Wilfried Rohm wrohm@aon.at

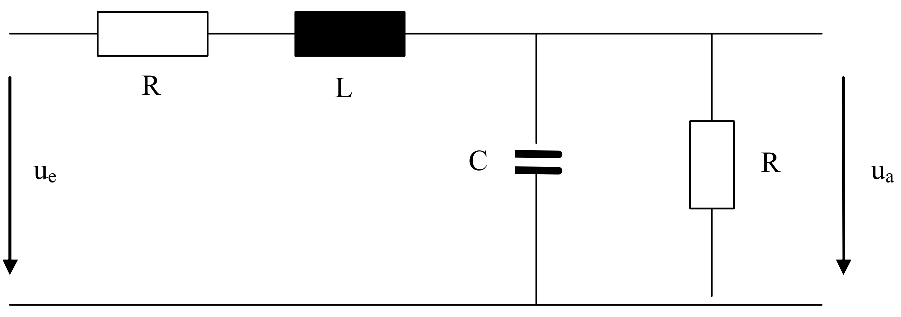
Fourieranalyse von Übertragungsfiltern

Link zur Beispielsübersicht

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:
  Fourieranalyse, Fouriersynthese, Numerische Fourieranalyse, Abtastheorem, Übertragungsfunktionen, Klirrfaktor, Bodediagramm, Ortskurven.
- Kurzzusammenfassung
  Lineare elektrische Netzwerke - also Schaltkreise mit ohm´schen, induktiven und kapazitiven Widerständen arbeiten nach dem sogenannten Superpositionsprinzip - d.h. die Wirkung eines periodischen, nichtsinusförmigen Eingangssignals ist gleich der Überlagerung der einzelnen in diesem Signal enthaltenen harmonischen Teilschwingungen $A \cdot \sin(\omega t + \phi)$.
  Das ist die theoretische Grundlage diese Beispiels.
- Lehrplanbezug:
  Angewandte Mathematik, 4.Jg. (Abteilungen mit elektrotechnischen Schwerpunkten)
- Mathcad-Version: **ab Mathcad 7**

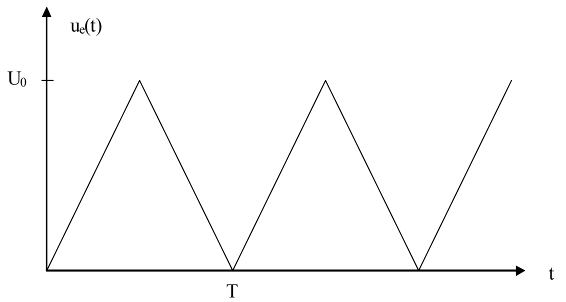
Aufgabenstellung

$R := 100\Omega$ $L := 300mH$ $C := 15\mu F$



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des Übertragungsfilters und stellen Sie diese im Bodediagramm und als Ortskurve dar. Man erkläre den speziellen Verlauf des Amplituden-Phasenganges aus elektrotechnischer Sicht.

b) Ermittlen Sie durch Fourieranalyse bzw. -synthese die Antwort des Filters auf die folgende periodische Quellspannung. Man erkläre die Filterwirkung an Hand von geeigneten graphisc Darstellungen und an Hand einer (näherungsweisen) Klirrfaktorberechnung!



$T := \frac{2\pi}{300} s$

$U_0 := 3V$

c) Obige Fourierreihe soll dann abgebrochen werden, wenn die Amplitude der n-ten Oberschwingung kleiner als 3% der zu übertragenden Grundschwingung ist. Ermitteln Sie n (allgemein) über ein kleines Mathcad-Programm.

d) Ist die Eingangsfunktion nicht analytisch (formelmäßig) darstellbar, so muss eine numerische Fourieranalyse durchgeführt werden. Dabei muss bekanntlich auf das Abtasttheorem von Shannon Bedacht genommen werden. Formulieren Sie dieses und begründen Sie es möglich exakt und ausführlich. Demonstrieren Sie seine Wirksamkeit an Hand eines beliebigen Beis (Einhaltung bzw. Nichteinhaltung).

