Wilfried Rohm **wrohm@aon.at**

Das Geburtstagsparadoxon

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung (Multiplikationssatz, Gegenwahrscheinlichkeit)

- Kurzzusammenfassung

  Berechnung und grafische Darstellung des klassischen Geburtstagsparadoxons werden vorgeführt. Ferner werden historische Notizen zur Entstehungsgeschichte angegeben und es wird der Frage nachgegangen, warum die Anschauung bei diesem Beispiel versagt.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Wie im Beispiel näher ausgeführt, kann dieses Paradoxon sehr gut als "Gag" im Unterricht verwendet werden, auf den man später einmal rechentechnisch zurückkommt.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik: Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2.Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2000 / 2001

- Literaturangaben:

  Statistik der Geburten: (LINK) AMMU-Artikel von Wilfried Rohm (AMMU-11) (enthält noch weitere Aspekte und Literaturangaben zur Statistik der Geburten)

Die Fragestellung des klassischen Geburtstagsparadoxons:
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p(n), dass von n Personen mindestens 2 am selben Tag geboren sind (das Jahr nicht berücksichtigt)

Überlegungen zur Berechnung

Die Berechnung erfolgt leichter über die Gegenwahrscheinlichkeit, die dann von 1 = 100% abzuziehen ist.

Berechnung der Gegenwahrscheinlichkeit

Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dass alle n Personen an einem anderen Tag geboren sind. Dazu verwenden wir den Multiplikationssatz:

Die W., dass die erste Person an irgendeinem der 365 Tage geboren ist = $1 = \frac{365}{365}$

Die W., dass die zweite Person an einem anderen Tag als die 1. geboren ist = $\frac{364}{365}$

Die W., dass die dritte Person an einem anderen Tag als die 1. und 2.Person geboren ist = $\frac{363}{365}$

usw.

Daher ist die gesuchte Wahrscheinlchkeit

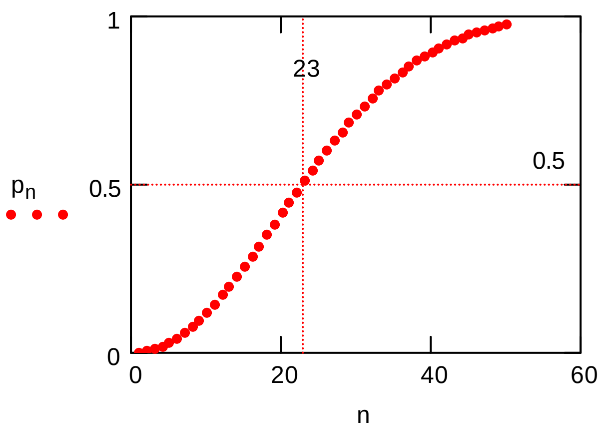
$$p(n) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - n + 1}{365} = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{365 - k + 1}{365}$$

Hier wird alternativ die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von n über einen Vektorfeld definiert:

$n := 1 .. 50$

$$p_n := 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{365 - k + 1}{365}$$

p ist ein Feld mit n von 1 - 50



p =

	0
0	0
1	0
2	$2.74 \cdot 10^{-3}$
3	$8.204 \cdot 10^{-3}$
4	0.016
5	0.027
6	0.04
7	0.056
8	0.074
9	0.095
10	0.117
11	0.141
12	0.167

Interessante Werte:

$p_{23} = 0.507$

d.h.: ab 23 beliebigen Personen in einem Raum ist die Wahrscheinlichkeit größer als 50%, dass zumindest 2 Personen am selben Tag Geburtstag haben.

Angeblich ist darauf auch die Entstehungsgeschichte des Paradoxons zurückzuführen, wie die folgende Anekdote berichtet:
Der bedeutende Mathematiker Warren Weaver erklärte einmal die Aussichten für einen Doppelgeburtstag einer Abendgesellschaft von 22 hohen Militärs und machte die Runde um den Eßtisch, um Daten zu vergleichen. Zu seiner Enttäuschung ergab sich auch beim letzten der Offiziere keine gleichzeitiger Geburtstag, aber die 24.Person im Saal rettete die Lage. Die Serviererin hatte zugehört und verkündete nun, dass sie am selben Tag wie einer der Offiziere geboren sei.
[aus: LIFE-Wunder der Wissenschaft: Die Mathematik, 1965]

$p_{36} = 0.832$

d.h.: bei 36 Personen beträgt die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Doppelgeburtstag über 80%. Dies hat mich dazu veranlaßt, in allen 1.Jahrgängen, in denen ich Mathematik unterrichte, eine Wette (Wetteinsatz: 100 Schilling) einzugehen.

In bisher 13 "Versuchen" habe ich erst 2-mal meine 100 Schilling verloren.
Beizeiten wird die Sache natürlich berechnet! Jedenfalls bleibt die Wette den Schülern bis nach der Matura in Erinnerung!

Warum versagt die Anschauung ?

Möglicherweise ist der Grund für die offensichtliche Fehleinschätzungen bei dieser Fragestellung auf die "intuitive" Verwechslung der eigentlichen Fragestellung mit folgender Aufgabe zurückzuführen:

Wie groß íst die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen mindestens eine denselben Geburtstag wie "ich" (bzw. eine bestimmte Person) hat ?

Auch hier kann über die Gegenwahrscheinlichkeit gerechnet werden: die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist 1 minus der Wahrscheinlichkeit, dass alle n Personen einen anderen Geburtstag als "meinen" haben:

$n := 1 .. 1000$

$$p2_n := 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

Wieviel Personen müssen nun anwesend sein, damit diese Wahrscheinlichkeit 50% ist?

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n = 0.5 \qquad n_{50} := \frac{\ln(0.5)}{\ln\left(\frac{364}{365}\right)} \qquad n_{50} = 252.652$$

Zeichnerische Darstellung