

Wilfried Rohm

## Erwartungswert und Varianz bei Verteilungen und Glücksspielen



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**
  - Erwartungswerte und Varianz (Standardabweichung) von diskreten und stetigen Verteilungen, Erwartungswert und Varianz bei Glücksspielen
- **Kurzzusammenfassung**
  - \* Begriffsdefinitionen (Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung)
  - \* Berechnung von Erwartungswert und Varianz bei diskreten Verteilungen (Binomialverteilung, Hypergeometrische Verteilung, Poissonverteilung)
  - \* Berechnung von Erwartungswert und Varianz bei stetigen Verteilungen (Normalverteilung, Chi-Quadratverteilung)
  - \* Berechnung des Erwartungswertes (= durchschnittliche Lebensdauer) bei Weibullverteilung und Exponentialverteilung
  - \* Berechnung von Erwartungswerten und Varianz bei Glücksspielen (Chuck a Luck, Roulette)
- **Didaktische Überlegungen**

In den ersten Teilen werden die Fähigkeiten von Computeralgebrasystemen ausgelotet und einige sonst in der Schule nicht berechenbare Ergebnisse ermittelt. Beim Thema Glücksspiele geht es letztlich auch darum, aufzuzeigen, dass etwa beim Roulette die Gewinnerwartung negativ ist, die Varianz aber die Attraktivität (aber auch die finanziellen Gefahren!) der Setzvarianten wesentlich mitbestimmt.
- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**

Angewandte Mathematik, 4./5. Jahrgang, alle Abteilungen
- **Mathcad-Version:**

Mathcad 11 (darauf zugeschnitten, Berechnungen teilweise versionsabhängig!)
- **Literaturangaben:**

Roulette  
[www.casino-aktuell.com/index.htm](http://www.casino-aktuell.com/index.htm)  
[www.gluecksspielschule.de/index.html](http://www.gluecksspielschule.de/index.html)



[1\) Zur Motivation dieses Artikels](#)

[2\) Begriffsdefinitionen](#)

[3\) Erwartungswert und Varianz von diskreten Verteilungstypen](#)

[4\) Erwartungswert und Varianz bei stetigen Verteilungen](#)

[5\) Erwartungswert \(=mittlere Lebensdauer\) bei der Weibullverteilung](#)

[6\) Erwartungswert und Varianz bei Glücksspielen \(Pascal, Chuck a Luck, Roulette\)](#)

## 1) Zur Motivation dieses Artikels

[zum Menü](#)

"Erwartungswert" und "Varianz" sind Themen im Schulunterricht, die man zwar nicht umgehen kann (wenn man Fragestellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik behandelt), die aber fast immer auf das absolut notwendige Minimum beschränkt bleiben. Es gibt aber auch für den Schulunterricht interessante Anknüpfungspunkte.

Ich persönlich bin in dreierlei Hinsicht auf diese Begriffe gestoßen und möchte genau diese 3 Aspekte in diesem Artikel weitergeben:

- 1) Die Berechnung von Erwartungswerten bzw. Varianz verschiedener Verteilungen ist eine besondere Spielweise bei der Anwendung von Computeralgebrasystemen. Jeder, der (so wie ich bei einem entsprechenden Proseminar als Student!) einmal selbständig "zu Fuß" derartige Berechnungen durchgeführt hat, erstarrt in gewisser Ehrfurcht vor den Möglichkeiten moderner Computeralgebrasysteme in dieser Hinsicht. Auf der anderen Seite zeigen diese Berechnungen aber auch gleichzeitig (durchaus unterschiedliche!) Grenzen von Computeralgebrasystemen auf.  
Auch Mathcad verhält sich teilweise eigenartig: Manche Berechnungen (aber nicht alle!) sind symbolisch möglich, manche Berechnungen sind mit Zahlenwerten symbolisch möglich (aber nicht allgemein!), manche Berechnungen (insbesondere bei uneigentlichen Integralen) gelingen symbolisch mit Zahlen, aber nicht numerisch! Dies ist zum Teil sogar von den Zahlenwerten abhängig!  
Jedenfalls lohnt es sich, gegebenenfalls auch einen Vergleich zwischen verschiedenen Computeralgebrasystemen durchzuführen, die sich (wohl auf Grund unterschiedlicher Vorgangsweise bei symbolischen Berechnungen) recht unterschiedlich verhalten. Im Fall von Mathcad konnte ich auch starke Unterschiede zwischen einzelnen Versionen beobachten - aus diesem Grund ist dieser Artikel auch nur für eine Version (Version 11) geschrieben!
- 2) Wenn auch Punkt 1) vielleicht etwas zu "akademisch" für den Schulunterricht wirkt, gibt es einen speziellen Fall bei den Verteilungen, der von besonderem praktischem Interesse ist: Das ist der Erwartungswert der Lebensdauerverteilungen (Exponentialverteilung, Weibullverteilung), wo dieser Begriff als "mittlere Lebensdauer" auch von besonderer anschaulicher Bedeutung ist. Als Parameter der Lebensdauerverteilung kommt aber ein Wert vor ("charakteristische Lebensdauer"), der "zum Teil" (aber eben nur "zum Teil", genauer gesagt: im Falle der Exponentialverteilung) mit der "mittleren Lebensdauer" identisch ist, im Falle der (praktisch wichtigeren) Weibullverteilung jedoch davon abweicht. Es schien mir persönlich eine Herausforderung, diesen wichtigen Zusammenhang mit Hilfe von Mathcad im Schulunterricht anschaulich darstellen zu können.
- 3) Ich habe mich einige Zeit lang (ausgehend vom Casinospiel BLACK JACK) mit Glücksspielen und entsprechenden Strategien beschäftigt und bin in diesem Zusammenhang Herrn Dr. Ferdinand Österreicher (Universität Salzburg) für Motivation und Zusammenarbeit sehr dankbar. Um verschiedene Strategien (etwa beim ROULETTE) und ihre unterschiedliche Beliebtheit miteinander vergleichen zu können, muss man für jede dieser Strategien den zu erwartenden Gewinn (meistens wohl eher VERLUST!) und auch die Varianz bzw. Standardabweichung berechnen. Das ist ein Thema, das nicht nur gut ankommt im Unterricht, sondern das mir auch recht wichtig erscheint, um den Schülern das Wesen kommerzieller "Glücksspiele" vor Augen zu führen. Die sogenannte "Spielsucht" ist eine nicht zu unterschätzende Gefahr, die durchaus auch krankhafte Züge bekommen kann und leider auch gar nicht so selten tragisch enden kann (finanzieller und persönlicher Ruin, manchmal sogar Selbstmord).  
So wie man leidenschaftliche Raucher nicht vor dem Weiterrauchen mit Bildern von Raucherlungen und ähnlichem abhalten kann, wird es auch nicht gelingen, mit derartigen Berechnungen leidenschaftliche Spieler zu "heilen". Aber: So wie es gelingen kann, mit dem Bild einer Raucherlunge einen jungen Menschen vom Rauchen fernzuhalten, kann ich mir vorstellen, dass derartige Berechnungen und eine entsprechende Reflexion bzw. Diskussion der Ergebnisse im Unterricht den einen oder anderen schon im Vorfeld vor der Gefahr der Spielsucht warnen und eventuell auch bewahren kann!