Teil a: Aufstellen der Übertragungsfunktion, Bodediagramm, Amplituden- und Phasengang

$R := R \quad L := L \quad C := C$

Um zu verhindern, dass Mathcad beim symbolischen Rechnen Zahlen einsetzt.

$$\text{para}(Z_1, Z_2) := \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Formel für die Parallelschaltung zweier (komplexer) Widerstände

$$X_L(\omega) := j \cdot \omega \cdot L \qquad X_C(\omega) := \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

Die hier benötigten komplexen Widerstände

$$G(\omega) := \frac{\text{para}(X_C(\omega), R)}{R + X_L(\omega) + \text{para}(X_C(\omega), R)}$$

Gewöhnlicher komplexer Spannungsteiler

$$G(\omega) \rightarrow \frac{-i}{\omega \cdot C} \cdot \frac{R}{\left(\frac{-i}{\omega \cdot C} + R\right) \cdot \left(R + i \cdot \omega \cdot L - \frac{i}{\omega \cdot C} \cdot \frac{R}{\frac{-i}{\omega \cdot C} + R}\right)}$$

$G(0Hz) = ▪$

Bei 0 Sekunden kommt es zu einer Division durch 0, daher ist (insbesondere für später) eine Umformung erforderlich, die entweder durch Limesberechnung oder durch Umformung mit simplify (vereinfachen) durchgeführt werden kann.

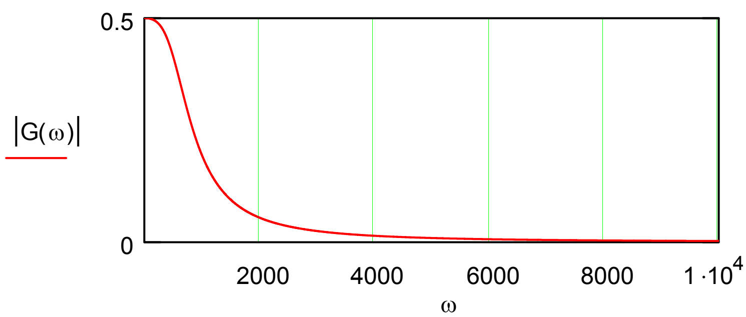
$$G(\omega) := G(\omega) \text{ vereinfachen } \rightarrow -i \cdot \frac{R}{-2 \cdot i \cdot R + R^2 \cdot \omega \cdot C + \omega \cdot L + i \cdot \omega^2 \cdot L \cdot R \cdot C}$$

$G(0Hz) = 0.5$

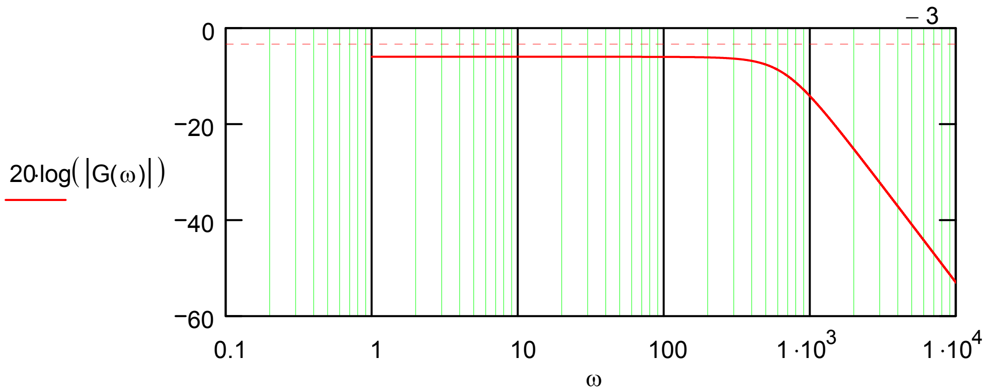
Nun ist die Übertragungsfunktoin auch für 0 Hz definiert!

