



Robert Salvador

salvador@htlinn.ac.at

Frequenzmodulation



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**

Modulation, Demodulation, Phase, Frequenz, Spektralanalyse, Filterung

- **Kurzzusammenfassung**

Dies ist der zweite von zwei Artikeln über Modulationsverfahren. In der ersten Arbeit (Amplitudenmodulation, AM) werden u. a. einige grundlegende Begriffe geklärt, die zum Teil auch in diesem Artikel eine Rolle spielen. Voraussetzung für das Verständnis der Frequenzmodulation (FM) sind die Begriffe Phase und Frequenz. Nach Klärung dieses Zusammenhanges geht es um den spektralen Inhalt eines frequenzmodulierten Signals, den Modulationsvorgang und schließlich die Rückgewinnung des zu übertragenden Signals, die Demodulation. Auch in dieser Arbeit werden praktisch ausschließlich mathematische und grundlagentechnische Aspekte behandelt bzw. demonstriert. Auf technische Einzelheiten wird nicht näher eingegangen.

Der Aufbau des MATHCAD-Dokumentes orientiert sich absichtlich sehr stark an der Arbeit über AM weil dadurch ein besserer Vergleich der beiden Modulationsverfahren (bezüglich Methoden und Eigenschaften) möglich ist.

- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**

Theoretische und praktische Fächer der Nachrichten- bzw. Kommunikationstechnik, 4./5.Jahrgang

- **Mathcad-Version:**

Mathcad 2001 (erst ab dieser Version stehen die Schieberegler zur Verfügung)

- **Literaturangaben:**

- [1] Geißler R., Kammerloher W., Schneider H. W.: Berechnungs- und Entwurfsverfahren der Hochfrequenztechnik 1, Vieweg
- [2] Fettweis A.: Elemente nachrichtentechnischer Systeme, Teubner
- [3] Young P. H.: Electronic Communication Techniques, Merrill



INHALT (gewünschten Bereich anklicken!):

- **Allgemeines, Phase und Frequenz** Grundlegende Begriffe
- **Signale und Spektren** Modulationssignal und Trägersignal, Spektralanalyse
- **Modulationsvorgang** Spannungssteuerung einer Oszillatorfrequenz
- **Demodulation** FM/AM-Wandler als Teil des Demodulationsverfahren

Allgemeines, Phase und Frequenz**[zurück zum Inhalt](#)**

Bei der FM geht es zunächst (genauso wie bei der AM) darum, ein niederfrequentes Signal (NF-Signal, Modulationssignal) einem hochfrequenten Signal (HF-Signal, Trägersignal) aufzuprägen, dieses modulierte Trägersignal zu übertragen (Freiraum, Kabel) und am Empfangsort das niederfrequente Signal (z. B. Sprache, Musik) zurückzugewinnen. Im Unterschied zur AM wird bei der FM jedoch nicht die Amplitude des Trägersignals beeinflusst, sondern - wie aus der Bezeichnung schon hervorgeht - seine Frequenz. Das bedeutet: die Frequenz des als sinusförmig vorausgesetzten Trägers soll sich nach der Modulation im Rhythmus des NF-Signals ändern. FM-Signale sind weniger empfindlich gegenüber Rauschen als AM-Signale, da Rauschen in erster Linie die Amplitude beeinflusst und nicht die Phase bzw. Frequenz.

Bei einer Sinusschwingung $\sin(\omega \cdot t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = \sin(\varphi(t))$ mit konstanter Frequenz f ist der Zusammenhang zwischen der Phase $\varphi(t)$ und Frequenz f besonders einfach: $\omega = \frac{\varphi(t)}{t}$ bzw. $f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\varphi(t)}{t}$. Bei nicht konstanter

Frequenz muss - ähnlich wie in anderen physikalisch-technischen Situationen (man denke etwa an $v = \frac{s}{t}$) - der Quotient

$\frac{\varphi(t)}{t}$ ersetzt werden durch den Differenzialquotienten $\frac{d}{dt}\varphi(t)$. Damit lautet die allgemeine Beziehung zwischen Phase

und Frequenz: $\omega(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$ bzw. $f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{d}{dt}\varphi(t)$.

Signale und Spektren**[zurück zum Inhalt](#)**

Wir betrachten nur den einfachen Fall eines sinusförmigen modulierenden NF-Signals. In der Realität ist das Verhältnis von Trägerfrequenz zu maximaler Signalfrequenz viel größer als in den vorgestellten Beispielen. Beim UKW-Rundfunk beispielsweise liegt die Trägerfrequenz in der Größenordnung von 100 MHz, die NF-Frequenz bei maximal etwa 20 kHz.

Modulierendes NF-Signal: $x_{NF}(t, \omega_{NF}) := \cos(\omega_{NF} \cdot t)$

Dazu definieren wir eine Phase $\varphi(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) := \omega_T \cdot t + M \cdot \omega_{NF} \cdot \int_0^t x_{NF}(\tau, \omega_{NF}) d\tau$ so, dass wir wegen

der oben besprochenen Frequenzdefinition über die Ableitung der Phase eine Frequenz erhalten, die um die Trägerfrequenz ω_T als Frequenzmitte im Rhythmus des NF-Signals schwankt. M ist der Modulationsindex; er entspricht dem Phasenhub, wie die folgende symbolische Auswertung zeigt:

$$\varphi(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) \rightarrow \omega_T \cdot t + M \cdot \sin(t \cdot \omega_{NF})$$

Berechnung der zeitabhängigen Frequenz:

$$f(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) := \frac{\frac{d}{dt}\varphi(t, \omega_T, \omega_{NF}, M)}{2 \cdot \pi}$$

$$f(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(\omega_T + M \cdot \cos(t \cdot \omega_{NF}) \cdot \omega_{NF})}{\pi}$$

Die Frequenz schwingt also - wie gewünscht - proportional zum NF-Signal um die Trägerfrequenz $f_T = \frac{\omega_T}{2 \cdot \pi}$ mit der

Amplitude $\Delta f = M \cdot f_{NF}$. Das frequenzmodulierte Signal sei nun eine cos-Schwingung mit der oben definierten Phase:

$$x_{FM}(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) := \cos(\varphi(t, \omega_T, \omega_{NF}, M))$$

$$x_{FM}(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) \rightarrow \cos(\omega_T \cdot t + M \cdot \sin(t \cdot \omega_{NF}))$$