## 2) Begriffsdefinitionen :

[zum Menü](#)

Wir gehen aus von der geläufigen Definition für den arithmetischen Mittelwert aus:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N$$

$\bar{x}$  wird als Schätzwert für den "Erwartungswert"  $\mu$  betrachtet, sozusagen den Mittelwert der Grundgesamtheit.

**Beispiel:** Berechnung des Durchschnittsgewichtes der Schüler einer Schule mit 350 Schülern:

$$\bar{x} = \frac{(53 + 65 + 56 + 58 + 53 + 73 + 75 + 73 + 58 + 81 + 66 + \dots)}{350}$$

Mit Hilfe der relativen Häufigkeiten könnte diese Formel umgeschrieben werden, etwa so:

$$\bar{x} = 53 \cdot \frac{2}{350} + 54 \cdot \frac{1}{350} + 55 \cdot \frac{7}{350} + 56 \cdot \frac{12}{350} + \dots$$

allgemein:

$$\bar{x} = (x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \dots + x_n \cdot h_n) = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot h_i) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n h_i = 1$$

**in Worten:** Der Mittelwert wird berechnet, indem die einzelnen Werte mit ihren relativen Häufigkeiten gewichtet werden (auch: "gewichteter Mittelwert").

Strukturell gleich ist nun die Formel für den Erwartungswert  $\mu = E(X)$  einer diskreten Zufallsgröße definiert

$$\mu = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot g(x_i)) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n g(x_i) = 1 \quad \text{und} \quad g(x_i) = p(X = x_i)$$

**in Worten:** Der Erwartungswert wird berechnet, indem die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $g(x_i)$  gewichtet werden! Eigentlich handelt es sich beim Erwartungswert um eine Verallgemeinerung des arithmetischen Mittelwertes.

Der Erwartungswert einer stetig verteilten Zufallsgröße wird daher zu:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g(x) dx \quad \text{mit der Dichtefunktion } g(x).$$

**Anmerkung :** Für die x-Koordinate des Schwerpunktes einer in der (x,y)-Ebene liegenden ebenen Figur gilt:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A x dA = \frac{1}{A} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y(x) dx$$

Da für eine Dichtefunktion  $g(x)$  gelten muß:  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$

ist hier  $A=1$  und damit  $\mu$  die **Schwerpunktskoordinate in x-Richtung**, was eine entsprechende anschauliche Deutung des Erwartungswertes (wie auch des arithmetischen Mittelwertes) erlaubt!

Unter Varianz einer Zufallsgröße  $X$  versteht man den Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Erwartungswert  $\mu$ , also:

$$V(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

Für eine diskrete Zufallsvariable ergibt sich daher:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - \mu)^2 \cdot g(x_i)]$$

in Worten: die quadrierten Abweichungen werden mit der jeweiligen Auftretenswahrscheinlichkeit  $g(x_i)$  gewichtet.

Analog zu oben gilt für stetige Zufallsvariablen mit Dichtefunktion  $g(x)$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot g(x) dx$$

Aus Dimensionsgründen zieht man die Wurzel aus der Varianz und erhält damit die **Standardabweichung**  $\sigma$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$$

### 3) Erwartungswert und Varianz von diskreten Verteilungstypen

[zum Menü](#)

**Hinweis** : Die in Mathcad eingebauten Funktionen für die Verteilungsfunktionen arbeiten nur numerisch. Für eine symbolische Berechnung müssen daher die Wahrscheinlichkeitsfunktionen und auch die Kombinationen geeignet selbst definiert werden!

**Binomialverteilung:** Zunächst wird die Kombination für die symbolische Rechnung selbst definiert

$$\text{comb}(n, k) := \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

$$g_{bi}(x, n, p) := \text{comb}(n, x) \cdot p^x \cdot (1 - p)^{(n-x)}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung

$$E_{bi}(n, p) := \sum_{x=0}^n (x \cdot g_{bi}(x, n, p))$$

$$E_{bi}(100, 0.02) = 2$$

$$E_{bi}(n, p) \text{ vereinfachen} \rightarrow n \cdot p$$

Die symbolische Rechnung gelingt!

$$V_{bi}(n, p) := \sum_{x=0}^n [(x - n \cdot p)^2 \cdot g_{bi}(x, n, p)]$$

$$V_{bi}(100, 0.02) = 1.96$$

Vergleich mit der Formel  $V(x) = n \cdot p \cdot (1 - p)$ :

$$100 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = 1.96$$

$$V_{bi}(n, p) \text{ vereinfachen} \rightarrow -[p - (-1)^{2 \cdot n}] \cdot n \cdot p$$

Die symbolische Rechnung gelingt, allerdings weiss Mathcad nicht, dass  $n$  eine natürliche Zahl ist und daher  $(-1)^{2n} = 1$  ist, sodass wir das Ergebnis noch vereinfachen können zu der üblichen Formel:

$$V_{bi}(n, p) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

**Hypergeometrische Verteilung:**

$$g_{\text{hyp}}(x, N, d, n) := \frac{\text{comb}(d, x) \cdot \text{comb}(N - d, n - x)}{\text{comb}(N, n)}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion der hypergeometrischen Verteilung

$$E_{\text{hyp}}(N, d, n) := \sum_{x=0}^n (x \cdot g_{\text{hyp}}(x, N, d, n))$$

$$E_{\text{hyp}}(N, d, n) \text{ vereinfachen} \rightarrow \frac{d}{N} \cdot n$$

Die symbolische Rechnung gelingt!

**Hinweis** : Beim Übergang zum Modell der Binomialverteilung setzt man  $p = \frac{d}{N}$

Daher ergibt sich dann:  $\mu_{\text{bi}} = p \cdot n$  in Übereinstimmung mit oben!

$$V_{\text{hyp}}(N, d, n) := \sum_{x=0}^n \left[ \left( x - n \cdot \frac{d}{N} \right)^2 \cdot g_{\text{hyp}}(x, N, d, n) \right]$$

$$V_{\text{hyp}}(N, d, n) \text{ vereinfachen} \rightarrow \frac{d^2}{N^2} \cdot n^2 \cdot \frac{\Gamma(N - d + 1)}{\Gamma(N - d - n + 1) \cdot \Gamma(N + 1)} \cdot \Gamma(N - n + 1)$$

Wie man sieht, gelingt hier NICHT die symbolische Berechnung! Offenbar wird der Ausdruck zum Vereinfachen zu kompliziert, was jeder anchvolziehen kann, der dies schon einmal selbst durchgerechnet hat!

