Simulationsmodelle

Bezeichnungen

Das Eingangssignal des Systems wird mit *in*(t), das Ausgangssignal mit *out*(t) bezeichnet. Der Zeitschritt bei der Diskretisierung ist Δt.

PT$_1$-System

Systemgleichung (Differenzialgleichung) eines PT$_1$-Systems:

$$T \cdot \frac{dout(t)}{dt} + out(t) = K \cdot in(t) \qquad \rightarrow \qquad \frac{dout(t)}{dt} = \frac{K \cdot in(t) - out(t)}{T}$$

Zur Diskretisierung der Differenzialgleichung wird die Taylorreihe nach dem quadratischen Term abgebrochen:

$$out(t + \Delta t) \approx out(t) + \Delta t \cdot \frac{dout(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{d^2 out(t)}{dt^2}$$

Die Zeitpunkte t bzw. $t + \Delta t$ werden zu $n \cdot \Delta t$ bzw. $(n + 1) \cdot \Delta t$:

$$\begin{aligned} out(t) \quad &\rightarrow \quad out(n \cdot \Delta t) \quad \text{bzw. kurz} \quad out_n \\ out(t + \Delta t) \quad &\rightarrow \quad out((n+1) \cdot \Delta t) \quad \text{bzw. kurz} \quad out_{n+1} \end{aligned}$$

Die erste Ableitung in der Taylorformel wird durch $\frac{K \cdot in(t) - out(t)}{T}$ (siehe oben!) ersetzt, die zweite Ableitung wird als Differenzenquotient der ersten Ableitung eingebaut:

$$\begin{aligned} out_{n+1} &= out_n + \Delta t \cdot \frac{K \cdot in_n - out_n}{T} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\frac{K \cdot in_n - out_n}{T} - \frac{K \cdot in_{n-1} - out_{n-1}}{T}}{\Delta t} \\ &= out_n + \Delta t \cdot \frac{K \cdot in_n - out_n}{T} + \frac{\Delta t}{2T} \cdot ((K \cdot in_n - out_n) - (K \cdot in_{n-1} - out_{n-1})) \end{aligned}$$

PT$_2$-System

Laplace-Übertragungsfunktion eines nicht schwingungsfähigen (2 reelle Polstellen der Übertragungsfunktion) PT$_2$-Systems:

$$H(s) = \frac{K}{(1 + s \cdot T_1) \cdot (1 + s \cdot T_2)}$$

Die zugehörige Differenzialgleichung ist

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 out(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dout(t)}{dt} + out(t) = K \cdot in(t)$$

Hier werden die Ableitungen lediglich durch Differenzenquotienten ersetzt:

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{\frac{out_{n+1} - out_n}{\Delta t} - \frac{out_n - out_{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t} + (T_1 + T_2)\frac{out_{n+1} - out_n}{\Delta t} + out_n = K \cdot in_n$$

Auflösen dieser Gleichung nach out_{n+1} liefert die Rekursionsformel

$$out_{n+1} = out_n + \frac{K \cdot \Delta t^2 \cdot in_n + out_n \cdot (T_1 \cdot T_2 - \Delta t^2) - T_1 \cdot T_2 \cdot out_{n-1}}{(T_1 + T_2) \cdot \Delta t + T_1 \cdot T_2}$$

Totzeitglied

Ein Totzeitglied verzögert das Eingangssignal um die Totzeit Tt. Seine Systemgleichung lautet daher

$$out(t) = in(t - Tt)$$

In der diskretisierten Version bedeutet dies eine Indexverschiebung um $floor\left(\frac{Tt}{\Delta t}\right)$:

$$out_n = in_{n - floor\left(\frac{Tt}{\Delta t}\right)}$$

Die Funktion *floor* sorgt für einen ganzzahligen Index. Die dynamische Entwicklung des Systems verlangt auch hier, einen Schritt in die Zukunft zu rechnen, daher