Im folgenden werden drei Signale dargestellt: das NF-Signal, der Träger und das modulierte Signal (der Modulationsindex kann über einen Schieberegler zwischen 0 und 10 eingestellt werden):

$f_T := 50$

$f_{NF} := 3$

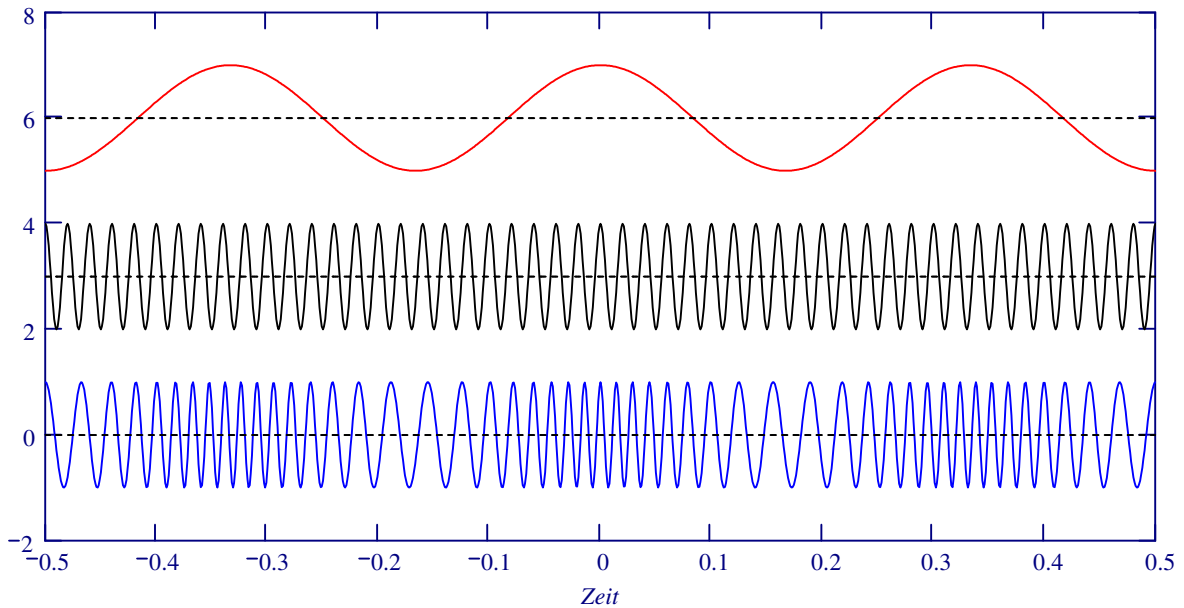
$\omega_T := 2 \cdot \pi \cdot f_T$

$\omega_{NF} := 2 \cdot \pi \cdot f_{NF}$

$M :=$

$M = 6.8$

$t := -0.5, -0.5 + 0.001.. 0.5$



- Niederfrequentes Modulationssignal
- - - mit zugehöriger Nulllinie
- Hochfrequentes Trägersignal
- - - mit Nulllinie
- Moduliertes Signal
- - - mit Nulllinie

Die Berechnung des Spektrums ist bei einem frequenzmodulierten Signals wesentlich anspruchsvoller als bei einem amplitudenmodulierten. Sehen wir uns das oben definierte Signal genauer an!

$$x_{FM}(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) = \cos(\phi(t, \omega_T, \omega_{NF}, M)) = \cos(\omega_T \cdot t + M \cdot \sin(t \cdot \omega_{NF}))$$

Dafür kann man auch schreiben

$$\cos(\omega_T \cdot t + M \cdot \sin(\omega_{NF} \cdot t)) = \text{Re} \left[e^{j(\omega_T \cdot t + M \cdot \sin(\omega_{NF} \cdot t))} \right] = \text{Re} \left(e^{j \cdot \omega_T \cdot t} \cdot e^{j \cdot M \cdot \sin(\omega_{NF} \cdot t)} \right)$$

$e^{j \cdot M \cdot \sin(\omega_{NF} \cdot t)}$ ist periodisch mit der Grundfrequenz ω_{NF} und der Periodendauer $T_{NF} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_{NF}}$ und kann daher

wie folgt in eine zeitliche Fourierreihe

$$e^{j \cdot M \cdot \sin(\omega_{NF} \cdot t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_{NF} \cdot t}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T_{NF}} \cdot \int_{-T_{NF}}^{T_{NF}} e^{j \cdot M \cdot \sin(\omega_{NF} \cdot t)} \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_{NF} \cdot t} dt = \frac{\omega_{NF}}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{\omega_{NF}}}^{\frac{\pi}{\omega_{NF}}} e^{j \cdot (M \cdot \sin(\omega_{NF} \cdot t) - n \cdot \omega_{NF} \cdot t)} dt$$

entwickelt werden, welche ihrerseits vom Modulationsindex M abhängen. .

Mit der Substitution $z = \omega_{NF} \cdot t$ ($dt = \frac{dz}{\omega_{NF}}$) wird daraus

$$c_n(M) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{j \cdot (M \cdot \sin(z) - n \cdot z)} dz \quad \text{bzw.}$$

$$c_n(M) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(M \cdot \sin(z) - n \cdot z) dz + \frac{j}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(M \cdot \sin(z) - n \cdot z) dz$$

Der erste Integrand ist gerade in z , der zweite ungerade. Deshalb kann man die Fourierkoeffizienten kürzer so schreiben:

$$c_n(M) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos(M \cdot \sin(z) - n \cdot z) dz$$

Das ist aber eine der Integraldarstellungen der Besselfunktionen 1. Art $J_n(M)$:

$$c_n(M) = J_n(M) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos(M \cdot \sin(z) - n \cdot z) dz$$

In MATHCAD sind diese Funktionen implementiert in der Schreibweise $J_n(n, x)$ mit $0 \leq n \leq 100$.