Das Ergebnis wäre:

$$V_{2\text{hyp}}(N, d, n) := n \cdot \frac{d}{N} \cdot \left( 1 - \frac{d}{N} \right) \cdot \frac{N - n}{N - 1}$$

Numerisch können wir die Gleichheit der beiden Formeln verifizieren:

$$V_{\text{hyp}}(45, 6, 6) = 0.615$$

$$V_{2\text{hyp}}(45, 6, 6) = 0.615$$

$$V_{\text{hyp}}(45, 6, 6) \rightarrow \frac{169}{275} = 0.615$$

Das Beispiel zeigt, dass die Berechnung mit speziellen Zahlen sowohl symbolisch als auch numerisch möglich ist!

**Hinweis** : Der letzte Ausdruck in der obigen Formel kann folgendermassen vereinfacht werden

$$\frac{N - n}{N - 1} \text{ ungefähr zu } \frac{N - n}{N} = 1 - \frac{n}{N}$$

$\frac{n}{N}$  heisst auch "Auswahlsatz" und wird im Allgemeinen als vernachlässigbar angesehen, wenn  $N > 20 \cdot n$ .

In diesem Fall erhält man mit  $p = \frac{d}{N}$  die Formel für die Varianz der Binomialverteilung!

**Poissonverteilung**

$$g_{po}(x, \mu) := \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung

$$E_{po}(\mu) := \sum_{x=0}^{\infty} (x \cdot g_{po}(x, \mu))$$

$E_{po}(\mu)$  vereinfachen  $\rightarrow \mu$

$$V_{po}(\mu) := \sum_{x=0}^{\infty} [(x - \mu)^2 \cdot g_{po}(x, \mu)]$$

$V_{po}(\mu)$  vereinfachen  $\rightarrow \mu$

Im Falle der Poissonverteilung gelangen also die symbolischen Berechnungen von Erwartungswert und Varianz. Dies erscheint im Vergleich zur hypergeometrischen Verteilung auf Grund der rechtechnisch wesentlich einfacheren Definition (keine Fakultäten bzw. Kombinationen!) verständlich!

**3) Erwartungswert und Varianz von stetigen Verteilungstypen**

[zum Menü](#)

Hinweis : Die eingebauten Funktionen für die Verteilungsfunktionen arbeiten nur numerisch. Für eine symbolische Berechnung müssen daher die Dichtefunktionen selbst definiert werden!

**Normalverteilung:**

$$g_{nv}(x, \mu, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Dichtefunktion der Normalverteilung

$$E_{nv}(\mu, \sigma) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g_{nv}(x, \mu, \sigma) dx$$

$$E_{nv}(\mu, \sigma) \text{ vereinfachen } \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right] dx$$

$E_{nv}(0, 1) \rightarrow 0$

$E_{nv}(0, 1) = 0$

richtig !

$E_{nv}(1000, 10) \rightarrow 1000$

$E_{nv}(1000, 10) = 0$

numerisch falsch!

$$V_{nv}(\mu, \sigma) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot g_{nv}(x, \mu, \sigma) dx$$

$$V_{nv}(\mu, \sigma) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot (x - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right] dx$$

$$V_{nv}(0, 1) \rightarrow 1$$

$$V_{nv}(0, 1) = 1$$

richtig !

$$V_{nv}(1000, 10) \rightarrow 100$$

$$V_{nv}(1000, 10) = 0$$

numerisch falsch !

**Resümee:** Die symbolische Berechnung gelingt nicht allgemein, jedoch unter Einsetzen bestimmter Zahlen! Die numerische Rechnung des uneigentlichen Integrals ist teilweise falsch!!

Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass Mathcad dies in der Version 6 und 7 allerdings sehr wohl konnte! Bekanntlich wurde die symbolische Berechnung beim Übergang zur Version 8 in Mathcad intern stark verändert (neuer Kernel). Jedenfalls gilt:

$$E_{nv}(\mu, \sigma) = \mu$$

$$V_{nv}(\mu, \sigma) = \sigma^2$$

**Chiquadratverteilung:** Die  $\chi^2$ -Verteilung ist als links-schiefe Verteilung bezüglich des Erwartungswertes besonders interessant. Er unterscheidet sich - im Gegensatz zur Normalverteilung - sowohl gegenüber dem MODUS (=Maximum) als auch gegenüber dem MEDIAN (=50%-Wert). Dies wird hier sowohl rechnerisch als auch graphisch gezeigt. Für das (intuitive) Verständnis bzw. überschlagsweise Ermittlung von Ergebnissen der Statistuk ist ausserdem von Bedeutung, dass der Erwartungswert der normierten Chiquadratverteilung gleich dem Freiheitsgrad der Verteilung ist.

Dieses Ergebnis wird hier verifiziert. Es ist intuitiv verständlich, wenn man an das Versuchsmodell denkt, das zur  $\chi^2$ -Verteilung führt (siehe der Artikel "**Prüfverteilungen**" vom gleichen Autor auf [www.math-tech.at](http://www.math-tech.at))

Es gilt:  $\chi^2 = (n - 1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} = f \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$  und daher:  $E(\chi^2) = f = n - 1$

$$g_{chi}(x, f) := \frac{\frac{f-1}{x^2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{\frac{f}{2^2} \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}$$

Dichtefunktion der  $\chi^2$ -Verteilung.

$$G_{chi}(x, f) := \int_0^x g_{chi}(y, f) dy$$

Verteilungsfunktion der  $\chi^2$ -Verteilung (wird unten zur Berechnung des Medians benötigt!)

$$E_{chi}(f) := \int_0^{\infty} x \cdot g_{chi}(x, f) dx$$

$$E_{chi}(f) \text{ vereinfachen} \rightarrow \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}f} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot x\right) \cdot \frac{\frac{-1}{2}f}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \cdot f\right)} dx$$

$$E_{\text{chi}}(9) \rightarrow 9$$

$$E_{\text{chi}}(9) = 9$$

$$E_{\text{chi}}(10) \rightarrow 10$$

$$E_{\text{chi}}(10) = 10$$

$$E_{\text{chi}}(99) \rightarrow 99$$

$$E_{\text{chi}}(99) = 99$$

**Resümee:** Die Berechnung gelingt symbolisch UND numerisch mit speziellen Zahlen, aber nicht allgemein!

### Rechnerischer und graphischer Vergleich:

Numerische Berechnung des Medians  $m$  am Beispiel  $f=9$  (also  $n=10$ ; kann natürlich variiert werden!):

