cdot \lambda \cdot T}} - 1}$$
 Strahlungsgesetz von Planck

$\lambda := 10^{-6} \cdot 0.5, 0.51 \cdot 10^{-6} .. 3.61 \cdot 10^{-6}$



Vergleich der unbereinigten Messwerte(A) mit den bereinigten A_{absolut}. Das Maximum hat sich eindeutig verschoben.

Bestimme das Maximum

A_{absolut} =

	0
262	6.466
263	6.473
264	6.479
265	6.475
266	6.482
267	6.489
268	6.487
269	6.474
270	6.472
271	6.47
272	6.468
273	6.454
274	6.452

$\max(A_{\text{absolut}}) = 6.489$ Daher Maximum bei 649*10⁴

$$\lambda := 0$$

Vorgabe

Suchen der Wellenlänge beim Maximum

$$\max(A_{\text{absolut}}) = A(\lambda)$$

$$\lambda_{\max} := \text{minfehl}(\lambda) \quad \text{Keine Lösung mit dem "Suchen"-Befehl!!}$$

$$\lambda_{\max} = 3.17 \times 10^{-6} \quad \text{in m}$$

$$\text{Es gilt } \lambda_{\max} \cdot T = 2,9 \cdot 10^{-3}$$

$$T_1 := \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{\lambda_{\max}}$$

$T_1 = 914.709$ in Kelvin d. h., dass der Strahler der in den Alkomaten verwendet wird, eine Temperatur von 914 Kelvin hat.

Das Ergebnis ist durchaus vertrauenswürdig, da gerade im Bereich der maximalen Energieabgabe der Sensor eine sehr große Empfindlichkeit besitzt (leider ist diese nicht sehr genau angegeben). Doch die Abstrahlcharakteristik entspricht außerdem genau der des Schwarzen Strahlers (siehe Erläuterung unten: War nicht Bestandteil der Matura!!).

Temperaturbestimmung bei $\lambda_{\max} = 9\mu\text{m}$

$$\lambda_{\max} := 9 \cdot 10^{-6}$$

$$T_2 := \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{\lambda_{\max}}$$

$T_2 = 322.222$ Das ergibt eine Temperatur von ca. 50°C !!! Die dabei abgegebene Strahlleistung ist zwar bei $9\mu\text{m}$ maximal, aber äußerst gering. Gesamtleistung ist proportional zu T^4 !!!! Daher ist es sinnvoller bei einer höheren Temperatur nur den Bereich bei $9\mu\text{m}$ zu verwenden (indem man den Rest z.B. ausblendet).

Erläuterung / nicht Teil der Maturaufgabe

$$F := 0.75 \cdot 10^{-9}$$

Fläche

$$k := 1.381 \cdot 10^{-23}$$

Boltzman Konstante

$$h := 6.626 \cdot 10^{-34}$$

Planck-Konstante

$$c := 2.998 \cdot 10^8$$

Lichtgeschwindigkeit

$$T := 914$$

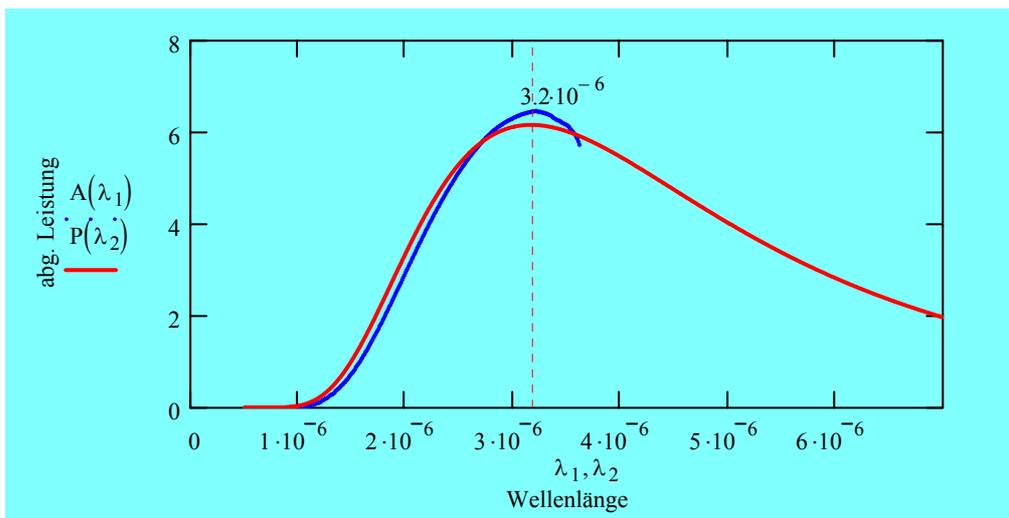
Temperatur

$$P(\lambda) := \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{F}{\frac{hc}{e^{k\lambda \cdot T} - 1}}$$

Leistung, abgestrahlt im Intervall λ bis $\lambda+d\lambda$
(Strahlungsgesetz von Planck)

$$\lambda_1 := 10^{-6} \cdot 0.5, 0.51 \cdot 10^{-6} \dots 3.61 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda_2 := 10^{-6} \cdot 0.5, 0.51 \cdot 10^{-6} \dots 7 \cdot 10^{-6}$$



Der Vergleich zeigt eine gute Übereinstimmung des theoretische Verlaufes mit den bereinigten Werten!

[Link zur Beispielsübersicht](#)