

Wilfried Rohm

Von der Fourierreihe zum Fourierintegral



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**
 - **Reelle Fourierreihe, komplexe Fourierreihe, Fourierintegral, Nachrichtentechnik, Elektronik**
- **Kurzzusammenfassung**
 - **Dieser File ist in erster Linie als Demonstrationsfile gedacht (obwohl er der Vollständigkeit halber auch Herleitungen enthält), der den Übergang reelle Fourierreihe - komplexe Fourierreihe - Fourierintegral vorallem an Hand der Impulsfunktion veranschaulichen soll.**
 - **Weitere Einsichten vermitteln Veränderungsmöglichkeiten (der Impulsfunktion) und der Periodenlänge.**
 - **Anschaulich wird auch noch mit Hilfe des Fourierintegrals die "Reziprozität von Zeit und Frequenz" dargestellt, die für die Fouriertransformation grundlegend ist und ein fundamentales Prinzip für Signalübertragungen und Spektralanalysen darstellt.**
- **Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:**
 - **Der File soll ein intuitives Erfassen der Begriffe *Fourierreihe - komplexe Darstellung der Fourierreihe* und *Fourierintegral* ermöglichen sowie die Zusammenhänge aufzeigen. Für den Unterricht von zentraler Bedeutung erscheinen die entsprechenden Grafiken samt deren Manipulationsmöglichkeiten und Interpretation!**
- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**
 - **Angewandte Mathematik, 4./5.Jahrgang, insbesondere elektrotechnische Abteilungen.**
- **Mathcad-Version:**
 - **erstellt mit Mathcad 11**
- **Literaturangaben:**
 - **Timischl / Kaiser: Ingenieurmathematik 4, Dorner Verlag.**
 - **Hoffmann / Marx / Vogt: Mathematik für Ingenieure 2, Pearson Studium.**
 - **Werner: Signale und Systeme, Vieweg (Studium Technik).**
 - **Preuß: Funktionaltransformationen, Fachbuchverlag Leipzig.**
- **Sonstiges:**
 - **Als Ausdruck eignet sich die pdf-Datei mit optimierten Zeilenumbrüchen!**



1) Die reelle Fourierreihe

T = 6.283

$$t_1 := \frac{-\pi}{4}$$

$$t_2 := \frac{\pi}{4}$$

$$t_1 := 0$$

$$t_2 := \frac{\pi}{4}$$

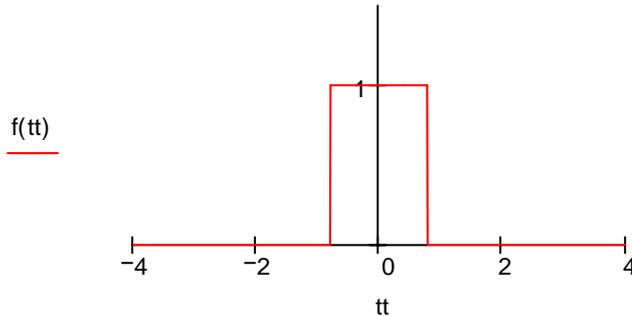
$$f(t) := \Phi(t - t_1) - \Phi(t - t_2)$$

T wird unten neben der Zeichnung der komplexen Fourierreihe festgelegt und kann dort variiert werden!!

Angenommene Grenzen für den (symmetrischen) "Impuls"

Variante für die untere Grenze! - Dann ist der Impuls nicht mehr symmetrisch. (Feld aktivieren!)

Hier wird ein Impuls im Intervall [t₁, t₂] definiert



Anmerkungen :

Die Verwendung der Heaveside-Funktion $\Phi(x)$ erlaubt symbolische Berechnungen, welche im allgemeinen nicht möglich ist, wenn ein "Programm" verwendet wird!

Hinweis : Mit $t_1 = 0$ erhält man eine nicht symmetrische Funktion, sodass die Einzelschwingungen Sinus- und Kosinusanteile haben (sinnvoll für den Vergleich reelle und komplexe Oberschwingungen)

Eine reelle Fourreihe kann nur für periodische Funktionen ermittelt werden.

Für die folgenden Berechnungen wird daher vorausgesetzt, die Funktion sei periodisch mit der Periode T. Die Periodenlänge kann unten (bei der Zeichnung der komplexen Fourierreihe) verändert werden.

Berechnung reelle Fourierreihe

Bestimmung der Fourierkoeffizienten N = 20 N wird unten beim Amplitudenspektrum der komplexen Fourierreihe global definiert.
 n := 0.. N

$$\omega_0 := \frac{2\pi}{T} \quad \text{Frequenz der Grundschwingung}$$

$$a_n := \frac{2}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt \quad b_n := \frac{2}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt \quad \text{Gleichanteil: } \frac{a_0}{2} = 0.25$$

a ^T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	0	0.5	0.45	0.318	0.15	0	-0.09	-0.106	-0.064	0	0.05	0.064

b ^T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Aufstellen der reellen Fourierreihe:

$$f_fourier(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)) \quad \text{Sinus-Kosinusform}$$

Für die Erstellung der Fourierreihe in der Amplituden-Phasenform müssen die Amplituden und Phasenwinkel der einzelnen Schwingungen ermittelt werden

$$A_n := \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$$

$$TOL := 10^{-5}$$

$$a_n := \begin{cases} 0 & \text{if } |a_n| < TOL \\ a_n & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$b_n := \begin{cases} 0 & \text{if } |b_n| < TOL \\ b_n & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi_n := \begin{cases} 0 & \text{if } a_n = 0 \wedge b_n = 0 \\ \text{atan2}(b_n, a_n) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Bei der Berechnung der Phasenwinkel gibt es ein numerisches Problem. Durch die oben durchgeführte numerische Berechnung des Integrals kann es vorkommen, dass die Koeffizienten, die bei exakter Berechnung 0 sind, einen kleinen Wert haben (z.B. 10⁻⁷).

Bei Verwendung der sehr praktischen Funktion atan2 können aber dadurch völlig falsche Winkel ermittelt werden, insbesondere, wenn beide Koeffizienten a_n und b_n "nahe 0" (statt "wirklich 0") sind.

Daher wird eine Toleranz eingegeben: Ist der Betrag des Koeffizienten kleiner als diese Toleranz, wird dieser Koeffizient exakt gleich 0 gesetzt. Schließlich muss auch noch berücksichtigt werden, dass die Funktion atan2 nicht definiert ist, wenn beide Koeffizienten 0 sind!