$$f := 9$$

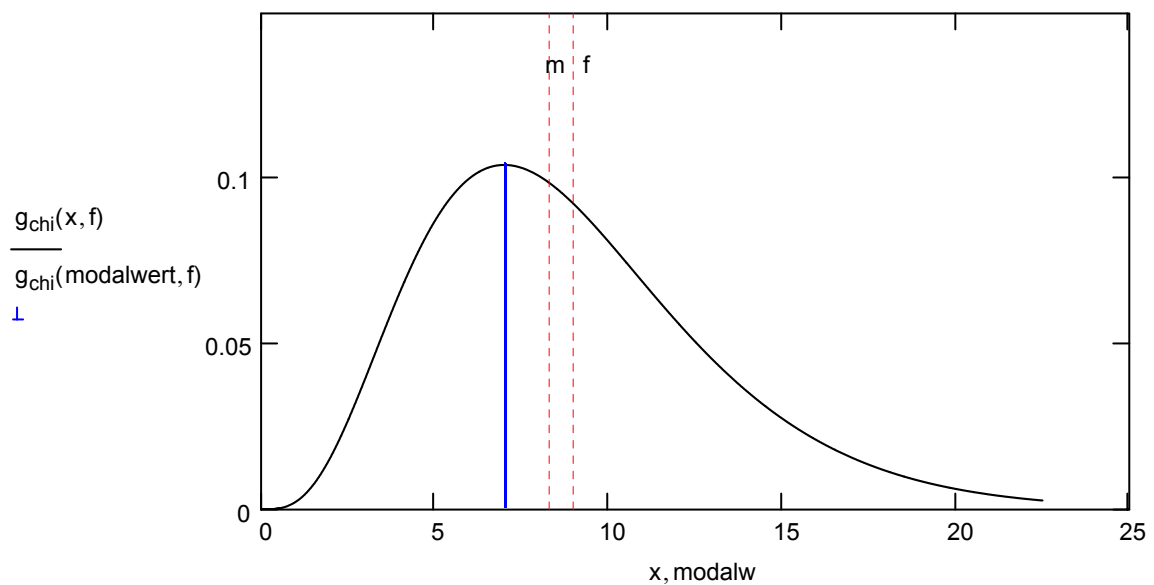
$$m := \text{wurzel}\left(G_{\text{chi}}(x, f) - 0.5, x, \frac{f}{10}, f\right) \quad m = 8.343$$

Numerische Berechnung des Modalwertes am Beispiel  $f=9$  (also  $n=10$ ):

$$\text{modalw} := \text{wurzel}\left(\frac{d}{dx}g_{\text{chi}}(x, f), x, \frac{f}{10}, f\right) \quad \text{modalw} = 7$$

**Veranschaulichung ( $m$  = Median;  $f$  = Erwartungswert ; blauer Strich: Modalwert)**

$$x := 0, 0.01 \dots 2.5 \cdot f$$





#### 4) Erwartungswert (=mittlere Lebensdauer) bei der Weibullverteilung

[zum Menü](#)

Die Weibullverteilung ist jener Verteilungstyp, der meist für die Beschreibung des Lebensdauerhaltens technischer Systeme (Glühlampen, elektronische Baugruppen, ...) verwendet wird. Die Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit (reliability) lautet:

$$R(t, T, b) := e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

Die Bedeutung der Parameter ist:  $b$  ... Ausfallsteilheit (in praktischen Fällen meist im Bereich 0,5 - 5,5) für  $b=1$  liegt der Spezialfall der **Exponentialverteilung** vor.

$T$  ... sogenannte "**charakteristische Lebensdauer**"

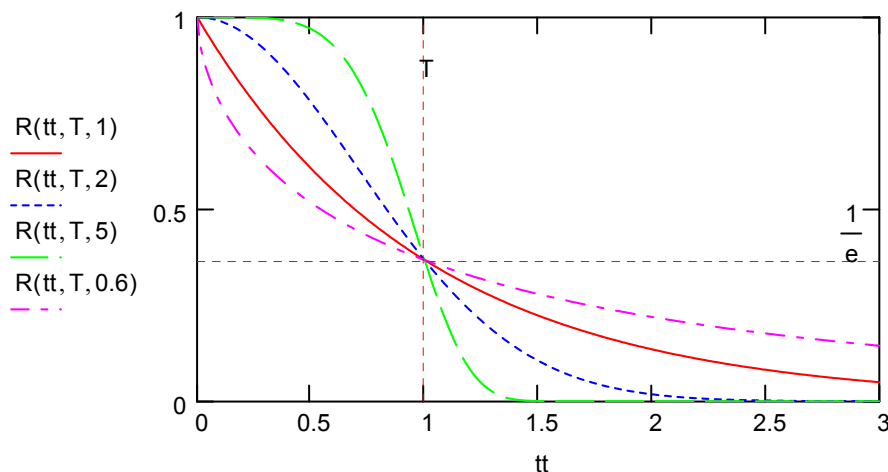
Die **charakteristische Lebensdauer  $T$**  ist jene Zeit, welche  $\frac{1}{e} = 36.788\%$  der Lampen überleben. Dies erhält man, wenn man in der Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit  $t=T$  einsetzt:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad \text{wird zu} \quad R(T) = e^{-1}$$

Interessanter Weise hat die charakteristische Lebensdauer einen Wert, der **UNABHÄNGIG** von der Ausfallsteilheit  $b$  ist, wie man auch aus dem folgenden Diagramm sieht.

$$T := 1 \quad T := T$$

$$tt := 0, \frac{T}{100} \dots 3 \cdot T$$



Die **mittlere oder durchschnittliche Lebensdauer** hingegen entspricht dem **ERWARTUNGSWERT** der entsprechenden Weibullverteilung und wird daher folgendermaßen berechnet:

$$G_{\text{weibull}}(t, T, b) := 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad \text{Verteilungsfunktion der Weibullverteilung} = 1 - R(t)$$

Wir benötigen die Dichtefunktion der Weibullverteilung (=Ableitung der Verteilungsfunktion):

$$g_{\text{weibull}}(t, T, b) := \frac{d}{dt} G_{\text{weibull}}(t, T, b)$$

$$g_{\text{weibull}}(t, T, b) \rightarrow \left(\frac{t}{T}\right)^b \cdot \frac{b}{t} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{T}\right)^b\right]$$

$$\mu(T, b) := \int_0^{\infty} t \cdot g_{\text{weibull}}(t, T, b) dt$$

Erwartungswert = mittlere Lebensdauer einer Weibullverteilung mit den Parametern b und T.

Anschaulich entspricht die mittlere Lebensdauer natürlich wiederum dem Schwerpunkt der Abszisse der Dichtefunktion!

Die mittlere Lebensdauer  $\mu$  und die charakteristische Lebensdauer T können über einen relativ kompliziert zu berechnenden Faktor a(b) miteinander in Beziehung gesetzt werden (siehe weiter unten)

$$\mu = a(b) \cdot T$$

Der Faktor a(b) ist für  $b > 1$  (also für Elemente mit Verschleisserscheinungen = Phase III der Badewannenkurve) stets kleiner als 1 - also ist in diesem Fall die mittlere Lebensdauer stets kleiner als die charakteristische Lebensdauer.