Zusammenfassend können wir daher schreiben

$$\cos(\omega_T \cdot t + M \cdot \sin(\omega_{NF} \cdot t)) = \operatorname{Re} \left(e^{j \cdot \omega_T \cdot t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(n, M) \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_{NF} \cdot t} \right)$$

$$\cos(\omega_T \cdot t + M \cdot \sin(\omega_{NF} \cdot t)) = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(n, M) \cdot e^{j \cdot (\omega_T + n \cdot \omega_{NF}) \cdot t} \right]$$

oder (weil die Besselfunktionen reelle Funktionswerte haben)

$$x_{FM}(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) = \cos(\omega_T \cdot t + M \cdot \sin(\omega_{NF} \cdot t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(M) \cdot \cos[(\omega_T + n \cdot \omega_{NF}) \cdot t]$$

Mit der Eigenschaft $J_{-n}(M) = (-1)^n J_n(M)$ ($n \geq 0$) erhalten wir schließlich:

$$x_{FM}(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) = J_0(M) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) \dots$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} J_n(M) \cdot \cos[(\omega_T + n \cdot \omega_{NF}) \cdot t] \dots$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot J_n(M) \cdot \cos[(\omega_T - n \cdot \omega_{NF}) \cdot t]$$

Die (Kreis-)Frequenzen liegen also bei $\omega_T + n \cdot \omega_{NF}$ und $\omega_T - n \cdot \omega_{NF}$ ($n \geq 0$ ganzzahlig). Wegen der betragsmäßig gleich großen Koeffizienten der beiden entsprechenden Kosinusfunktionen erwartet man daher symmetrisch um ω_T liegende Spektrallinien. Dies ist jedoch nicht ganz korrekt, wenn man berücksichtigt, dass für großes n der Ausdruck $\omega_T - n \cdot \omega_{NF}$ durchaus negativ sein kann. Allerdings ist die Bandbreite des Spektrums in der Praxis kaum so groß!

Bevor das Spektrum dargestellt wird, soll noch erwähnt werden, dass das modulierte Signal x_{FM} im allgemeinen nicht periodisch ist und daher nicht in eine Fourierreihe entwickelt werden kann. Exakte Periodizität liegt z. B. vor, wenn das Verhältnis $\frac{\omega_T}{\omega_{NF}}$ ganzzahlig oder wenigstens rational ist.

Nun wird für die Frequenzwerte

$$f_T := 50$$

$$f_{NF} := 3$$

$$\omega_T := 2 \cdot \pi \cdot f_T$$

$$\omega_{NF} := 2 \cdot \pi \cdot f_{NF}$$

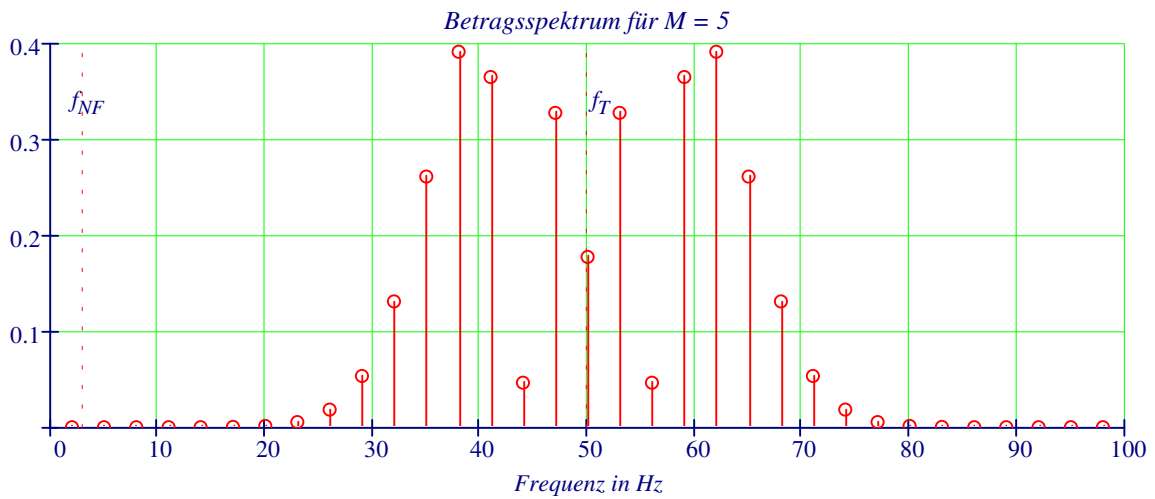
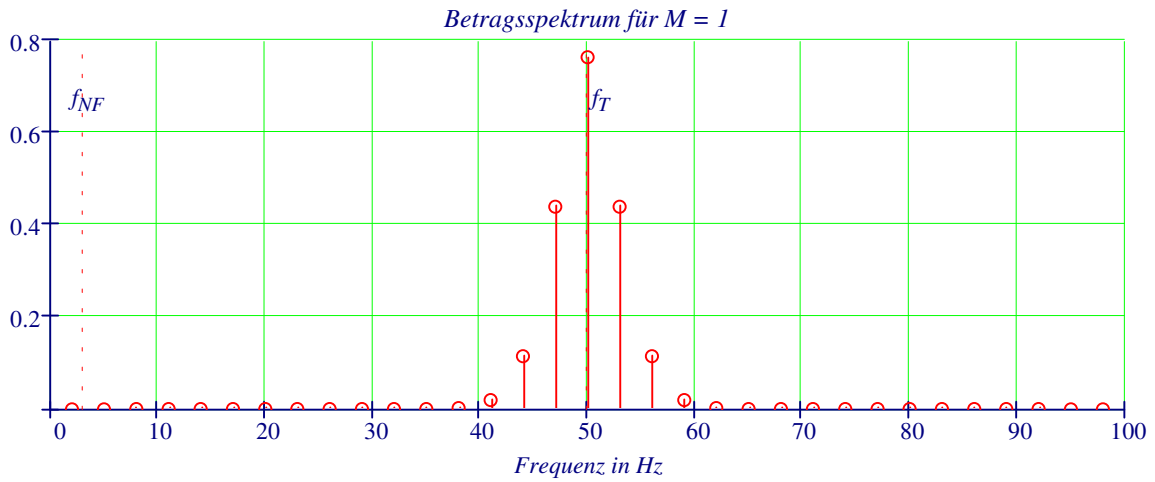
das Betragsspektrum berechnet und grafisch dargestellt; dazu wird (um Programmprobleme zu vermeiden) n in die Parameterliste aufgenommen und nicht als Index geschrieben:

$$c_{Bessel}(n, \omega_T, \omega_{NF}, M) := J_n(|n|, M)$$

$$N := 20$$

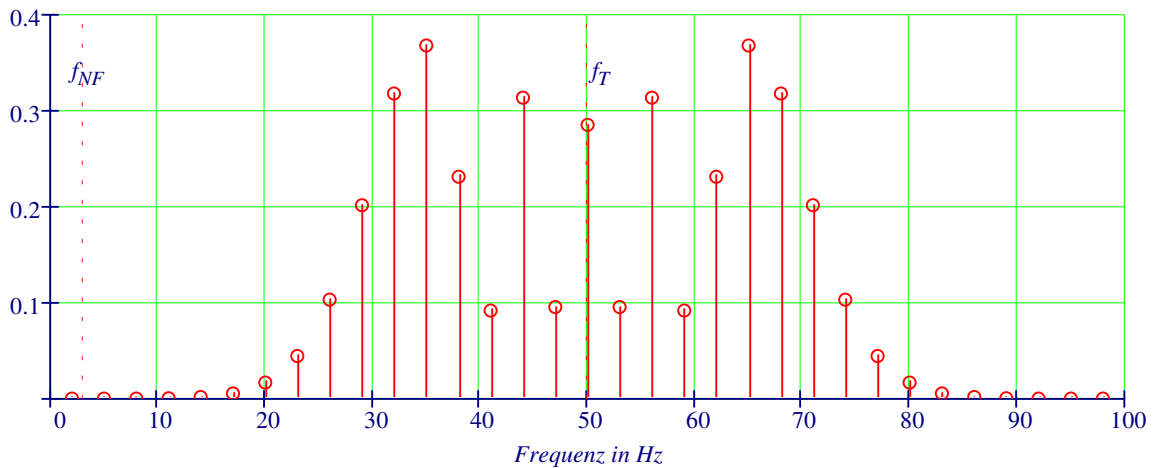
$$n := -N..N$$

Zum Demonstration, wie stark insbesondere die Breite des Spektrums bei sonst gleichen Bedingungen vom Modulationsindex M abhängt, werden zwei Fälle hervorgehoben:



Hier kann der Modulationsindex zwischen 0 und 10 eingestellt werden:

$M :=$ $M = 6.7$



Man bemerkt folgende wesentlichen spektralen Eigenschaften eines sinus-modulierten FM-Signals:
Es hat meist ein wesentlich breiteres Spektrum als ein AM-Spektrum (trotz der vorausgesetzten reinen Sinus-Modulation).

Die Breite des FM-Signal-Spektrums ist im Gegensatz zum AM-Fall abhängig vom Modulationsindex. Nur bei sehr kleinen Werten von M (bis maximal etwa 0.3) treten fast ausschließlich die gleichen Frequenzen ω_T , $\omega_T - \omega_{NF}$, $\omega_T + \omega_{NF}$ auf wie bei der AM.

Erinnern wir uns an die Frequenzfunktion von oben

$$f(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(\omega_T + M \cos(t \cdot \omega_{NF})) \cdot \omega_{NF}}{\pi}, \text{ dann leuchtet die erwähnte Abhängigkeit}$$

von M natürlich ein, weil $M \cdot f_{NF}$ offenbar die Amplitude der Frequenzänderung darstellt. Naiv geschätzt ist daher eine spektrale Breite von mindestens $B_1 := 2 \cdot M \cdot f_{NF}$ (bei den vorgegebenen Verhältnissen $f_T = 50$, $f_{NF} = 3$ und $M = 6.7$ ist das eine Breite von etwa $B_1 = 40$) mit der Frequenzmitte $f_T = 50$ zu erwarten. Die Darstellung oben zeigt aber, dass diese Überlegung die tatsächliche Breite des Spektrums unterschätzt. So führt eine genauere Betrachtung der Besselfunktionen etwa zu einer Bandbreitenformel $B_2 := 2 \cdot (M + 2) \cdot f_{NF}$. Das bedeutet in unserem Beispiel: $B_2 = 52$. Die wesentlichen Teile des Spektrums liegen also etwa zwischen den Frequenzen

$$f_T - \frac{B_2}{2} = 24 \text{ und } f_T + \frac{B_2}{2} = 76 .$$

Wir veranschaulichen die letzten Bemerkungen zur Bandbreite durch Vergleich zweier Zeitsignale: einerseits wird das exakte Signal x_{FM} dargestellt, andererseits jenes Signal, das durch die Summe der cos-Funktionen mit den

Besselkoeffizienten gebildet wird. Dabei werden wir die Summe einmal bei der Frequenz $f_T \pm \frac{B_1}{2}$, einmal bei

$$f_T \pm \frac{B_2}{2} \text{ abbrechen:}$$

Zur Erinnerung noch einmal das frequenzmodulierte Signal

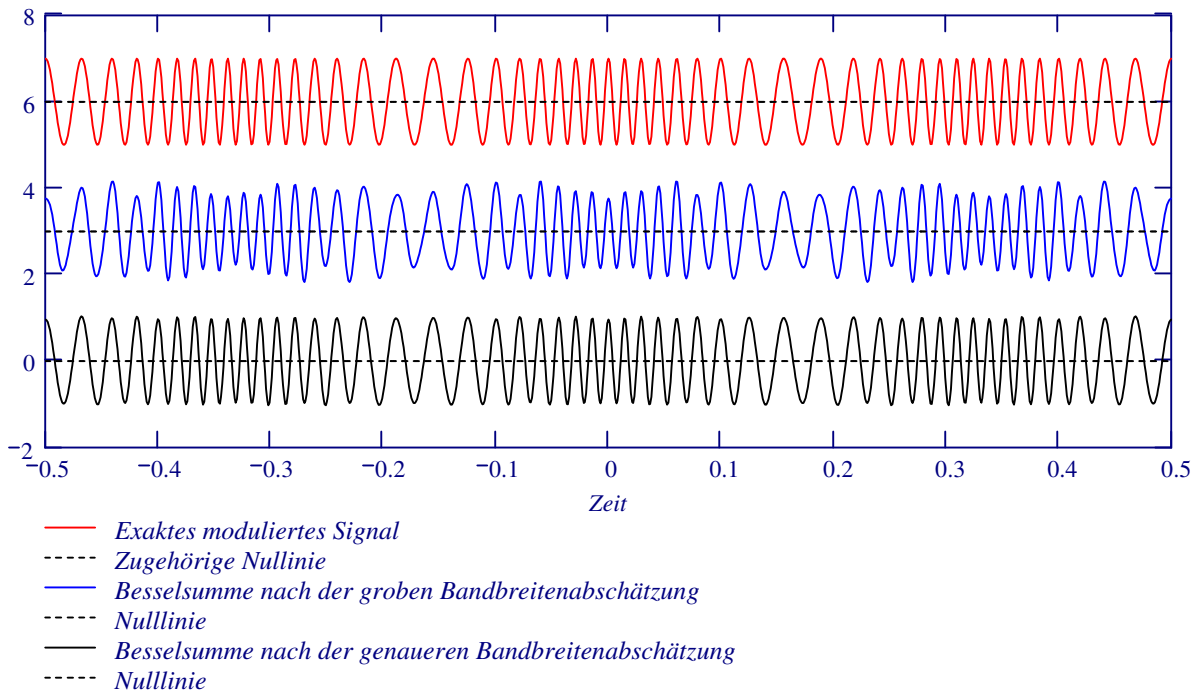
$$x_{FM}(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) := \cos(\omega_T \cdot t + M \cdot \sin(t \cdot \omega_{NF}))$$

und die Besselreihe (abgebrochen bei der variablen oberen Summationsgrenze N):