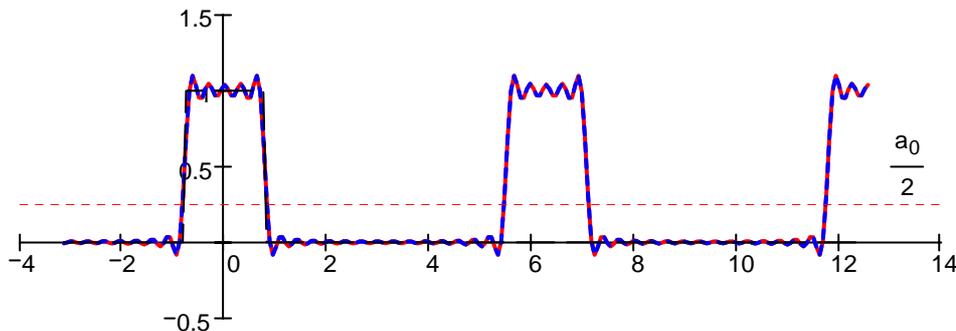
Fourierreihe in der Amplituden-Phasenform

$$f_fourier2(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t + \phi_n))$$

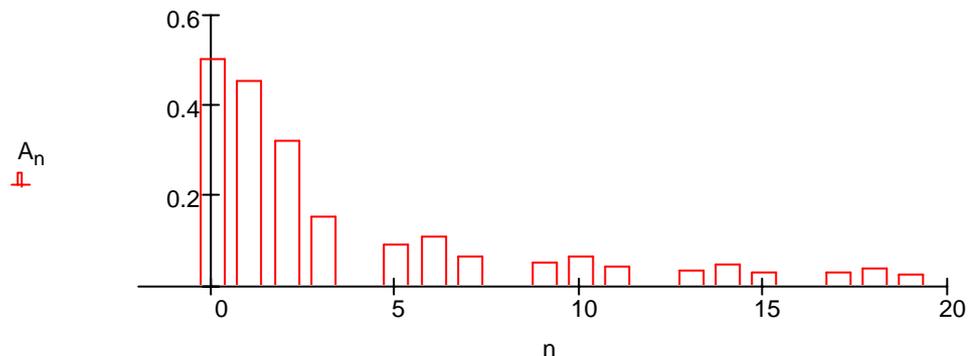
$$tt := \frac{-T}{2}, \frac{-T}{2} + \frac{T}{100} .. 2T$$

	0		0
0	0.5	0	1.571
1	0.45	1	1.571
2	0.318	2	1.571
3	0.15	3	1.571
4	0	4	0
5	0.09	5	-1.571
6	0.106	6	-1.571
7	0.064	7	-1.571
8	0	8	0
9	0.05	9	1.571
10	0.064	10	1.571

▲ Berechnung reelle Fourierreihe



Amplitudenspektrum



2) Die komplexe Form der Fourierreihe

<p>☑ Herleitung</p>	
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)$ <p>mit $a_n = \frac{2}{T} \cdot \int f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$ und $b_n = \frac{2}{T} \cdot \int f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$</p>	<p>Reelle Fourierreihe</p>
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$	<p>Umschreiben mit Hilfe der Euler-Formeln</p>
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - j \cdot b_n)}_{\underline{c}_n} \cdot e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + j \cdot b_n)}_{\underline{c}_n^*} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$	<p>Gleiche e-Potenz zusammenfassen; komplexe Koeffizienten</p>
$\underline{c}_n = \frac{1}{2}(a_n - j \cdot b_n) = \frac{1}{T} \cdot \int f(t) \cdot \underbrace{(\cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) - j \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t))}_{e^{-jn\omega_0 t}} dt$ $\underline{c}_n^* = \frac{1}{2}(a_n + j \cdot b_n) = \frac{1}{T} \cdot \int f(t) \cdot \underbrace{(\cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + j \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t))}_{e^{jn\omega_0 t}} dt$	<p>Berechnung der „neuen“ Koeffizienten: Unterschied nur im Vorzeichen der e-Potenz!</p>
<p>Durch die Transformation $n \rightarrow (-n)$ kann geschrieben werden:</p> $\underline{c}_n^* = \underline{c}_{-n}$	<p>Der entscheidende „Trick“: $n \rightarrow -n$</p>
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n^* \cdot e^{-jn\omega_0 t}$ $= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$ $= \frac{a_0}{2} + \sum_{(n \neq 0)} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad \text{mit } c_0 = \frac{a_0}{2}$	<p>Umschreiben der komplexen Fourierreihe auf eine gemeinsame Summe mit Hilfe des obigen „Tricks“</p>
$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad \text{mit } \underline{c}_n = \frac{1}{T} \cdot \int f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$ $a_n = 2 \cdot \text{Re}(\underline{c}_n) = \underline{c}(n) + \underline{c}(-n)$ $b_n = 2 \cdot \text{Im}(\underline{c}_n) = j \cdot (\underline{c}(n) - \underline{c}(-n))$	<p>Ergebnis und Zusammenhang zur reellen Fourierreihe</p>
	<p>Interpretation „negativer Frequenzen“ als Umkehrung des Drehsinns – die Addition der komplexen Schwingungen gleicher Frequenz ergibt die reelle Teilschwingung!</p>

Herleitung

Berechnung komplexe Reihe

Anmerkung: Da die Indizes bei der komplexen Fourierreihe auch negativ sein können und dies in Mathcad bei der Definition eines Vektors nicht vorgesehen ist, muss auf die Funktionsschreibweise statt der Vektorschreibweise (wie oben bei der reellen Fourierreihe) gewechselt werden.

$$c(n) := \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt$$

Berechnung der Koeffizienten der komplexen Fourierreihe; $c(n)$ und $c(-n)$ sind im allgemeinen konjugiert komplex (siehe auch "Herleitung"), was man hier aber erst sieht, wenn man beispielsweise bei der obigen Impulsdefinition als untere Grenze $t_1=0$ wählt!
 (dunkelgelbe Variante aktivieren!)
 Beispiel:

$c(-5) = -0.045$

$c(5) = -0.045$

Hier erfolgt nun ein tabellarischer Vergleich der Koeffizienten, der die hergeleitete Theorie verifizieren soll:

$n := 0..N$

$aa(n) := c(n) + c(-n)$

$aa(n) := 2 \cdot \text{Re}(c(n))$

Berechnung der reellen Koeffizienten aus den komplexen auf 2 Arten

$bb(n) := j \cdot (c(n) - c(-n))$

$bb(n) := 2 \cdot \text{Im}(c(n))$

n =	aa(n) =	bb(n) =	c(n) =
0	0.5	0	0.25
1	0.45	0	0.225
2	0.318	0	0.159
3	0.15	0	0.075
4	0	0	0
5	-0.09	0	-0.045
6	-0.106	0	-0.053
7	-0.064	0	-0.032
8	0	0	0
9	0.05	0	0.025
10	0.064	0	0.032