Bodediagramm

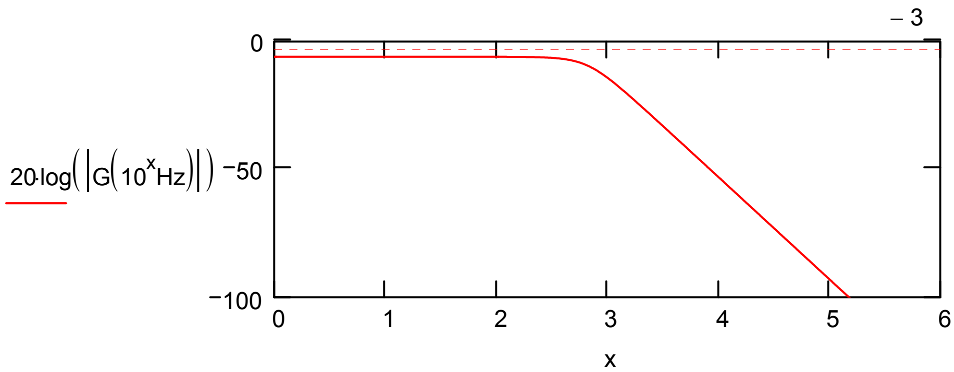
$\omega := 0Hz, 1Hz .. 10000Hz$



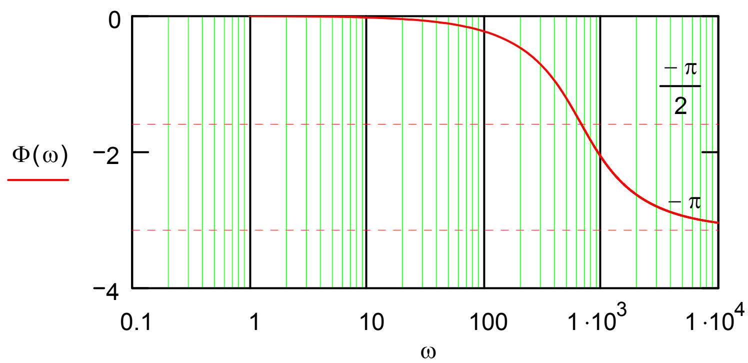
Eine Darstellung der Übertragungsform in obiger Form ist aus verschiedenen Gründen eher unüblich.
Für den Elektrotechniker sind die Interpretationsmöglichkeiten im BODE-Diagramm besser. Dort wird der Amplitudengang im doppeltlogarithmischen Maßstab und der Phasengang im einfachlogarithmischen Maßstab dargestellt.
Für den Amplitudengang werden 2 alternative Möglichkeiten der Darstellung gezeigt:



$x := 0, 0.01 .. 10$



$\Phi(\omega) := \arg(G(\omega))$



Wie man sieht, handelt es sich bei der vorliegenden Schaltung um einen **TIEFPASS,** da diese für hochfrequente Schwingungen undruchlässig ist, während niederfrequente Schwingungen (weitgehend ungehindert) passieren. Allerdings wird die -3 dB-Grenze, welche üblicherweise zur Ermittlung der Grenzfrequenz herangezogen wird (und einer Dämpfung der Ausgangsspannung auf $\frac{1}{\sqrt{2}} = 70.7\%$ der Eingangsspannung entspricht) hier stets unterschritten. Dies liegt daran, weil sich das Übertragungsglied bei niedrigen Frequenzen (ω gegen 0) als einfacher Spannungsteiler verhält, da dann $X_L = \omega \cdot L$ einen besonders geringen und $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ einen besonders hohen Widerstand besitzt.

Es ist also für 0Hz die Übertragungsfunktion $G(0Hz) = \frac{R}{2 \cdot R} = \frac{1}{2}$

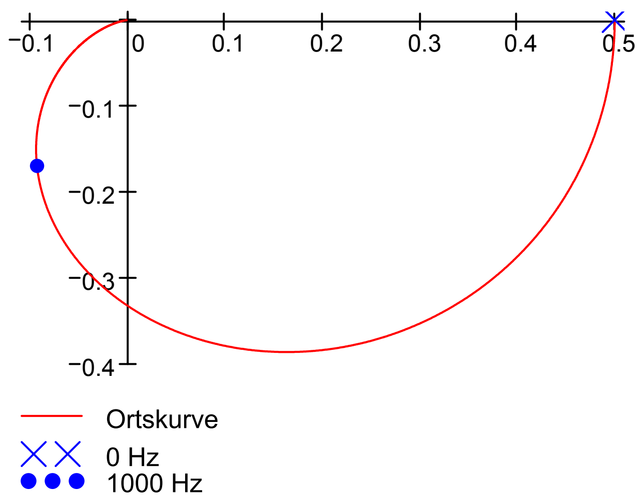
und im Bodediagramm erhalten wir bei $20 \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) = -6.021$ dB eine waagrechte Linie.

Mit steigender Frequenz steigt XL und sinkt XC, was laut Schaltung den Tiefpasscharakter bewirkt. Durch die beiden frequenzabhängigen Bauteile wird eine Filtersteilheit von (rund) 40 dB / Dekade erreicht, was die folgende Rechnung bestätigt:

$$20 \cdot \log\left(\left|G\left(10^4 Hz\right)\right|\right) - 20 \cdot \log\left(\left|G\left(10^5 Hz\right)\right|\right) = 39.995$$

Die Phasendrehung beträgt 180°, da es sich um einen Tiefpass 2.Ordnung handelt. Bei der Knickfrequenz beträgt die Pahsendrehung 90°

Ortskurve der Übertragungsfunktion



Die Ortskurve der Übertragungsfunktion erlaubt das unmittelbare Ablesen von Betrag UND Winkel (Phase) in einem Diagramm. Sie startet bei einem Realteil von 0.5 [weil G(0 Hz) = 0.5], man sieht gut, wie sich für steigende Frequenz die Phasendrehung gegen 180° annähert.