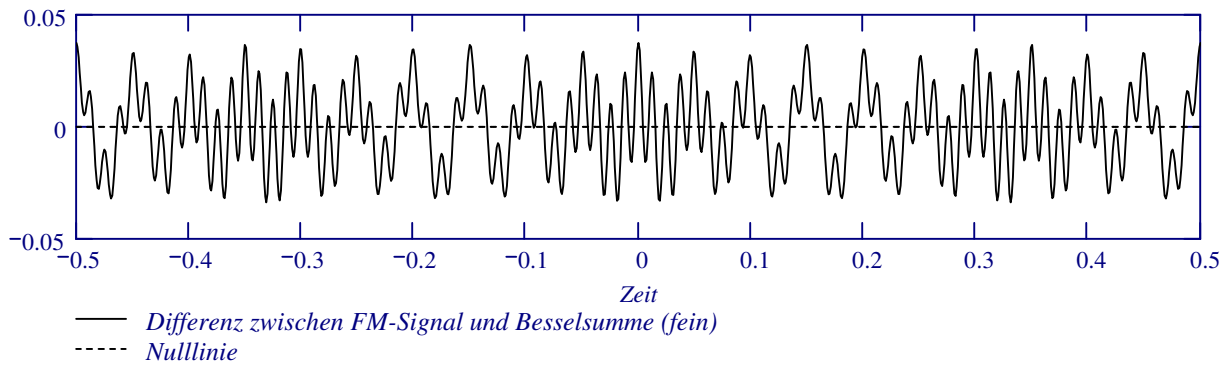
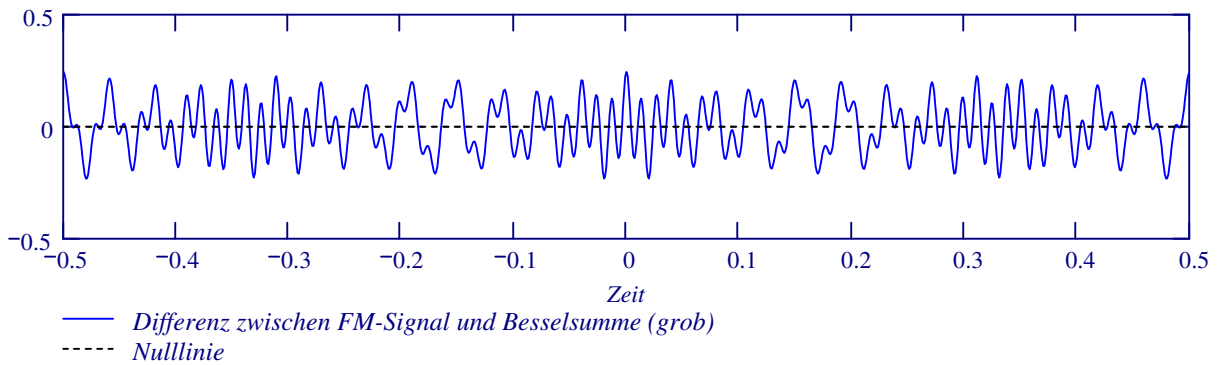
$$\begin{aligned} x_{FM_Bessel}(t, \omega_T, \omega_{NF}, M, N) &:= J_0(0, M) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) \dots \\ &+ \sum_{n=1}^N J_n(n, M) \cdot \cos[(\omega_T + n \cdot \omega_{NF}) \cdot t] \dots \\ &+ \sum_{n=1}^N (-1)^n \cdot J_n(n, M) \cdot \cos[(\omega_T - n \cdot \omega_{NF}) \cdot t] \end{aligned}$$

Setzen wir die Bandbreite B_1 voraus, brechen wir die Reihe bei $N_1 := \text{ceil}(M)$ ab; die Bandbreitenabschätzung mit B_2 führt auf $N_2 := \text{ceil}(M + 2)$. Die Summengrenzen sind im konkreten Fall $N_1 = 7$ und $N_2 = 9$:

$t := -0.5, -0.5 + 0.001.. 0.5$



Besser als beim direkten Vergleich der Zeitsignale sind Übereinstimmung bzw. Abweichung natürlich durch Differenzbildung erkennbar:

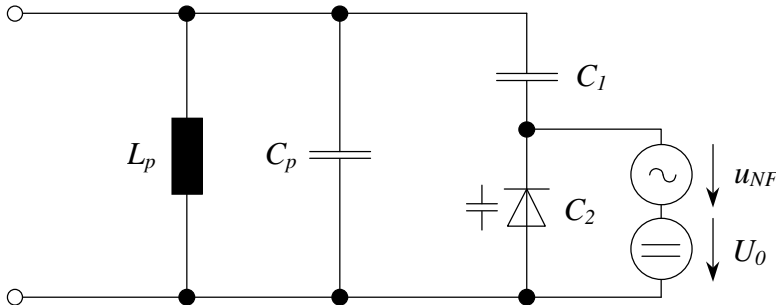


Was schon oben ein Blick auf das Spektrum erwarten ließ, wird bei Betrachtung der Differenzfunktionen bestätigt: die "naive" Bandbreitenabschätzung ist in der Tat viel schlechter als die detailliertere und in den meisten Fällen (außer eventuell bei kleinen Werten des Modulationsindex M) unzureichend.