Oben (bei der reellen Fourierreihe) wurden folgende Koeffizienten ermittelt:

a =	b =	A =	$ c(n) + c(-n) =$
			0
0	0	0	0.5
1	0	1	0.45
2	0	2	0.318
3	0	3	0.15
4	0	4	0
5	0	5	0.09
6	0	6	0.106
7	0	7	0.064
8	0	8	0
9	0	9	0.05
10	0	10	0.064

Im folgenden wird dieser "rechnerische Vergleich" graphisch veranschaulicht:

Berechnung komplexe Reihe

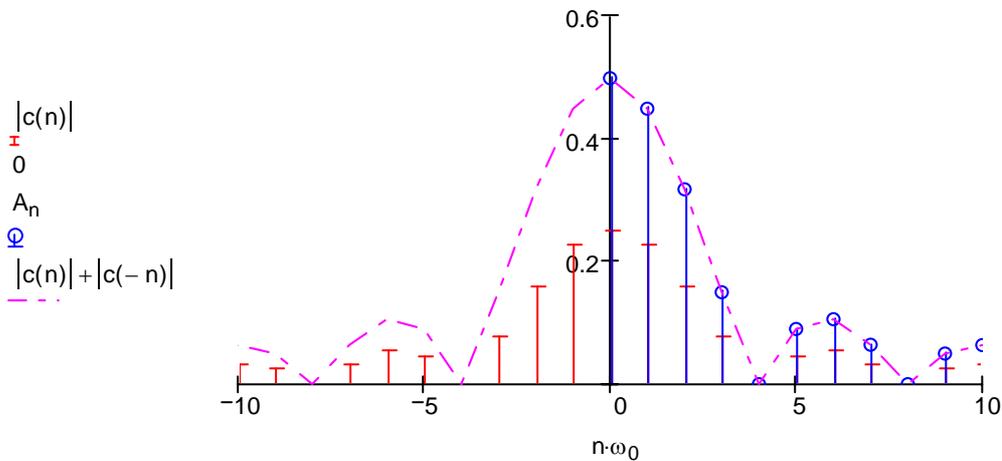
Vergleich des Amplitudenspektrums der reellen und komplexe Fourierreihe:

$T \equiv 2\pi$

$N \equiv 20$

T und N variieren!!

$n := -N..N$



Hinweise und Beobachtungsmöglichkeiten:

- Die Amplituden der reellen Fourierreihe (blau mit Kreis) ergeben sich aus dem Spektrum der Beträge der komplexen Fourierreihe (rot) durch Verdoppelung bzw. indem der "negative Ast" herübergeklappt und zum positiven Ast addiert wird ("Schanierprinzip"). Da $c(n)$ und $c(-n)$ gemäß Herleitung konjugiert komplex sind, müssen ihre Beträge gleich groß sein - folglich ist das Amplitudenspektrum der komplexen Fourierreihe symmetrisch, wenn (so wie hier) die Beträge dargestellt werden.
- Was bewirkt eine Vergrößerung der Periodenlänge beispielsweise auf 4π , 8π oder 16π ?
 Wegen $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ bewirkt beispielsweise eine Verdoppelung der Periodenlänge eine Halbierung der Grundkreisfrequenz - die Linien liegen daher nun entsprechend dichter! Man kann daher schon vermuten, dass für T gegen ∞ aus dem "**Linienspektrum**" der komplexen Fourierreihe das **kontinuierliche Spektrum** des Fourierintegrals entsteht (dann geht ja ω_0 gegen 0)
 (**Hinweis:** Bei einer Erhöhung der Periodenlänge muss auch das Amplitudenspektrum erweitert und damit N erhöht werden!)
- Aktiviert man ganz oben bei der Defintion des Impulses den dunkelgelben Teil ($t_1 = 0$), so liegt keine symmetrische Funktion mehr vor und die $c(n)$ sind nun komplex, weil auch Sinus-Anteile in der Reihenentwicklung vorkommen. Von den komplizierteren Werten abgesehen ergibt sich aber auch hier prinzipiell ein ähnliches Bild.

Rechnerischer Vergleich zwischen komplexen und reellen Oberschwingungen (Region)

Rechnerischer Vergleich

Hier wird am Beispiel einer beliebigen Oberschwingung druch symbolische Rechnung gezeigt, dass bei Addition der beiden konjugiert komplexen Zeiger die reelle Schwingung entsteht - das entspricht dem Zusammenklappen und Aufaddieren im obigen Bildvergleich bzw. der graphischen Erklärung im untersten Feld des Herleitungsteiles (oben: "Interpretation negativer Frequenzen").

Hinweis: Der Operator **komplex** muss dabei verwendet werden
 Der Operator **komplex** zwingt zum Rechnen in der $a+j*b$ -Form (Komponentenform) und wandelt daher gemäß der Euler-Formel $e^{j \cdot n \cdot \omega \cdot t}$ in die Form $\cos(n \cdot \omega \cdot t) + j \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$ um!

Beispiel k. Oberschwingung

k := 7

$$c(k) \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} + c(-k) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} \left| \begin{array}{l} \text{komplex} \\ \text{vereinfachen} \\ \text{sammeln, } \cos(k \cdot t) \\ \text{sammeln, } \sin(k \cdot t) \\ \text{gleit, 3} \end{array} \right. \rightarrow -6.42 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(7 \cdot t)$$

$$c(k) \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} + c(-k) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} \left| \begin{array}{l} \text{komplex} \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow \frac{-1}{7 \cdot \pi} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(7 \cdot t)$$

Wie man sieht, ist das Ergebnis immer reell !!!!!!!!

Nun ein Vergleich mit der reellen Fourierreihe (die erneute Berechnung ist notwendig, weil oben a_n in einem Programm definiert wurde und daher mit diesem Feld keine symbolischen Berechnungen mehr möglich sind!)

$$a(k) := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt \qquad b(k) := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$a(k) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b(k) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) \text{ vereinfachen} \rightarrow \frac{-1}{7 \cdot \pi} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(7 \cdot t)$$

Vergleich mit der reellen Fourierreihe für bestimmtes n liefert das gleiche Ergebnis!!!

Folgerung: Die komplexe Fourierreihe ist nur eine andere Schreibweise der reellen Fourierreihe

Unterschied: Die reelle Fourierreihe benötigt Amplituden- UND Phasenspektrum!