Der Faktor a(b) ist  $b < 1$  (also für sogenannte "Frühausfälle" = Phase I der Badewannenkurve) stets größer als 1 - also ist in diesem Fall die mittlere Lebensdauer stets größer als die charakteristische Lebensdauer

Nur für den Fall  $b=1$  (konstante Ausfallrate; **Exponentialverteilung**) ist mittlere Lebensdauer gleich der charakteristischen Lebensdauer.

Dies wird in den nachfolgenden Berechnungsbeispielen und der Grafik verifiziert:

$$a(b) := \frac{\mu(T, b)}{T}$$

$$\mu(1, 1) = 1$$

$$\mu(1, 1.5) = 0.903$$

$$\mu(1, 0.8) = 1.133$$

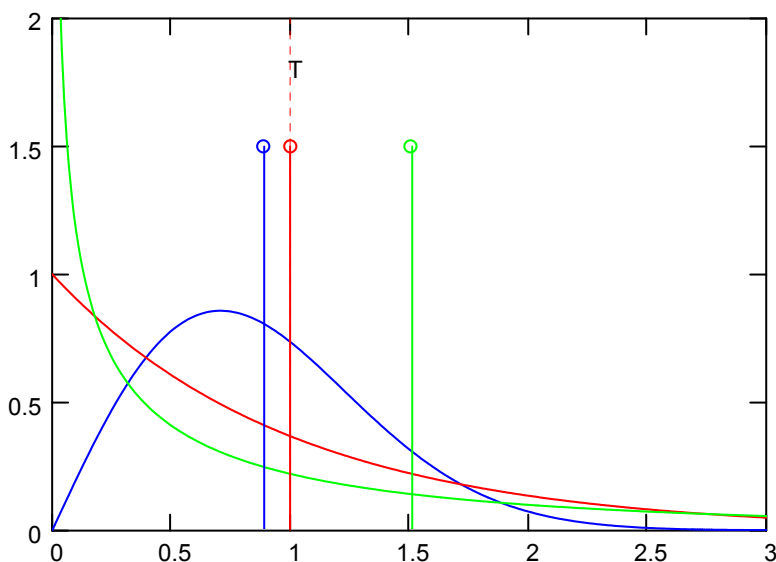
$$\mu(1, 2) = 0.886$$

$$\mu(1, 0.5) = 2$$

$$\mu(1, 3) = 0.893$$

$$\mu(1, 5) = 0.918$$

$$tt := 0, \frac{1}{100} \dots 3$$



- Dichte der Weibullverteilung mit  $b=2$
- Dichte der Weibullverteilung mit  $b=1$
- Dichte der Weibullverteilung mit  $b=0.6$
- ⊕ Erwartungswert für  $b=0.6$
- ⊖ Erwartungswert für  $b=1$
- ⊙ Erwartungswert für  $b=2$

**Hinweis :** Der Faktor a(b) ist mathematisch exakt über die Euler'sche Gammafunktion definiert

$$a(b) = \left(\frac{1}{b}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)$$

Wie das folgende Berechnungsbeispiel zeigt, erhält man mit obiger Berechnungsformel und über die Gammafunktion die gleichen Werte!

$$a(3) = 0.893 \quad \Gamma\left(\frac{1}{3} + 1\right) = 0.893$$

Man könnte daher auch definieren:

$$a(b) := \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)$$

Mit Hilfe dieser Definition wird nun noch eine Animationstool definiert, das den im obigen Diagramm gezeigten Zusammenhang zwischen charakteristischer und durchschnittlicher Lebensdauer noch deutlicher zeigt:

$$T := 1 \quad b := 0.5 + \frac{\text{FRAME}}{10}$$

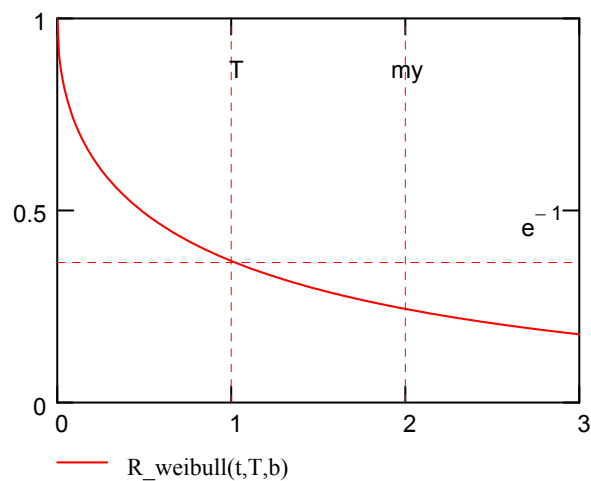
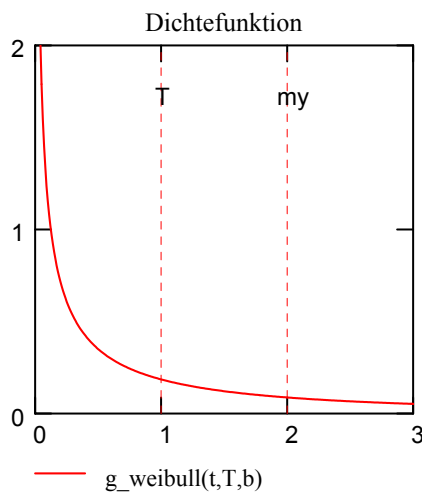
Animation mit FRAME von 0 bis 50, b bei 0.5 starten !!!!!

$$\mu(T, b) := T \cdot a(b)$$

$$my := \mu(T, b)$$

$$t := 0, \frac{T}{100} .. 5 \cdot T$$

b = 0.5



**Interpretation :**

Die Animation (sie kann extra heruntergeladen werden) zeigt einen anschaulichen Vergleich zwischen der durchschnittlichen Lebensdauer (das ist die Abszissen-Koordinate des Flächenschwerpunkte der Dichtefunktion) und der charakteristischen Lebensdauer, bei der die Überlebenswahrscheinlichkeit konstant bei ca. 37% liegt (1/e).

Man sieht auch schön, dass die Verteilung (Dichtefunktion!) für größer werdendes b immer näher der Normalverteilung wird. Dies ist auch der Grund, dass für größer werdendes b oftmals die logarithmische Normalverteilung bzw. die Normalverteilung (als Näherung) als Lebensdauerverteilung verwendet wird.

## 5 ) Erwartungswert und Varianz bei Glücksspielen

[zum Menü](#)

- [Ein historisches Beispiel \(1654: Chevalier de Mere: Anfrage an Blaise Pascal\)](#)
- [Chuck a Luck](#)
- [Roulette \(Vergleich verschiedener Setzvarainten\)](#)

### Ein historisches Beispiel (1654: Chevalier de Mere: Anfrage an Blaise Pascal)

Eine Münze wird wiederholt geworfen. Für jede "1" erhält A einen Punkt und für jede "0" erhält B einen Punkt. Wer zuerst 5 Punkte erreicht hat, gewinnt den Einsatz. Nach 7 Würfeln hat A 4 Punkte erreicht und B 3 Punkte. Das Spiel wird abgebrochen.