$$out_{n+1} = in_{n - floor\left(\frac{Tt}{\Delta t}\right)}.$$

P-Regler

Der P-Regler ist ein einfacher Proportionalverstärker:

$$out(t) = K \cdot in(t)$$

Entsprechend der letzten Bemerkung von vorher müssen wir schreiben:

$$out_{n+1} = K \cdot in_n$$

I-Regler

Der I-Regler integriert das Eingangssignal:

$$out(t) = \frac{1}{Ti} \cdot \int_0^t in(t')dt'$$

Die Schreibweise mit der Konstanten Ti ist regelungstechnische Konvention.
Bei der Diskretisierung wird aus dem Integral eine Summe

$$out_{n+1} = \frac{\Delta t}{Ti} \cdot \sum_{k=0}^{n} in_k$$

Numerisch wäre es sehr ungünstig, diese Gleichung direkt zu implementieren, da die Summe mit zunehmender Zeit immer länger wird. Außerdem sind vorhergehende Summen in der aktuellen Summe enthalten. Man schreibt das Ergebnis daher rekursiv und addiert jeweils nur den neu hinzukommenden Teil. Subtraktion der beiden Seiten der folgenden Gleichungen

$$out_{n+1} = \frac{\Delta t}{Ti} \cdot \sum_{k=0}^{n} in_k$$

$$out_n = \frac{\Delta t}{Ti} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} in_k$$

ergibt nämlich

$$out_{n+1} - out_n = \frac{\Delta t}{Ti} \cdot in_n$$

und weiter

$$out_{n+1} = out_n + \frac{\Delta t}{Ti} \cdot in_n$$

PI-Regler

Der PI-Regler reagiert auf das Eingangssignal proportional verstärkend und integrierend:

$$out(t) = K \cdot \left(in(t) + \frac{1}{Ti} \cdot \int_0^t in(t')dt' \right)$$

Die Schreibweise mit den beiden Konstanten *K* und *Ti* ist wieder regelungstechnische Konvention.
Diskretisierung des Integrals:

$$out_{n+1} = K \cdot \left(in_n + \frac{\Delta t}{Ti} \cdot \sum_{k=0}^{n} in_k \right).$$

Ähnlich wie oben ergibt sich hier

$$out_{n+1} - out_n = K \cdot (in_n - in_{n-1}) + \frac{\Delta t}{T} \cdot in_n$$

$$out_{n+1} = out_n + K \cdot (in_n - in_{n-1}) + \frac{\Delta t}{T} \cdot in_n$$

PD-Regler

Der PD-Regler verstärkt und differenziert das Eingangssignal:

$$out(t) = K \cdot \left(in(t) + Td \cdot \frac{din(t)}{dt} \right)$$

Die Ableitung wird bei der Diskretisierung zum Differenzenquotienten

$$out_{n+1} = K \cdot \left(in_n + Td \cdot \frac{in_n - in_{n-1}}{\Delta t} \right).$$

PID-Regler

Hier wird das Eingangssignal verstärkt, integriert und differenziert:

$$out(t) = K \cdot \left(in(t) + \frac{1}{Ti} \cdot \int_0^t in(t')dt' + Td \cdot \frac{din(t)}{dt} \right)$$

Die Subtraktion von

$$out_{n+1} = K \cdot \left(in_n + \frac{\Delta t}{Ti} \cdot \sum_{k=0}^{n} in_k + Td \cdot \frac{in_n - in_{n-1}}{\Delta t} \right)$$

und

$$out_n = K \cdot \left(in_{n-1} + \frac{\Delta t}{Ti} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} in_k + Td \cdot \frac{in_{n-1} - in_{n-2}}{\Delta t} \right)$$

führt uns schließlich auf die Rekursionsformel

$$out_{n+1} = out_n + K \cdot \left(in_n - in_{n-1} + \frac{\Delta t}{Ti} \cdot in_n + Td \cdot \frac{in_n - 2in_{n-2} + in_{n-2}}{\Delta t} \right)$$