Die komplexe Fourierreihe benötigt nur das Amplitudenspektrum - die Phasenlage ist indirekt über die komplexen Koeffizienten enthalten!

Hinweis: "Beeindruckender" wird der Vergleich, wenn wiederum oben bei der Impulsdefinition $t_1=0$ gesetzt wird (unsymmetrischer Impuls mit Sinus- und Kosinusanteilen!)

Rechnerischer Vergleich

3) Der Übergang von der komplexen Fourierreihe zum Fourierintegral am Beispiel eines symmetrischen Impulses

Herleitung

Wir gehen von der komplexen Fourierreihe aus .
Wir wählen die gleichen Bezeichnungen wie im Buch Timischl/Kaiser (Mathematik 4):

$f_T(t)$... periodische Funktion mit Periode T
 $f(t)$... entsteht aus $f_T(t)$ für $T \rightarrow \infty$

Gemäß der obigen Grafik bei der komplexen Fourierreihe erkennt man,
dass für $T \rightarrow \infty$ auch $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ gilt!

Statt den Werten c_n betrachten wir nun $T \cdot c_n$. Damit ergibt sich :

$$T \cdot c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty \text{ und } \omega_0 \rightarrow 0} F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

und

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{T \rightarrow \infty \text{ und } \omega_0 \rightarrow 0} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} dt$$

Daraus erhält man den Formelsatz :

$F(j\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ <p><i>Fouriertransformation</i></p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} dt$ <p><i>inverse Fouriertransformation</i></p>
---	---

Herleitung

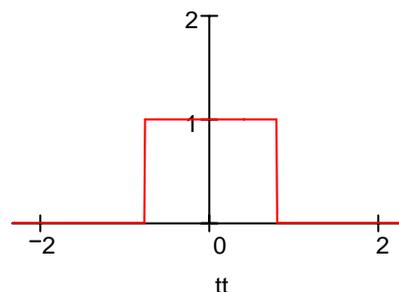
$a := t_2 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \pi$ $a := a$

impuls(t, a) := $\Phi(t + a) - \Phi(t - a)$

Der Impuls wird ähnlich wie oben mit einer Impulsbreite von $2a$ definiert

$tt := -5a, -5a + \frac{a}{100} .. 5a$

impuls(tt, a)



Wir ermitteln die Fouriertransformierte auf 2 Arten:

1) Symbolische Integration gemäß der Formel für die Fouriertransformierte:

$$F(\omega, a) := \int_{-a}^a \text{impuls}(t, a) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$F(\omega, a) \left| \begin{array}{l} \text{annehmen, } a > 0 \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot a)}{\omega}$$

2) Mit Hilfe des eingebauten Schlüsselwortes für die symbolische Fouriertransformation:

$$\text{impuls}(t, a) \left| \begin{array}{l} \text{fourier, t} \\ \text{komplex} \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot \sin(\omega \cdot a) \cdot \frac{1 + i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega) \cdot \omega}{\omega}$$

Für $\omega \neq 0$ ist aber der Dirac-Impuls $\Delta(\omega) = 0$, daher ergibt sich für die Fouriertransformierte des Impulses:

$$\text{FF}_{\text{impuls}}(\omega, a) := \frac{2 \cdot \sin(a \cdot \omega)}{\omega} \quad \text{das gleiche Ergebnis wie oben!}$$

Anmerkung: Für $\omega=0$ haben wir in der obigen Definition eine "hebbare" Unstetigkeitsstelle, da der Limes existiert wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$. In Mathcad wird dazu die Funktion $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ zur Verfügung gestellt, welche die Funktion für $x=0$ richtig auswertet. Richtiger Weise müsste die Definition daher lauten:

$$\text{FF}_{\text{impuls}}(\omega, a) := 2 \cdot a \cdot \text{sinc}(a \cdot \omega)$$

Allerdings gibt es in diesem File auch mit der obigen Funktion keine weiteren Probleme, sodass man eventuell dieses "Problem" auch "verschweigen" könnte.

Nun wollen wir den fouriertransformierten Rechtecksimpuls graphisch mit der Größe $c_n \cdot T$ vergleichen.

Wir werden dabei sehen, wie das kontinuierliche Spektrum ("**komplexe Spektraldichte**") die Hüllkurve des Linienspektrums der komplexen Fourierreihe darstellt.

Hinweis: Damit dieser Teil unabhängig von oben funktioniert, wurden die nötigen Teile nochmals hingeschrieben. Man verändere T auf $4\pi, 8\pi, \dots$ (gegebenenfalls auch n vergrößern)