Welche ist eine gerechte Aufteilung des Einsatzes: Nach Maßgabe der gewonnenen Spiele (also: 4:3) oder nach Maßgabe der auf den Sieg noch fehlenden Spiele (also: 2:1)?

#### Lösung :

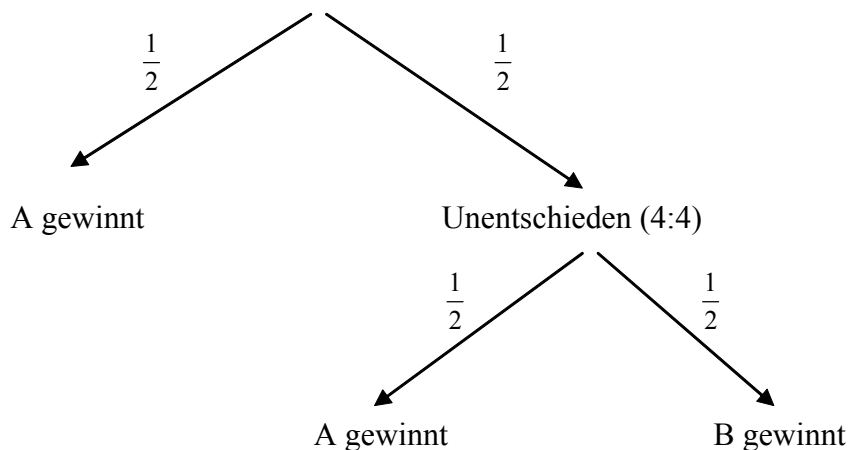
Keine der beiden zur Auswahl gestellten Varianten zur Aufteilung des Einsatzes ist richtig.

Pascal antwortete, dass die Aufteilung im Verhältnis der **Gewinnchancen** erfolgen sollte, d.h. auf Grund der Erwartungswerte für die beiden Spieler A und B

(Anmerkung: dabei blieb unberücksichtigt, woher der Einsatz stammte - d.h. der "Verlierer" hatte keinen Verlust, bloß "keinen Gewinn")

Im Folgenden ist nun der Spielbaum gezeichnet, der alle möglichen Ausgänge berücksichtigt.

(Unten wird einen ähnliche Vorgangsweise beim Roulette gewählt)



Die Gewinnerwartung für die beiden Spieler ergibt sich daher zu:

$$E_A := 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$E_A \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$E_B := 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$E_B \rightarrow \frac{1}{4}$$

Da die Gewinnerwartung für Spieler A dreimal so groß ist wie für Spieler B, schlägt Pascal eine Aufteilung im Verhältnis 3:1 vor !

## CHUCK A LUCK

Das Spiel "Chuck a Luck" ("Versuche Dein Glück") wird vor allem in den USA u.a. bei Spielautomaten gerne gespielt. Gespielt wird mit 3 Würfeln. Der Spieler setzt auf eine beliebige Zahl  $z$  ( $z = 1 \dots 6$ ).

Die Auszahlung erfolgt nach folgendem Schema:

- \* kommt  $z$  nicht vor: VERLUST des Einsatzes
- \* kommt  $z$  1-mal vor: GEWINN des Einsatzes
- \* kommt  $z$  2-mal vor: GEWINN des DOPPELTEN Einsatzes
- \* kommt  $z$  3-mal vor: GEWINN des DREIFACHEN Einsatzes.

Ist das Spiel *fair* ?

### Lösung :

Ein faires Spiel wird in der Spieltheorie ein Spiel genannt, für das der erwartete Gewinn 0 ist. Wir berechnen daher die Gewinnerwartung des Spiels.

Die Einzelwahrscheinlichkeiten können mit Hilfe der Binomialverteilung berechnet werden:

$$g_{bi}(x, n, p) := \text{dbinom}(x, n, p)$$

Gemäß der obigen Definition für den Erwartungswert ergibt sich:

$$E_X := g_{bi}\left(0, 3, \frac{1}{6}\right) \cdot (-1) + g_{bi}\left(1, 3, \frac{1}{6}\right) \cdot 1 + g_{bi}\left(2, 3, \frac{1}{6}\right) \cdot 2 + g_{bi}\left(3, 3, \frac{1}{6}\right) \cdot 3$$

$$E_X = -0.079$$

### Ergebnis :

Das Spiel ist NICHT FAIR, weil es für den Spieler eine negative Gewinnerwartung hat. Im Schnitt gehen pro Spiel knapp 8% verloren

## ROULETTE - Untersuchung verschiedener Setzvarianten

Grundsätzlich ist Roulette ein Zufallsspiel, bei dem 37 gleich wahrscheinliche Zahlen auftreten können. Diese Zahlen sind von 0 bis 36 durchnummeriert. Die Hälfte der Zahlen ist "schwarz", die andere Hälfte "rot" - wobei die "0" keiner Farbe zugeordnet wird. Grundsätzlich kann auf bestimmte Zahlen bzw. Kombinationen "gesetzt" werden, wobei die einzelnen "Setzungen" zu unterschiedlichen Auszahlungen im Falle des Gewinnes führen. Auf diese Weise kann der Spieler seine Gewinnerwartung und auch die Varianz beeinflussen.

Im folgenden werden Gewinnerwartung und Varianz verschiedener Setzsysteme berechnet und anschließend diskutiert.

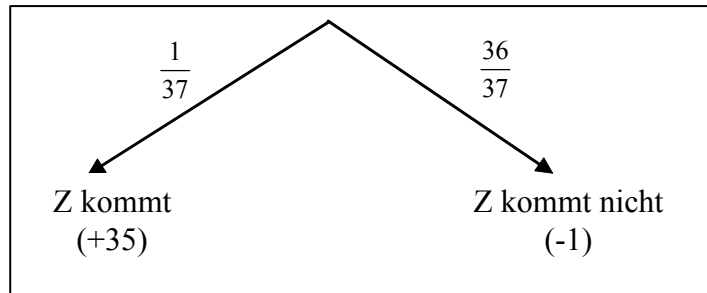
**Variante 1: Setzen auf eine bestimmte Zahl (Plein)**

Kommt diese Zahl, so wird das 35-fache des Einsatzes ausbezahlt, andernfalls verliert man den Einsatz.