Modulationsvorgang

[zurück zum Inhalt](#)

Konkret kann man bei der FM von einer schwingfähigen Schaltung ausgehen (z. B. einem Schwingkreis), deren Frequenz über ein spannungsabhängiges Bauteil von der Modulationsspannung (NF-Spannung) gesteuert wird. Dieses Bauteil kann z. B. eine Kapazitätsdiode sein, deren Kapazität einerseits von der angelegten Spannung abhängt und andererseits die Frequenz des Schwingkreises mitbestimmt:



Die vorliegende Schwingkreisschaltung ist der frequenzbestimmende Teil einer LC-Oszillatorschaltung. Die Frequenz kann wie folgt berechnet werden:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_p \cdot C_{ges}}}$$

wobei sich die Gesamtkapazität aus der Serienschaltung von C_1 und C_2 (Kapazitätsdiode), parallel zu C_p ergibt:

$$C_{ges} = C_p + \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_p \cdot (C_1 + C_2) + C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

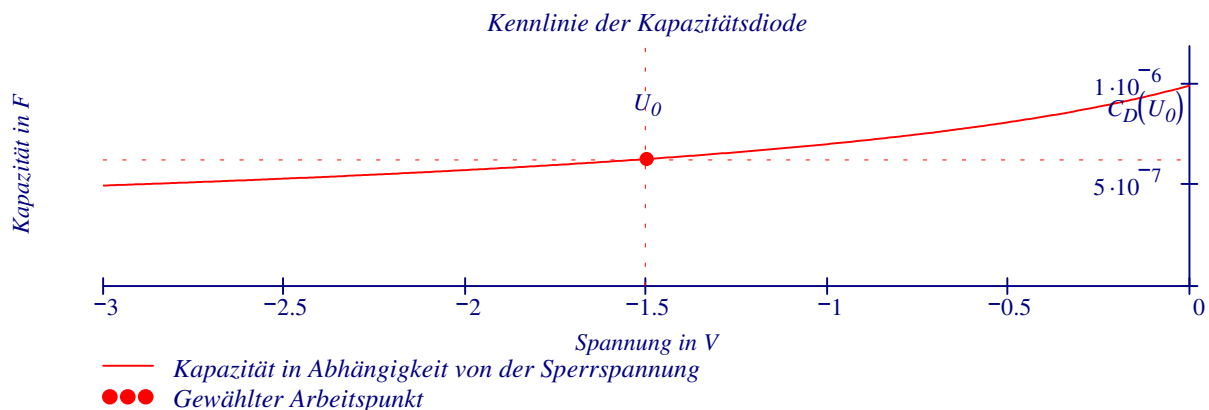
Für die Frequenz des Oszillators erhält man daher

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_p}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_p \cdot (C_1 + C_2) + C_1 \cdot C_2}}$$

Die Diode wird mittels der Gleichspannung U_0 in Sperrrichtung zunächst auf einen bestimmten Arbeitspunkt eingestellt. Dieser Arbeitspunkt entspricht dem mittleren Kapazitätswert. Er schwingt im Rhythmus der NF-Spannung, und dementsprechend ändert sich die Frequenz des Oszillators:

U-C-Kennlinie der Kapazitätsdiode: $C_D(U) := \frac{10^{-6}}{\sqrt{1 - U}}$

$U := -3, -3 + 0.01 \dots 0$ $U_0 := -1.5$



Die Zahlenwerte für Induktivität und Kapazitäten werden in den folgenden Überlegungen so gewählt, dass bei einer Dioden-Sperrspannung von $U_0 := -1.5 \text{ V}$ und $u_{NF} = 0$ (nicht schwingender Arbeitspunkt) als Schwingfrequenz die Trägerfrequenz von oben, nämlich $f_T = 50$ erreicht wird.

$$C_p := 10^{-4} \quad C_I := 10^{-6} \quad C_{D0} := C_D(U_0) \quad C_{D0} = 6.325 \times 10^{-7}$$

$$L_p := 1 \quad \text{Vorgabe}$$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_p}} \cdot \sqrt{\frac{C_I + C_{D0}}{C_p \cdot (C_I + C_{D0}) + C_I \cdot C_{D0}}} = f_T \quad L_p := \text{suchen}(L_p) \quad L_p = 0.10093$$

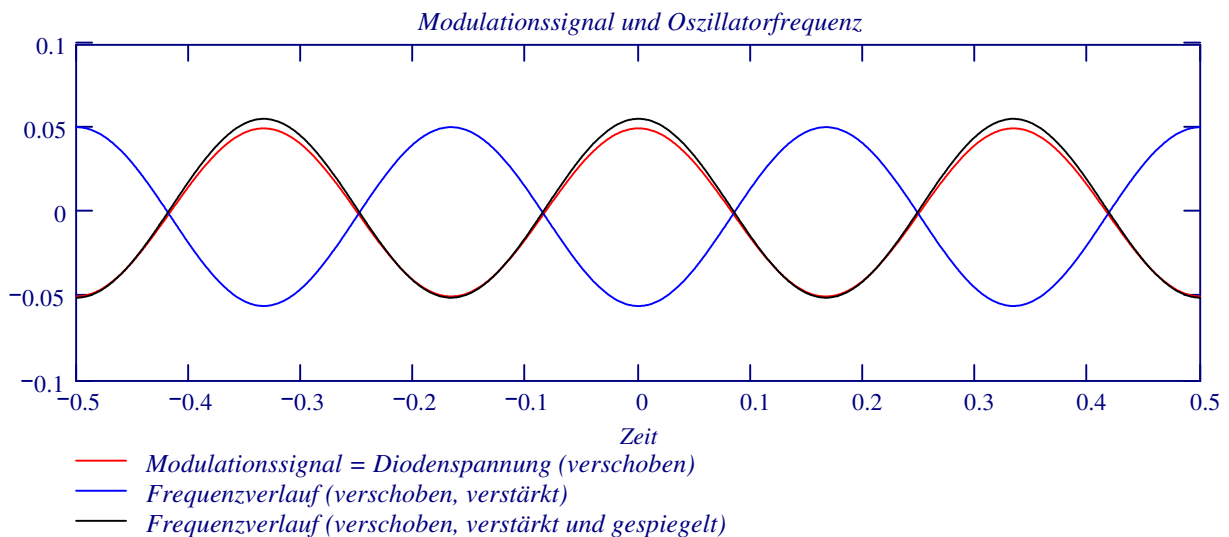
Wir berechnen als nächstes den zeitlichen Frequenzverlauf und stellen ihn dem modulierenden NF-Signal gegenüber. An der Kapazitätsdiode liegt die Spannung $u_D(t)$:

$$f_{NF} = 3 \quad u_s := 0.05 \quad u_D(t) := U_0 + u_s \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{NF} \cdot t)$$

$$f(u) := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_p}} \cdot \sqrt{\frac{C_I + C_D(u)}{C_p \cdot (C_I + C_D(u)) + C_I \cdot C_D(u)}}$$