$n := -40 .. 40$

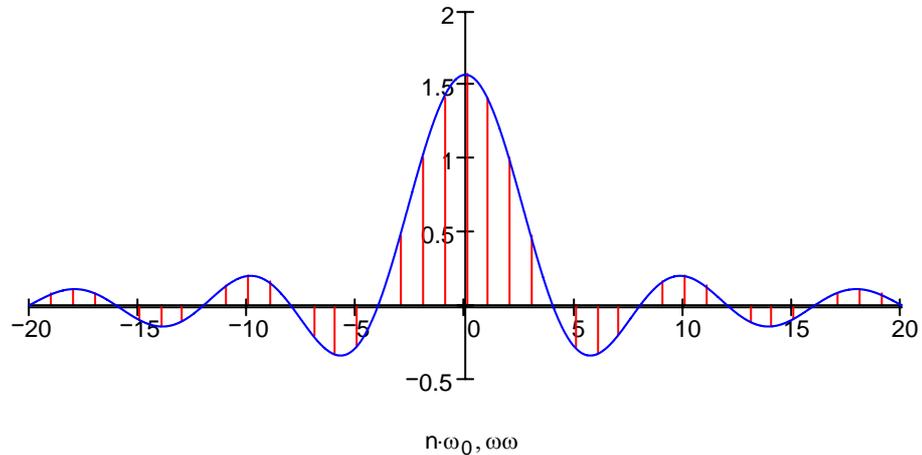
$\omega\omega := -20, -19.99 .. 20$

$T := 2\pi$ **T variieren!**

$\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$

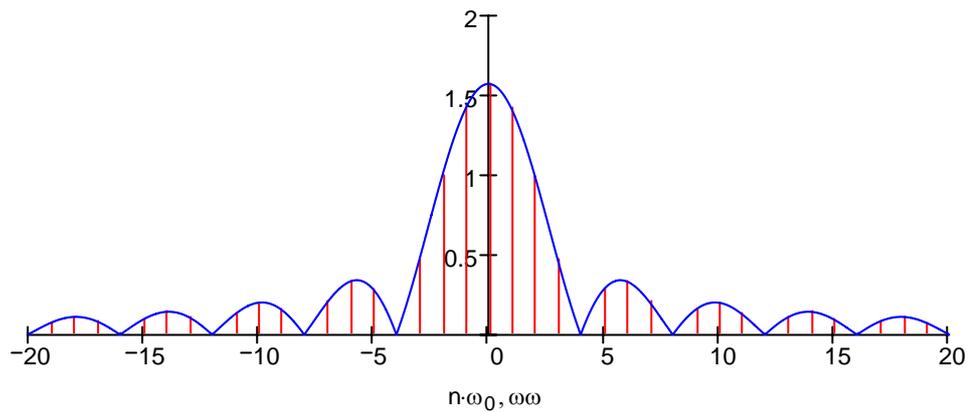
$$c(n) := \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{impuls}(t, a) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt$$

$c(n) \cdot T$
 \perp
 $FF_{\text{impuls}}(\omega\omega, a)$



Dieser direkte Vergleich (Darstellung der komplexen Spektraldichte) funktioniert aber nur selten, weil im allgemeinen die Faktoren $c(n)$ komplex sind. Daher betrachtet man häufig die entsprechenden Beträge ("Amplitudendichte"):

$|c(n)| \cdot T$
 \perp
 $|FF_{\text{impuls}}(\omega\omega, a)|$



$n := -80 .. 80$

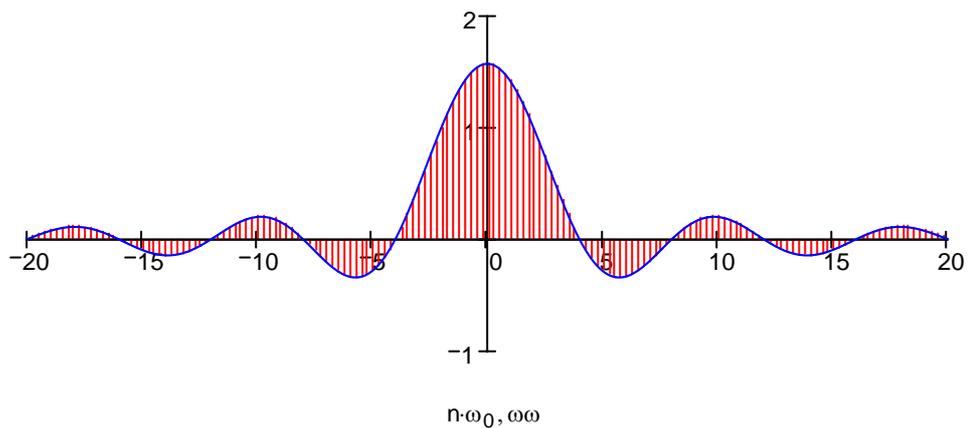
$\omega\omega := -20, -19.99 .. 20$

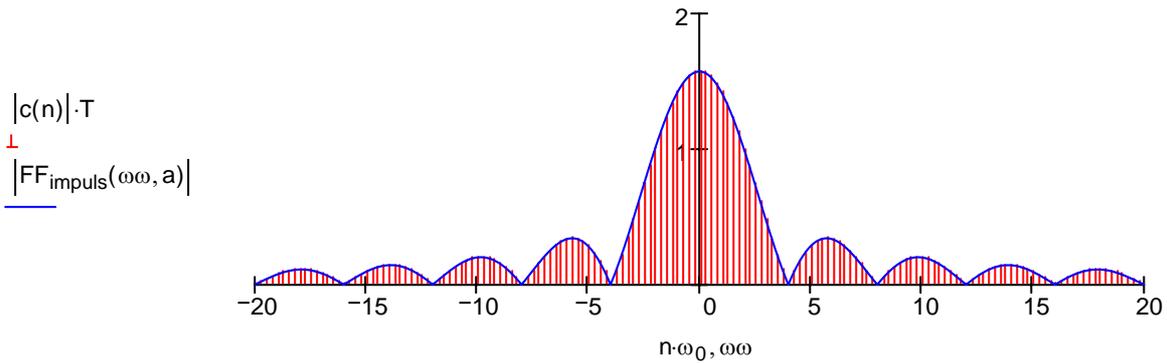
$T := 8\pi$

$\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$

$$c(n) := \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{impuls}(t, a) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt$$

$c(n) \cdot T$
 \perp
 $FF_{\text{impuls}}(\omega\omega, a)$





Hier erkennt man, wie die Erhöhung der Periode von 2π auf 8π im Vergleich zu oben zu einem "Zusammenrücken" der Frequenzen führt.

4) Die Rücktransformation (inverse Fouriertransformation) mit Hilfe von Mathcad

Die Rücktransformation mit den Symbolik-Befehlen von Mathcad gelingt nur in einfacheren Fällen, entsprechende Vereinfachungen werden häufig nicht durchgeführt.

Die Rücktransformation des Rechtecksimpulses auf 2 Arten liefert das gleiche Ergebnis.

a) Wir verwenden die oben berechnete und definierte Fouriertransformierte des Impulses:

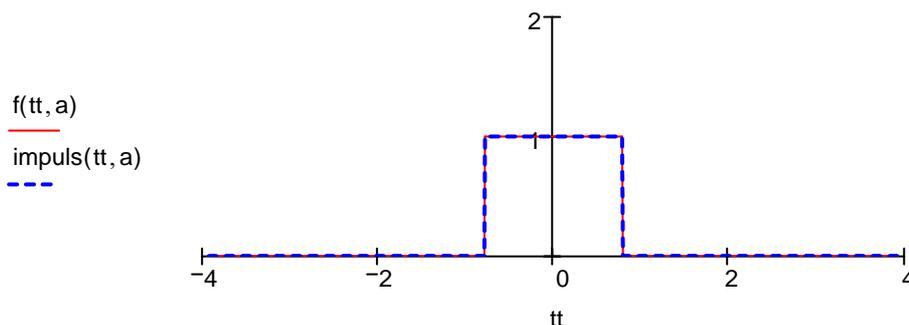
$$FF_{\text{impuls}}(\omega, a) \left| \begin{array}{l} \text{invfourier, } \omega \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \Phi(t + a) - \frac{1}{2} \cdot \Phi(-t - a) - \frac{1}{2} \cdot \Phi(t - a) + \frac{1}{2} \cdot \Phi(-t + a)$$

b) Wir verwenden das Ergebnis der Fouriertransformation, das Mathcad mit dem Schlüsselwort "fourier" lieferte:

$$2 \cdot \sin(a \cdot \omega) \cdot \frac{1 + i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega) \cdot \omega}{\omega} \left| \begin{array}{l} \text{invfourier, } \omega \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \Phi(t + a) - \frac{1}{2} \cdot \Phi(-t - a) - \frac{1}{2} \cdot \Phi(t - a) + \frac{1}{2} \cdot \Phi(-t + a)$$