Teil b und Teil c: Analyse des Filters durch Fourieranalyse und -synthese

Definieren des Eingangssignales

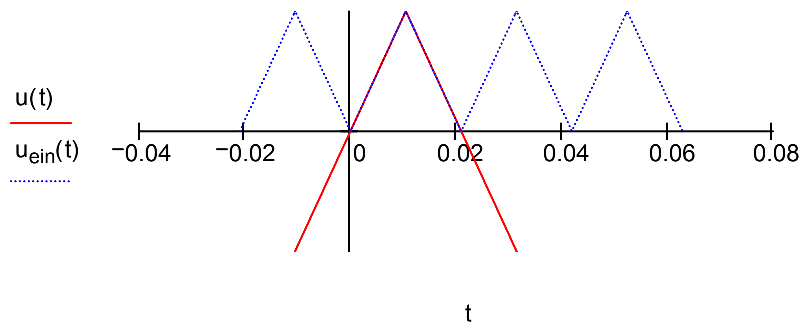
$T = 0.021\,\text{s} \qquad U_0 = 3\,\text{V}$

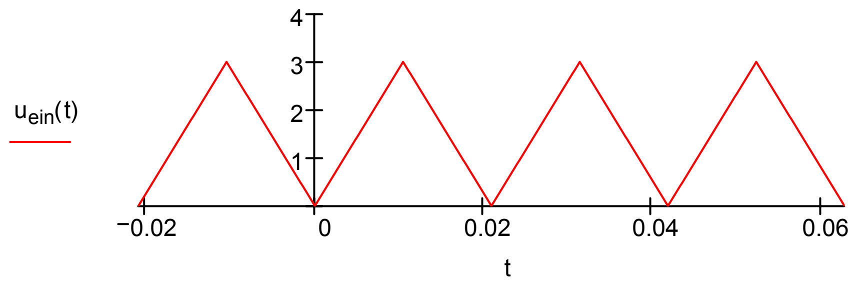
$$u(t) := \begin{cases} \dfrac{U_0}{\frac{T}{2}} \cdot t & \text{if } t < \dfrac{T}{2} \\ \left(2U_0 - \dfrac{U_0}{\frac{T}{2}} \cdot t\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u_{ein}(t) := u\left(t - T \cdot \text{floor}\left(\frac{t}{T}\right)\right)$$

Mit u(t) (eine Periode) wird gerechnet, zum Zeichnen wird die Funktion aber noch "periodisch gemacht" : Man erhält die Funktion $u_{ein}(t)$.

$$t := -T, -T + \frac{T}{100} .. 3 \cdot T$$





Aufstellen der Fourierreihe $\qquad n_{max} := 100$

$n := 0 .. n_{max}$

$$a_n := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot n \cdot t\right) dt \qquad b_n := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot n \cdot t\right) dt$$

a = (V)

	0
0	3
1	-1.216
2	0
3	-0.135
4	0
5	-0.049
6	0
7	-0.025
8	0

b = (V)

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	$-1.108 \cdot 10^{-15}$

$$A := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Da die Eingangsfuunktion gerade ist, sind alle Koeffizienten b_n erwartungsgemäß gleich 0 (abgesehen von einer eventuellen numerischen Ungenauigkeit)

Im folgenden wird die Frage, wo die Fourierreihe abzubrechen ist (Aufgabenstellung c), auf 2 verschiedene Arten gelöst (entspricht 2 verschiedenen Lösungen durch Schüler)

$$N(p, nmax) := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 2 \\ \text{while } \; i \le nmax \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{return } i \;\text{ if } \; A_i < A_1 \cdot p \wedge A_i > TOL \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ \text{return } \; nmax \end{array} \right.$$

Hier werden die oben berechneten Amplituden verwendet.

$n_{max} := N(0.03, 100)$ $\quad n_{max} = 7$

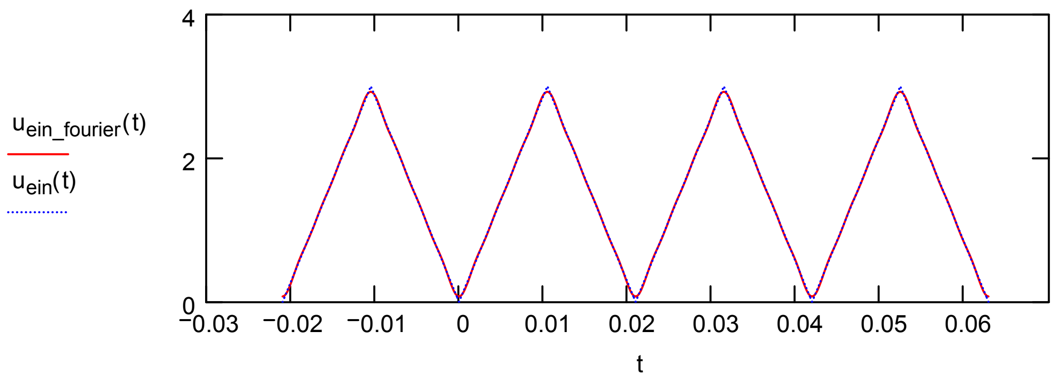
$$NMAX(p) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow 1 \\ a_j \leftarrow \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot j \cdot t\right) dt \\ b_j \leftarrow \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot j \cdot t\right) dt \\ A_j \leftarrow \sqrt{(a_j)^2 + (b_j)^2} \\ \text{while } \; A_j > A_1 \cdot p \vee A_j < TOL \\ \quad \left| \begin{array}{l} j \leftarrow j + 1 \\ a_j \leftarrow \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot j \cdot t\right) dt \\ b_j \leftarrow \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot j \cdot t\right) dt \\ A_j \leftarrow \sqrt{(a_j)^2 + (b_j)^2} \end{array} \right. \\ \text{return } \; j \end{array} \right.$$