$$\mu := \frac{1}{37} \cdot 35 + \frac{36}{37} \cdot (-1)$$

$$\mu \rightarrow \frac{-1}{37}$$

$$\mu = -0.027$$



$$V_x := (35 - \mu)^2 \cdot \frac{1}{37} + (-1 - \mu)^2 \cdot \frac{36}{37}$$

$$\sigma := \sqrt{V_x}$$

$$V_x = 34.186$$

$$\sigma = 5.847$$

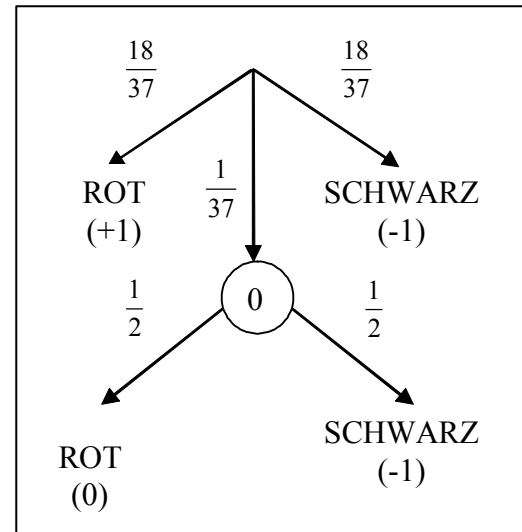
**Variante 2: Setzen auf bestimmte Farbe, z.B. ROT (sogenannte einfache Chancen)**

Alternativ kann (bei gleichen Chancen) auch auf SCHWARZ, GERADE, UNGERADE, ... gesetzt werden.

Kommt die Farbe ROT, so gewinnt man den Einsatz, kommt Schwarz, so verliert man den Einsatz.

Einen Sonderfall stellt nun die Zahl 0 dar: Kommt diese, so bleibt der Einsatz so lange stehen, bis entweder die gesetzte Farbe (ROT) oder eben Schwarz kommt. Bei ROT verliert man nichts (aber auch keine Auszahlung!), bei Schwarz geht der Einsatz verloren.

Es ergibt sich daher der nebenstehende Spielbaum. (Dabei ist zu berücksichtigen, dass ein wiederholtes Auftreten der 0 zu nichts führt - irgendwann wird (jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2) entweder rot oder schwarz kommen!)



$$\mu := \frac{18}{37} \cdot 1 + \frac{18}{37} \cdot (-1) + \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)$$

$$\mu \rightarrow \frac{-1}{74}$$

$$\mu = -0.014$$

$$V_x := (1 - \mu)^2 \cdot \frac{18}{37} + (-1 - \mu)^2 \cdot \frac{18}{37} + (0 - \mu)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 37} + (-1 - \mu)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 37}$$

$$V_x = 0.986$$

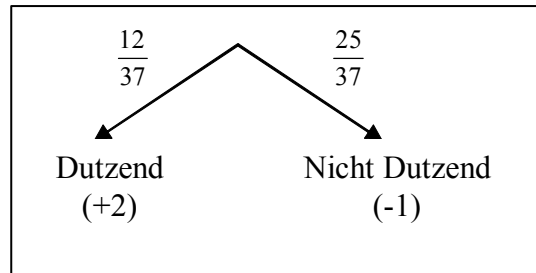
$$\sigma := \sqrt{V_x}$$

$$\sigma = 0.993$$

Im Vergleich zur Setzungsvariante 1 (Plein) ist die Gewinnerwartung aus der Sicht des Spielers besser (verdoppelt!), jedoch zeigt die geringe Varianz (Standardabweichung), dass dieses Spiel für "Draufgängertypen" nicht geeignet sein wird, weil einfach pro Spiel auch nicht viel gewonnen werden kann.

**Variante 3: Einsatz auf "Dutzend", etwa 1-12, 13-24, oder 25-36.**

Kommt eine Zahl aus dem Bereich des gesetzten Dutzends, so wird das zweifache des Einsatzes ausbezahlt, andernfalls geht der Einsatz verloren.



$$\mu := \frac{12}{37} \cdot 2 + \frac{25}{37} \cdot (-1)$$

$$\mu \rightarrow \frac{-1}{37}$$

$$\mu = -0.027$$

$$V_x := (2 - \mu)^2 \cdot \frac{12}{37} + (-1 - \mu)^2 \cdot \frac{25}{37} \quad \sigma := \sqrt{V_x}$$

$$V_x = 1.972$$

$$\sigma = 1.404$$

Wir erhalten - was auch intuitiv klar ist - die gleiche Gewinnerwartung wie bei Plein, allerdings (was ebenfalls intuitiv verständlich ist) eine deutlich kleinere Varianz (Standardabweichung), die aber größer als bei den einfachen Chancen ist.

**Variante 4: Gewinnerwartung, wenn man 3-mal hintereinander auf "das mittlere Dutzend" setzt?**

Hier liegt eine Binomialverteilung vor mit  $p = \frac{12}{37}$  und  $n = 3$

$$\mu := (-3) \cdot g_{bi}\left(0, 3, \frac{12}{37}\right) + 0 g_{bi}\left(1, 3, \frac{12}{37}\right) + 3 \cdot g_{bi}\left(2, 3, \frac{12}{37}\right) + 6 \cdot g_{bi}\left(3, 3, \frac{12}{37}\right)$$

$$\mu = -0.081$$

Das Ergebnis ist für "Spielertypen" eher unverständlich, weil sich die Gewinnerwartung recht dramatisch verschlechtert hat. Mathematisch gesehen ist es klar: Wir hätten auf Grund der Additivität des Erwartungswertes und der Unabhängigkeit der einzelnen Spiele unter Verwendung der obigen Ergebnisse gleich sagen können:

$$\mu := 3 \cdot (-0.027) \quad \mu = -0.081$$

**Variante 4: Typisches Progressionsspiel - Verdoppeln auf "einfache Chancen" (z.B.ROT)**

Die Idee ist zunächst bestechend:

Man setzt auf eine bestimmte Farbe (etwa ROT). Kommt diese, hat man seinen Einsatz natürlich gewonnen. Kommt ROT nicht, so verdoppelt man seinen Einsatz. Im Falle eines Gewinnes hat man nun insgesamt wieder seinen Einsatz gewonnen. Andernfalls verdoppelt man wieder (nun der 4-fache ursprüngliche Einsatz) ... usw. Das Spiel wird solange fortgesetzt, bis ROT kommt. Da dies mit Wahrscheinlichkeit  $1 = 100\%$  irgendwann einmal der Fall sein wird, wird man "sicher" seinen Einsatz gewinnen.