Wie gesagt, das Ergebnis wird nicht sinnvoll vereinfacht, dass die Funktion aber tatsächlich unserer oben definierten Impulsfunktion entspricht, bestätigt die zeichnerische Gegenüberstellung:

$$f(t, a) := \frac{1}{2} \cdot \Phi(t + a) - \frac{1}{2} \cdot \Phi(-t - a) - \frac{1}{2} \cdot \Phi(t - a) + \frac{1}{2} \cdot \Phi(-t + a)$$



5) Die Reziprozität von Zeit und Frequenz bei der Fouriertransformation

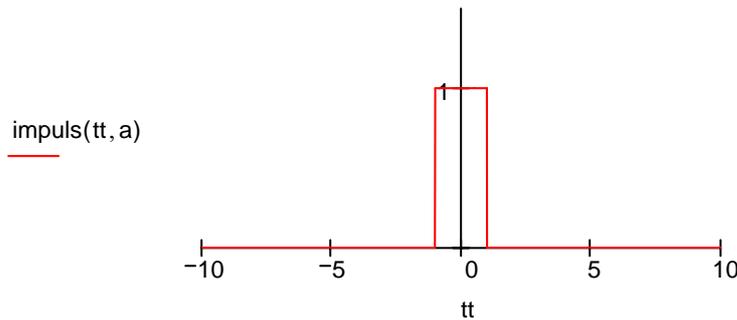
Der grundsätzliche Zusammenhang zwischen Impulsdauer und Bandbreite spielt in der Nachrichtenübertragungstechnik eine wichtige Rolle. Wir verdeutlichen diesen Zusammenhang hier an Hand von 2 Beispielen:

- a) Vergleich Rechtecksimpuls mit seinem Frequenzspektrum.
- b) Vergleich einer (gefensterten) Kosinusschwingung mit ihrem Spektrum.

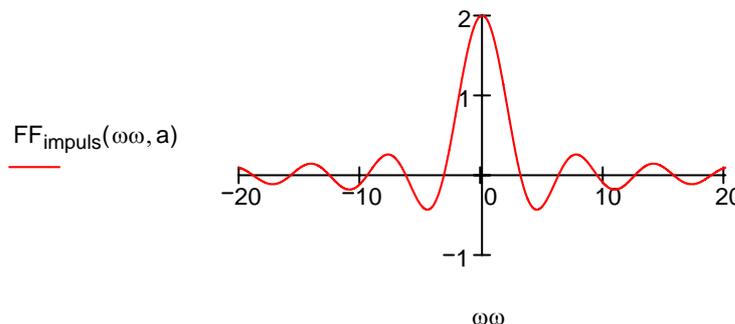
a) Rechtecksimpuls

a := 1 **a variieren !** a := a tt := -20 · a, -20 · a + $\frac{a}{100}$.. 20a

Zeitbereich



Frequenzbereich



Wir erhalten den grundlegenden Zusammenhang, indem wir die ersten Nullstellen des in den Frequenzbereich transferierten Impulses bestimmen:

Wegen $FF_{impuls}(\omega, a) \rightarrow 2 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot a)}{\omega}$ setzen wir: $\sin(\omega \cdot a) = 0$

Die ersten Nullstellen sind also bei $a \cdot \omega = \pi$

dies führt zu: $\omega_1 := \frac{\pi}{a}$ $\omega_1 \text{ gleit, } 3 \rightarrow \frac{3 \cdot 14}{a}$

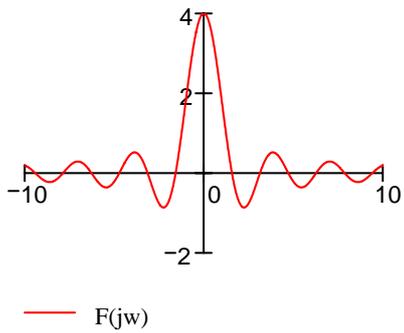
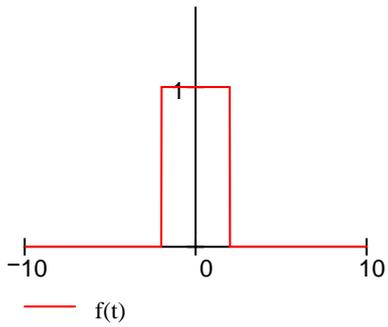
Das Frequenzband bis zur ersten Nullstelle ist das "**vorherrschende Frequenzband**" und bestimmt damit die Bandbreite.

Wird der Impuls breiter (also zeitlich gesehen länger bzw. a größer), wird ω_1 und damit dieses Frequenzband schmaler, wird der Impuls kürzer, so wird das Frequenzband breiter.

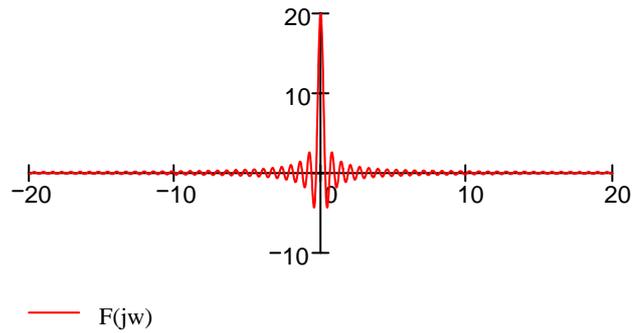
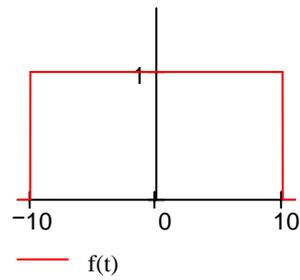
mit anderen Worten: **Verlängerung der Signaldauer** ---- > **Verkleinerung des Frequenzbandes**
 (=Bereich mit hoher Spektraldichte)
Verkürzung der Signaldauer ---- > **Verbreiterung des Frequenzbandes.**

Diese REZIPROZITÄT von Zeit und Frequenz ist von grundlegender Bedeutung für Signalübertragung und Signalanalysen.