Hier wird unabhängig von oben im Programm die Berechnung der Amplituden durchgeführt.

$NMAX(.03) = 7$

Darstellung des Eingangssignales im Vergleich mit der Fourierzerlegung

$$u_{ein\_fourier}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot n \cdot t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot n \cdot t\right) \right)$$

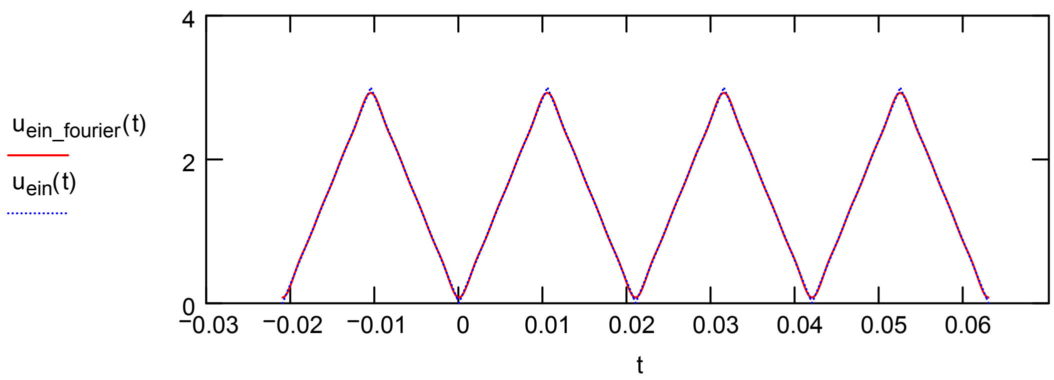


Analog kann natürlich auch die Darstellung in Amplituden-Phasenform erfolgen. Für die Berechnung der Phasenlage ist aber zu berücksichtigen, dass auf Grund numerischer Ungenauigkeiten völlig falsche Winkel erhalten werden, wenn nicht - so wie nachfolgend geschehen - diese numerischen Ungenauigkeiten mit Hilfe einer Toleranzschwelle TOL "ausgebügelt" werden:

$TOL := 10^{-6} V \qquad a_n := \text{wenn}\left(\left|a_n\right| < TOL, 0, a_n\right) \qquad b_n := \text{wenn}\left(\left|b_n\right| < TOL, 0, a_n\right)$

$$phi_n := \begin{cases} 0 & \text{if } a_n = 0 \wedge b_n = 0 \\ \text{atan2}\left(b_n, a_n\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u_{ein\_fourier}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_{max}} A_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot t + phi_n\right)$$



$\omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T}$ Kreisfrequenz der Grundschwingung (zur kürzeren Schreibweise im folgenden definiert)

Nun soll die Ausgangsspannung (am Ausgang des Vierpols) bestimmt werden. Dazu wird JEDE Schwingungskompente der Fourieranalyse durch den Vierpol geschickt und das Ergebnis am Ausgang ermittelt. Sodann wird durch Summation (Fouriersysnthese) das Ausgangssignal ermittelt.

Aus Demonstrationsgründen erfolgt dies hier auf mehrere Arten (bzw. mehrere Schreibweisen)

VARIANTE 1: Die Koeffizienten der Fourierreihe werden mit dem Betrag der Übertragungsfunktion (der jeweiligen Frequenz) multipliziert. $\Phi(n*\omega_0)$ ist die Phasenlage von $G(n*\omega_0)$

$$u_{aus\_fourier}(t) := \left(\frac{a_0}{2} \cdot |G(0Hz)|\right) \ldots + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left[\left[\left(|G(n \cdot \omega_0)| \cdot a_n\right) \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot n \cdot t + \Phi(n \cdot \omega_0)\right)\right] \ldots + |G(n \cdot \omega_0)| \cdot b_n \cdot \sin\left[(\omega_0 \cdot n \cdot t) + \Phi(n \cdot \omega_0)\right]\right]$$