Die Frequenzänderung ist (auch in der Praxis) wegen der kleinen Kapazitätsänderung sehr gering. Damit ein Vergleich des Frequenzverlaufs mit dem NF-Signal sinnvoll möglich ist verschieben wir beide Signale zur Zeitachse hin (wir subtrahieren also die Gleichanteile) und multiplizieren anschließend die Frequenzfunktion mit einem passenden Zahlenfaktor (es geht ja in erster Linie um die Kurvenformen!):

$$t := -0.5, -0.5 + 0.001 .. 0.5$$



Die Grafik zeigt, dass über die vom NF-Signal hervorgerufene Kapazitätsänderung der Diode eine entsprechende (wenn auch sehr kleine und um eine halbe Periode phasenverschobene) Frequenzänderung des Oszillators erreicht werden kann. Damit ist das Oszillatorsignal frequenzmoduliert.

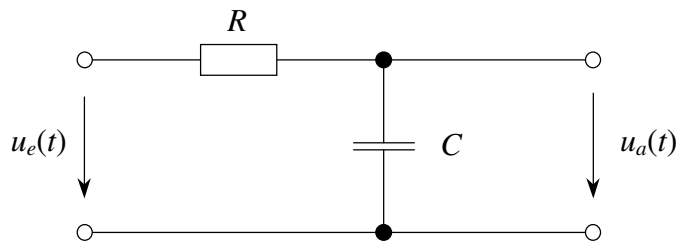
Demodulation[zurück zum Inhalt](#)

Von den diversen Möglichkeiten, ein FM-Signal zu demodulieren (d.h. das modulierende NF-Signal zurückzugewinnen) soll hier nur eine vorgestellt werden. Sie beruht auf dem Prinzip, das frequenzmodulierte Signal in ein amplitudenmoduliertes Signal umzuwandeln (FM/AM-Wandler).

Die Grundidee dafür ist folgende:

Da sich bei einem FM-Signal die Frequenz mit der Zeit entsprechend dem Modulationssignal ständig ändert, sollte es möglich sein, durch Filterung des FM-Signals aus den verschiedenen Frequenzwerten unterschiedliche Amplitudenwerte zu erzeugen. In einer Filterschaltung werden ja Sinusschwingungen mit verschiedenen Frequenzen verschieden stark abgeschwächt (oder verstärkt).

Wir demonstrieren diese Demodulationsvariante, indem wir einfach das FM-Signal durch ein einstufiges RC-Tiefpass-Filter schicken. Das Filter-Ausgangssignal vergleichen wir anschließend mit dem Modulationssignal.



Die Beziehung zwischen Ein- und Ausgangssignal der Schaltung wird durch eine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben, die wir aus der Maschengleichung herleiten können:

$$u_R(t) + u_a(t) = i(t) \cdot R + u_a(t) = u_e(t)$$

Für den Strom gilt

$$i(t) = i_R(t) = i_C(t) = \frac{d}{dt} q_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_a(t)$$

Dies ergibt, oben eingesetzt, die gesuchte Differenzialgleichung (mit $T = R \cdot C$):

$$T \cdot \frac{d}{dt} u_a(t) + u_a(t) = u_e(t)$$

Wir wählen wieder als Modulationssignal

$$x_{NF}(t, \omega_{NF}) := \cos(\omega_{NF} \cdot t)$$

Das FM-Signal

$$x_{FM}(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) := \cos(\varphi(t, \omega_T, \omega_{NF}, M))$$

liegt am Eingang des Tiefpassfilters an.

Die Differenzialgleichung in MATHCAD-Formulierung (aufgelöst nach $\frac{d}{dt} u_a(t)$):

$$DGL(t, T, u_a) := \frac{x_{FM}(t, \omega_T, \omega_{NF}, M) - u_a}{T}$$

Für den Anfangszeitpunkt $t_{Start} := -0.5$ setzen wir willkürlich den Anfangswert der Ausgangsspannung $u_{a0} := 0$.

Endzeitpunkt: $t_{Stop} := 0.5$

Zahl der Lösungswerte: $N := 500$

Der Vektor der Anfangswerte besitzt nur eine nullte Komponente: $u_{a_start_0} := u_{a0}$

Die Zeitkonstante T des RC-Tiefpass wird mit folgendem Argument abgeschätzt:

Da verschiedene Frequenzen des FM-Signals auch zu verschiedenen Amplituden führen sollen, müssen alle Frequenzanteile des Signals im abfallenden (= frequenzabhängigen) Teil der Filterkurve liegen. Die Mittenfrequenz unseres FM-Signals ist $f_T = 50$. Wir wählen als Grenzfrequenz des Filters $f_{grenz} := 1$. Der Zusammenhang zwischen der Grenzfrequenz und der Zeitkonstanten lautet beim einstufigen RC-Tiefpass:

$$T := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_{grenz}}$$

Daraus ergibt sich für die Zeitkonstante $T = R \cdot C$ folgender Wert: $T = 0.159$

Wegen der Filterwirkung ist das Ausgangssignal abgeschwächt, und zwar um den Faktor $v := \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2 \cdot T^2}}$, wenn