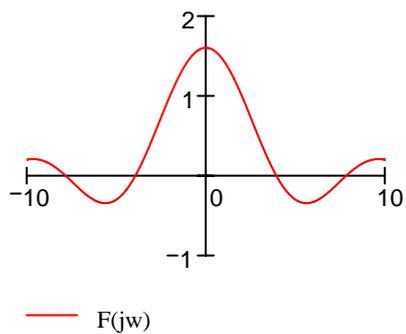
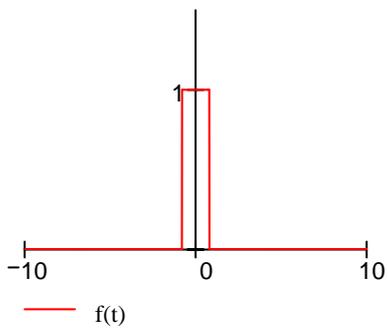
Impulsbreite 2



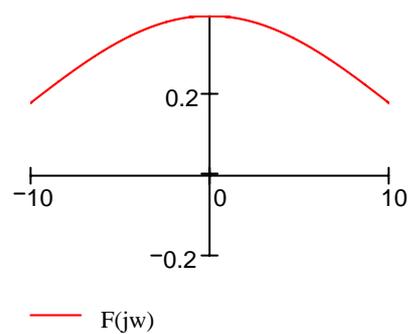
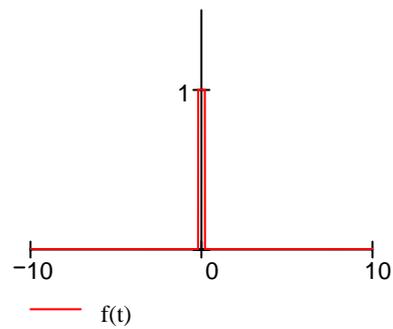
Impulsbreite 10



Impulsbreite 0.8



Impulsbreite 0.2



Das Verhalten des Dirac-Impulses bei der Fouriertransformation:

Grundsätzlich gilt:

$$\Delta(t) \xrightarrow{\text{fourier, } t} 1$$

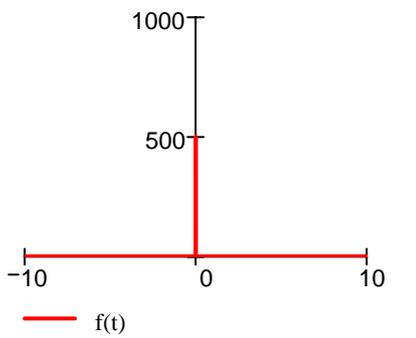
Die Amplitudendichte des Diracimpulses ist konstant gleich 1 - unabhängig von der Kreis-Frequenz ω

$$1 \xrightarrow{\text{fourier, } t} 2 \cdot \pi \cdot \Delta(\omega)$$

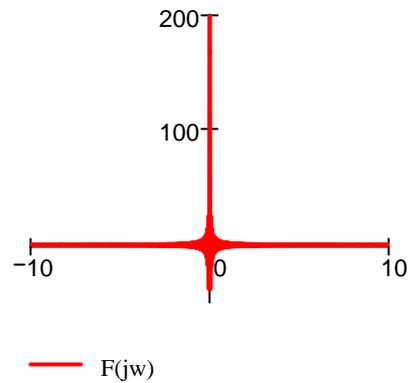
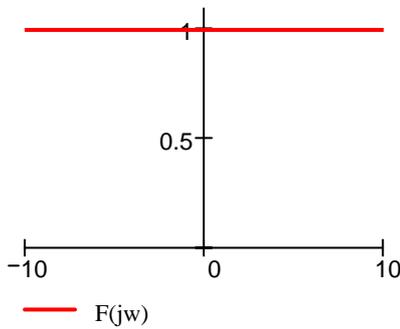
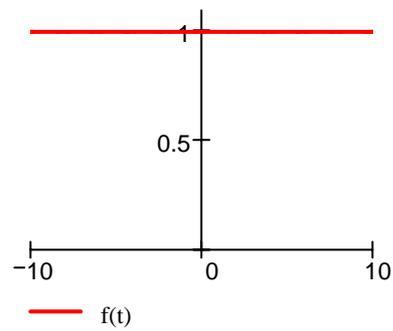
Eine konstante Zeitfunktion hat als Fouriertransformierte einen Dirac-Impuls, was bedeutet, dass die Spektraldichte an der Stelle 0 unendlich ist.

Das Verhalten des Dirac-Impulses bei der Fouriertransformation können wir aber auch graphisch als Grenzfall unserer Impulsfunktion für a gegen 0 anschaulich nachvollziehen, wie nachfolgend gezeigt wird:

Angenäherter Deltaimpuls (a=0.001)



Sehr breite ("fast konstante") Zeitfunktion (a = 100)



b)Gefensterete Kosinusschwingung

$a := 10$

$\omega_0 := 1$

a bzw. ω variieren!

$tt := -20, -20 + 0.01 .. 20$

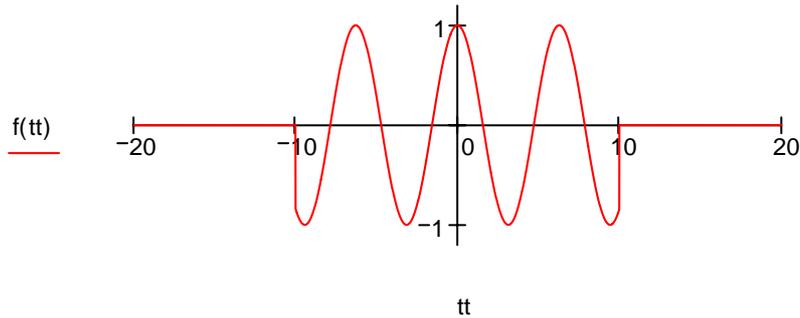
$f(t) := \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot (\Phi(t + a) - \Phi(t - a))$

Definition des "Kosinus-Impulses im Intervall [-a,a]

Hinweis : Diese Definition ist gleichbedeutend mit der nebenstehenden (mit dem Unterschied, dass sie symbolische Rechnung erlaubt)

$$f(t) := \begin{cases} \cos(\omega_0 \cdot t) & \text{if } (t > -a) \cdot (t < a) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