VARIANTE 2: Entspricht der Variante 1, jedoch ermöglich die Darstellung der Fourierreihe in Amplituden-Phasen-Form eine etwas kürzere bzw. übersichtlerere Schreibweise.
Die Phasenverschiebung PHI(n) setzt sich nun aus 2 Komponenten zusammen: der Phasenverschiebung der jeweiligen Schwingung gemäß Fourieranalyse der Eingangsspannung und der Phasenlage von $\Phi(n*\omega_0)$

$$a2_n := a_n \cdot |G(n \cdot \omega_0)| \qquad b2_n := b_n \cdot |G(n \cdot \omega_0)| \qquad A2_n := \sqrt{(a2_n)^2 + (b2_n)^2}$$

$$PHI(n) := \Phi(n \cdot \omega_0) + phi_n$$

$$u_{aus\_fourier}(t) := \frac{a_0}{2} \cdot |G(0Hz)| + \sum_{n=1}^{n_{max}} A2_n \cdot \sin\left[(\omega_0 \cdot n \cdot t) + PHI(n)\right]$$

VARIANTE 3: Diese verwendet die komplexe Darstellung der Einzelschwingungen. Dadurch ist direkt eine Multiplikation mit der (komplexen) Übertragungsfunktion möglich. Das Ergebnis wird wiederum auf 2 Arten (welche den beiden obiegen Varianten 1 und 2 entsprechen) dargestellt.
Anmerkung: Die Darstellungsform hat nichts mit der sogenannten "komplexen Fourierreihe" zu tun .

$$c_n := b_n + i \cdot a_n$$

Komplexe Darstellung der Einzelschwingungen, dadurch können sie einfach mit der Übertragungsfunktion multipliziert werden

$$cc_n := c_n \cdot G(\omega_0 \cdot n)$$

Für das Ausgangasignal werden hier - zur Unterscheidung - die Bezeichnungen aa,bb,cc etc gewählt

$$aa_n := \mathrm{Im}(cc_n) \qquad bb_n := \mathrm{Re}(cc_n)$$

$$AA_n := \sqrt{(aa_n)^2 + (bb_n)^2} \qquad AA_0 := \frac{aa_0}{2}$$

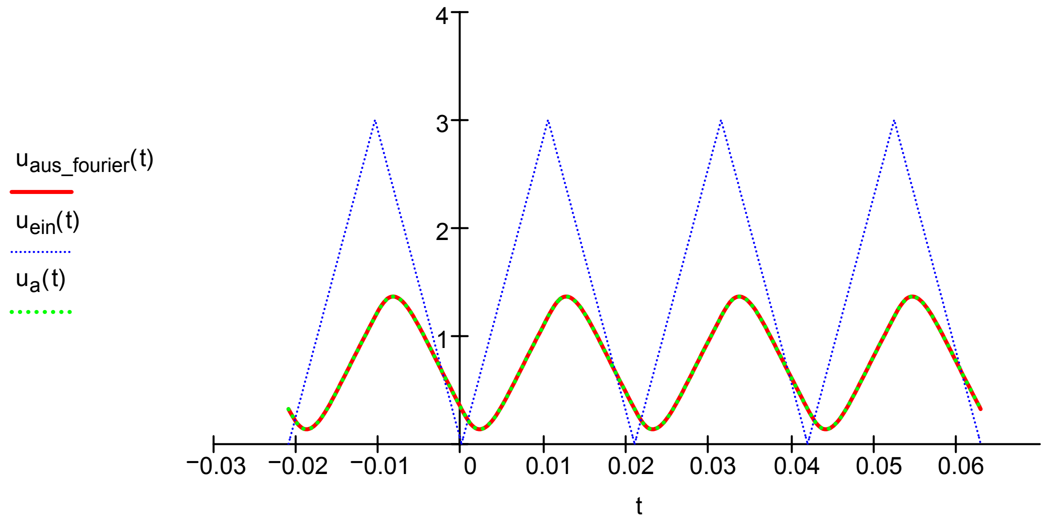
$$aa_n := \mathrm{wenn}(|aa_n| < TOL, 0, aa_n) \qquad bb_n := \mathrm{wenn}(|bb_n| < TOL, 0, bb_n)$$

$$phiphi_n := \begin{cases} 0 & \text{if } aa_n = 0 \wedge bb_n = 0 \\ \mathrm{atan2}(bb_n, aa_n) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u_a(t) := \frac{aa_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left(aa_n \cdot \cos(\omega_0 \cdot n \cdot t) + bb_n \cdot \sin(\omega_0 \cdot n \cdot t)\right)$$

$$u_a(t) := AA_0 + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left|AA_n\right| \cdot \sin\left(n \cdot \omega_0 \cdot t + phiphi_n\right)$$