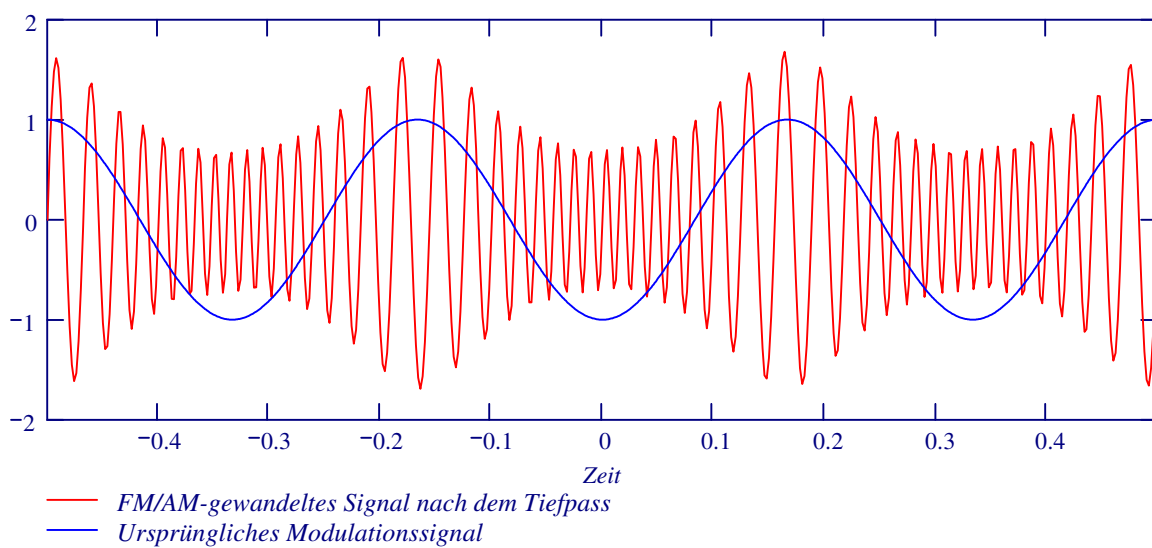
wir uns bei dieser Berechnung an der Trägerfrequenz orientieren ($v = 0.02$). Zum besseren Vergleich mit dem Modulationssignal kompensieren wir diese Abschwächung und die Phasenverschiebung um eine halbe Periode durch Multiplikation mit $\frac{1}{v}$ und einen Faktor -1 beim Modulationssignal.

$$u_{as}(t, u_a) := DGL(t, T, u_{a_0})$$

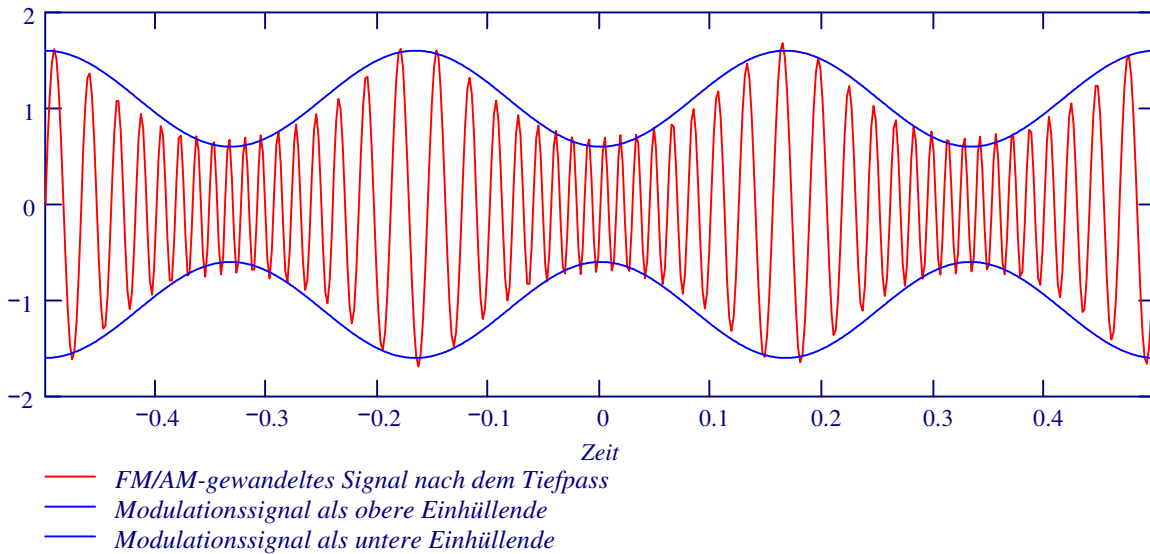
$$\text{Lösungsmatrix} := rkfest(u_{a_start}, t_{Start}, t_{Stop}, N, u_{as})$$

$$\text{Vektor der Zeitwerte: } tt := \text{Lösungsmatrix}^{\langle 0 \rangle}$$

$$\text{Vektor der Spannungswerte: } u_a := \frac{1}{v} \cdot \text{Lösungsmatrix}^{\langle 1 \rangle}$$



Eine simple Spielerei mit ein paar Zahlenwerten, und es zeigt sich, dass der Amplitudenverlauf in guter Näherung vom Modulationssignal eingehüllt wird:



Das FM/AM-gewandelte Signal hat allerdings nicht - wie normalerweise bei einem AM-Signal - eine konstante Frequenz. Außerdem entsteht durch die Tiefpassfilterung eine frequenzabhängige Phasenverschiebung des HF-Signals. Es zeigt sich aber, dass diese beiden Probleme in Wirklichkeit keine Rolle spielen sind.

Was in weiterer Folge die AM-Demodulation des FM/AM-gewandelten Signals betrifft, sei auf entsprechende Ausführungen im MATHCAD-Dokument über Amplitudenmodulation verwiesen.

Anhang

Übertragungsfunktion und Filterwirkung der RC-Schaltung

Aus der Spannungsteilerregel mit komplexen Impedanzen kann das Verhältnis von Ausgangsspannung (komplex) zu Eingangsspannung (ebenfalls komplex) berechnet werden:

$$v_{komplex} = \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega C}} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot T}$$

Der Betrag dieses frequenzabhängigen Spannungsverhältnisses ist $v_{Betrag}(\omega, T) := \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}}$

Die Grenzfrequenz ω_{grenz} bzw. f_{grenz} ist definiert als jene Frequenz bei der diese "Verstärkung" die Größe $\frac{v_{max}}{\sqrt{2}}$ besitzt. Dafür errechnet man (nur die positive Lösung ist relevant)

$$v_{Betrag}(\omega_{grenz}, TT) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ auflösen, } \omega_{grenz} \rightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{1}{TT} \\ -\frac{1}{TT} \end{array} \right)$$

Die Tiefpass-Filterwirkung wird deutlich, wenn wir die Funktion v_{Betrag} grafisch darstellen. Dabei sind logarithmische Skalierung der Frequenzachse und das logarithmische Verstärkungsmaß dB (Dezibel) üblich:

$$v_{dB}(\omega, T) := 20 \cdot \log(|v_{Betrag}(\omega, T)|)$$

$$f_0 := 0.1 \quad n := 0..300 \quad f_n := f_0 \cdot 1.05^n$$