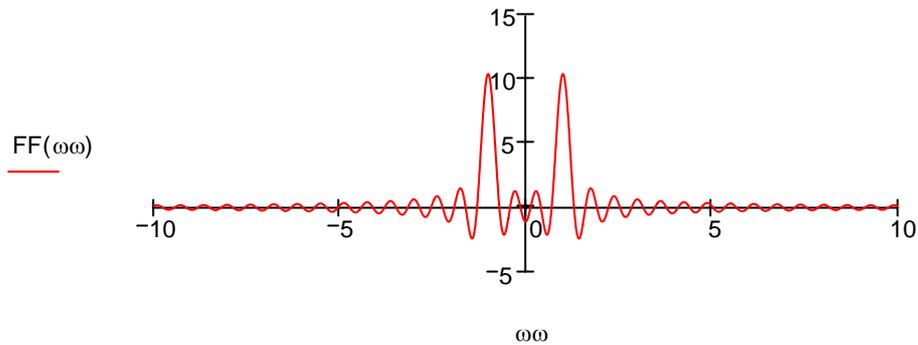
Darstellung im Zeitbe



$FF(\omega) := \frac{\sin[a \cdot (\omega + \omega_0)]}{\omega + \omega_0} + \frac{\sin[a \cdot (\omega - \omega_0)]}{\omega - \omega_0}$

Transformation gemäß einer Formelsammlung, da die eingebaute Fouriertransformation eine wegen dem Delta-Impuls nicht zeichenbare Funktion liefert.

$\omega\omega := -10, -9.99 .. 10$



Im Folgenden einige Beispiele für unterschiedliche Werte von a und ω_0

☑ Umdefinition der Funktionen

Umdefinition zur eleganteren Vorgangsweise bei den untenstehenden Zeichnungen

$f(t, a, \omega_0) := \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot (\Phi(t + a) - \Phi(t - a))$

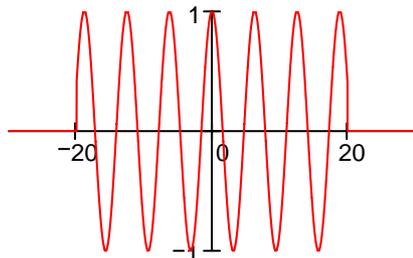
$tt := -40, -40 + 0.01 .. 40$

$FF(\omega, a, \omega_0) := \frac{\sin[a \cdot (\omega + \omega_0)]}{\omega + \omega_0} + \frac{\sin[a \cdot (\omega - \omega_0)]}{\omega - \omega_0}$

$\omega\omega := -10, -9.99 .. 10$

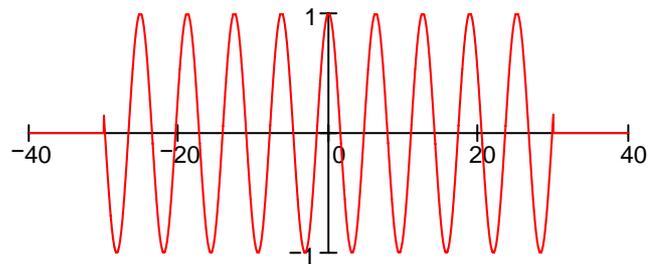
☑ Umdefinition der Funktionen

Impulsbreite $a = 20, \omega_0 = 2$

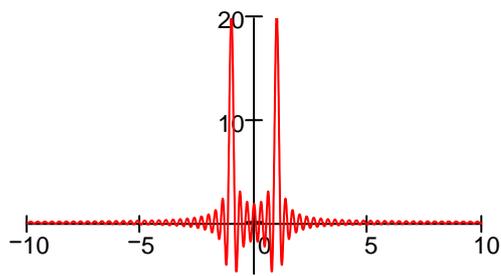


— $f(t)$

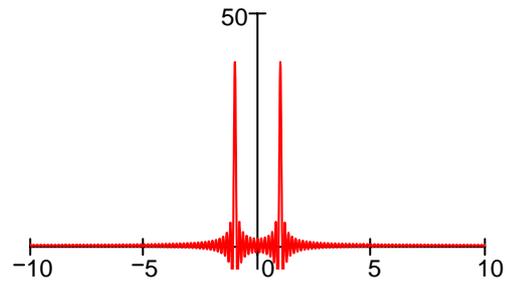
Impulsbreite $a = 30, \omega_0 = 2$



— $f(t)$

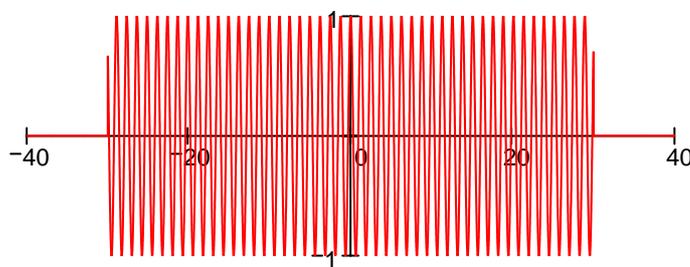


— $F(jw)$

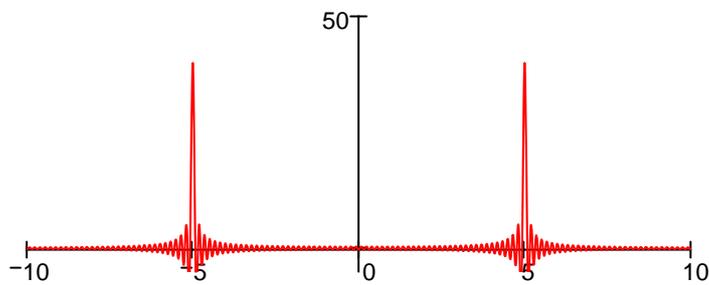


— $F(jw)$

Impulsbreite $a = 30, \omega_0 = 5$



— $f(t)$



— $F(jw)$

Wenn man a größer werden lässt, erkennt man, dass als Ergebnis der Fourier-Transformation der "reinen" Kosinusschwingung 2 Dirac-Impulse bei $\pm \omega_0$ herauskommen müssen. Dies können wir auch rechnerisch nachvollziehen.

$$\omega_0 := \omega_0$$

$$\cos(\omega_0 \cdot t) \quad \left| \begin{array}{l} \text{fourier, } t \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow \pi \cdot \Delta(\omega - \omega_0) + \pi \cdot \Delta(\omega + \omega_0)$$

Das sind 2 Dirac-Impulse bei $\omega = \omega_0$ und $\omega = -\omega_0$

Die inverse Fouriertransformation ergibt wieder die Kosinusschwingung:

$$\pi \cdot \Delta(\omega - \omega_0) + \pi \cdot \Delta(\omega + \omega_0) \quad \left| \begin{array}{l} \text{invfourier, } \omega \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow \cos(\omega_0 \cdot t)$$