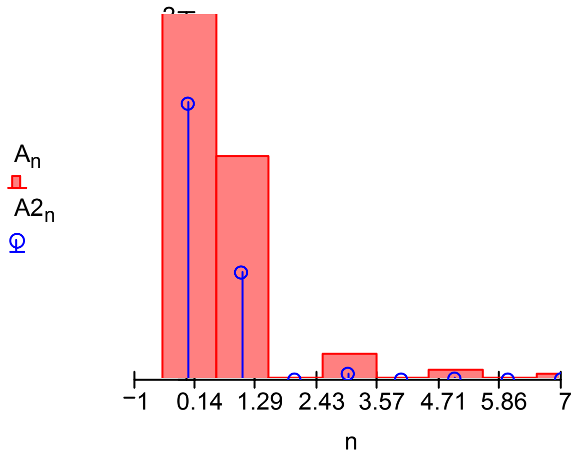
Darstellung in Amplituden-Phasenform



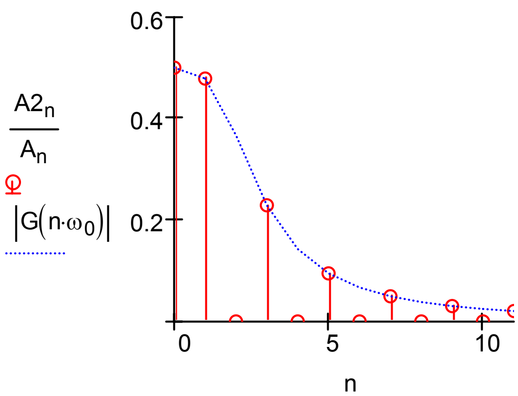
Klirrfaktorberechnung

$$k_1 := \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{n_{max}} (A_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{max}} (A_i)^2}} \qquad k_1 = 0.119$$

$$k_2 := \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{n_{max}} (A2_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{max}} (A2_i)^2}} \qquad k_2 = 0.054$$



Der Vergleich der beiden Klirrfaktoren vor (= k1) und nach dem Durchgang durch den Filter (k2) zeigt, dass der Oberwellenanteil kleiner wird - was natürlich auf Grund des Tiefpasscharakters der Schaltung evident ist (Höhere Frequentzen werden stärker gedämpft!).
Ähnliches zeigen die nebenstehenden grafischen Vergleiche!



Teil d: Abtastheorem und seine Einhaltung bzw. Nichteinhaltung

Zum Berechnen der notwendigen 2n+1 Koeffizienten (a0,an,bn) durch numerische Fourieranalyse benötigt man zumindest N = 2*n+1 Punkte, welche N Abtastungen ermöglichen

Also : $N \ge 2 \cdot n + 1$

$N \cdot f_0 \ge (2 \cdot n + 1) \cdot f_0$ f_0 .... Frequenz der Grundschwingung

$f_A \ge (2 \cdot n \cdot f_0) + f_0$ f_A ... Abtastfrequenz

$f_A > 2 \cdot f_{max}$

Das ist das Abtatsttheorem nach SHANNON: Die Abtastfrquenz muss zur vollständigen Rekonstruktion des Signals größer als die (im Signal) höchste auftretende Frequenz sein!

Das folgende Beispiel soll dies anschaulich demonstrieren:

$f(t) := 5 \cdot \sin(t) + 3 \cdot \cos(3 \cdot t) + 1 \cdot \sin(8 \cdot t)$ Diese Funktoin soll durch Abtastung rekonstruiert werden!

Die Abtastung des Signals soll nun auf 2 Arten erfolgen:
* Im ersten Fall (mit N=17) ist das Abtatstheorem gerade erfüllt und damit eine vollständige Rekonstruktion der Funktion möglich.
* Im zweiten Fall (NN<17) wird demonstriert, dass Unterabtasttung keine vollständige Rekonstruktion erlaubt!