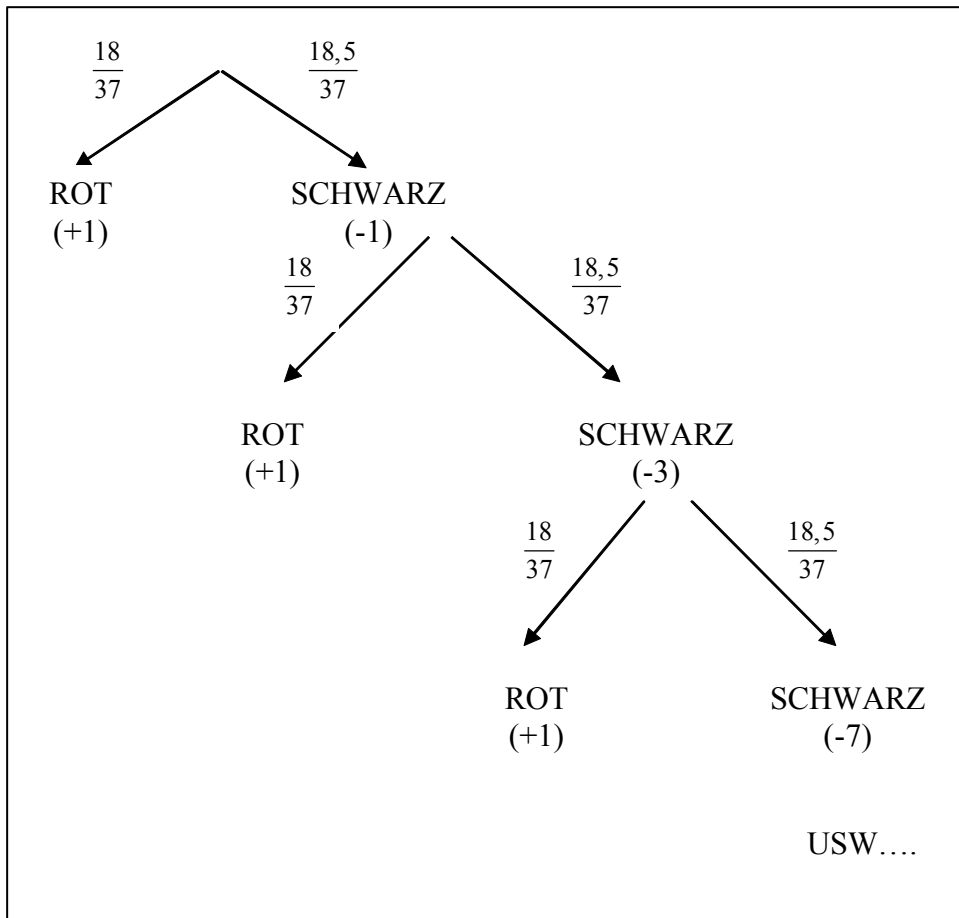
Soweit die Theorie. Leider erlauben aber die Casino-Spielregeln **maximal 10-mal** eine Verdoppelung. So unglaublich es auf den ersten Blick erscheint, ist es doch so, dass dies ausreicht, um die Gewinnerwartung negativ werden zu lassen! Dies zeigt die nachfolgende Rechnung:

**Hinweis:** In der nachfolgenden Rechnung wird die Sonderregel beim Auftreten der Null "vereinfacht" berücksichtigt: Der Fall "0" selbst bleibt im Baumdiagramm unberücksichtigt, weil das Spiel hier so aufgefaßt wird, dass der Einsatz dann "stehenbleibt", so als wenn gar kein Spiel stattgefunden hätte.

Deswegen hat "Schwarz" die Wahrscheinlichkeit  $\frac{18}{37} + \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{2} = \frac{18,5}{37}$

Das Auftreten der 0 mit anschließend "Rot" hat die Auftretenswahrscheinlichkeit  $\frac{1}{37} \cdot \frac{1}{2} = \frac{0,5}{37}$

(siehe auch oben bei der Setzvariante 2). Dieser Fall bleibt wegen der besseren Übersicht im Spielbaum unberücksichtigt (richtiger Weise müsste man eine kleine Schleife mit dieser Wahrscheinlichkeit beschriften)



$$\mu := 1 \frac{18}{37} \cdot \sum_{i=0}^{10} \left(\frac{18,5}{37}\right)^i + (-1) \cdot \sum_{i=0}^{10} 2^i \cdot \left(\frac{18,5}{37}\right)^{i+1}$$

$\mu = -0.027$

**Erklärung**

Gewinn tritt auf, wenn entweder das 1.Mal "rot" kommt ODER das 1.Mal "schwarz" UND dann "rot",

ODER 2-mal hintereinander "schwarz" UND dann "rot"  
 ODER 3-mal hintereinander "schwarz" UND dann "rot"

.....  
 ODER 10-mal hintereinander "schwarz" und dann "rot".



Verlust tritt auf, wenn 11-mal hintereinander "schwarz" kommt.  
Dann verliert man allerdings das 2047-fache des Einsatzes, denn

$$\sum_{i=0}^{10} 2^i = 2047$$

$$V_x := (1 - \mu)^2 \cdot \left[ \frac{18}{37} \cdot \sum_{i=0}^{10} \left( \frac{18.5}{37} \right)^i \right] + \left[ (-1) \cdot \sum_{i=0}^{10} 2^i - \mu \right]^2 \cdot \left( \frac{18.5}{37} \right)^{11}$$

$$V_x = 2.047 \times 10^3$$

$$\sigma := \sqrt{V_x}$$

$$\sigma = 45.243$$

**Überraschendes Resümee:** Die Gewinnerwartung ist die Gleiche wie bei **Plein** (siehe Variante 1), die Varianz bzw. Standardabweichung ist aber noch wesentlich größer.  
Das hängt damit zusammen, dass man zwar meist gewinnen wird (seinen Einsatz), jedoch "im Falle des Falles" eben das 2047-fache (!!!) seines Einsatzes verliert .

### Zusammenfassung:

Beim Roulette gibt es keine Gewinnsysteme!

Man hat mit jedem Roulettesystem, das nicht ausschließlich auf Einfache Chancen spielt, eine durchschnittliche Gewinnerwartung von -2,7%, also ganz genau die gleiche Gewinnerwartung wie jeder Spieler, der ohne System spielt.

Mit Roulettesystemen, die ausschließlich auf Einfache Chancen spielen, erhält man bestenfalls eine durchschnittliche Gewinnerwartung von -1,35%. Auch hier erreicht man ohne Roulettesystem genau die gleiche Gewinnerwartung (vorausgesetzt, man spielt immer nur auf Einfache Chancen).

Progressionsspiele werden "oftmals" kleine Gewinne bringen, die Gewinnerwartung ist trotzdem negativ! Varianten, "früher" aufzuhören, um damit drohende große Verluste zu vermeiden, können diese zwar vermeiden, führen aber nur noch zu einer noch deutlicheren negativen Gewinnerwartung (weil man öfter verliert).

Jeder Spieler, der jemals mit einem »Roulettesystem« (wirklich) gewonnen hat, hätte garantiert auch gewonnen, wenn er ohne System gespielt hätte!

Es zahlt sich daher nicht aus, für angeblich "wirksame und erprobte" Gewinnsysteme auch noch Geld zu bezahlen!!

Roulette-Varianten (z.B. American-Roulette, Roulette bei Spielautomaten) haben gleiche oder (aus Spielersicht) schlechtere Gewinnerwartungen.

[zum Menü](#)