$N := 17$ (>2*8) Werte

$T := 2 \cdot \pi$

$i := 0 .. N - 1$

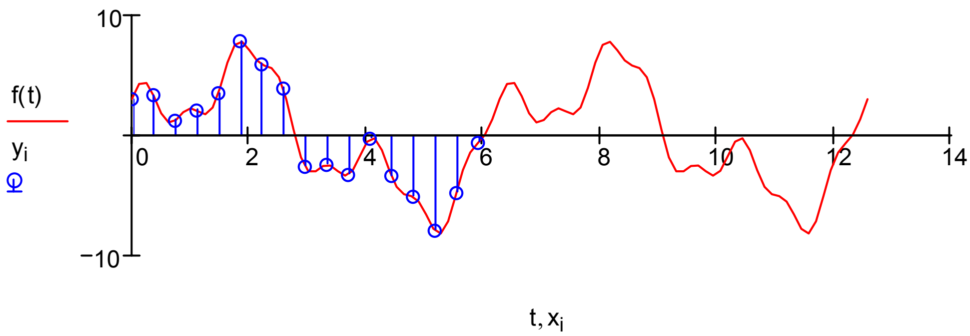
$n := 0 .. \frac{N-1}{2}$

$\Delta x := \frac{T}{N}$ $\Delta x = 0.37$

$t := 0, \frac{T}{50} .. 2 \cdot T$

$x_i := i \cdot \Delta x$

$y_i := f(x_i)$



N = 17

Numerische Fourieranalyse:

$$an_0 := \frac{2}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j$$

$$an_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot x_j\right)$$

$$bn_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot x_j\right)$$

$$f_{neu}(tt) := \frac{an_0}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(an_j \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot j \cdot tt\right) + bn_j \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot j \cdot tt\right)\right)$$

Neuerliches Abtasten des Signals (unterabgetastet bzw. NN wird unten neben der Grafik bestimmt)

$NN = 12$ $\qquad T := 2 \cdot \pi$

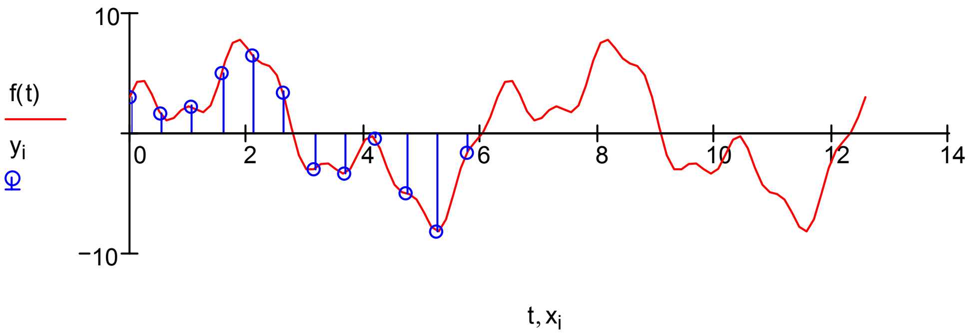
$i := 0 .. NN - 1$

$\Delta x := \frac{T}{NN}$ $\qquad \Delta x = 0.524$

$t := 0, \frac{T}{50} .. 2 \cdot T$

$x_i := i \cdot \Delta x$

$y_i := f(x_i)$ $\qquad n := 0 .. \frac{NN - 1}{2}$



Numerische Fourieranalyse:

$$an_0 := \frac{2}{N} \cdot \sum_{j=0}^{NN-1} y_j$$

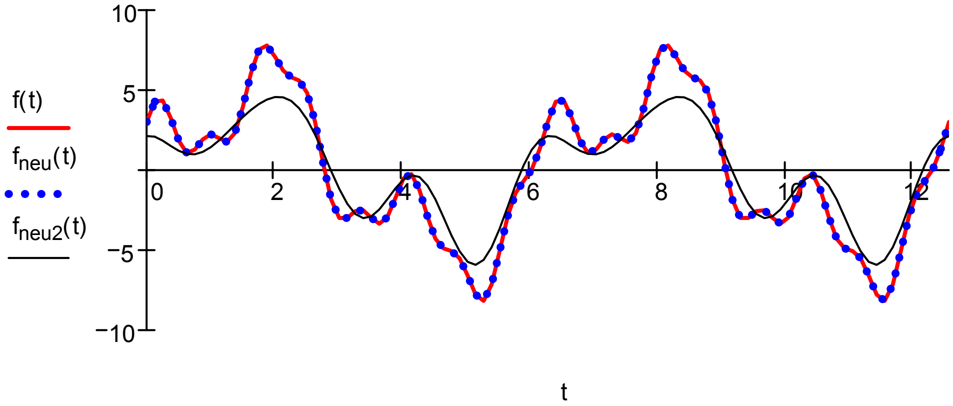
$$an_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{j=0}^{NN-1} y_j \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot x_j\right)$$

$$bn_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{j=0}^{NN-1} y_j \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot x_j\right)$$

$$f_{neu2}(tt) := \frac{an_0}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{NN-1}{2}} \left(an_j \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot j \cdot tt\right) + bn_j \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot j \cdot tt\right)\right)$$

Vergleich von Einhaltung/ Nicht-Einhaltung des Shannon Theorems:

$NN \equiv 12$



[Link zur Beispielsübersicht]