Wilfried Rohm wrohm@aon.at

Zentraler Grenzwertsatz - Veranschaulichung

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Zentraler Grenzwertsatz, Gleichverteilung, Normalverteilung

- Kurzzusammenfassung

  Der Zentrale Grenzwertsatz (der große praktische Bedeutung z.B. im Qualitätsmanagement hat) sagt aus, dass Summen beliebig verteilter Zufallsgrößen assymptotisch normalverteilt sind. Dies wird am eindrucksvollen Beispiel der Augensumme von Würfeln durch Simulation demonstriert.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Der Zentrale Grenzwertsatz ist von großer Bedeutung für die Praxis ist, jedoch in seiner üblichen Formulierung recht unanschaulich. Daher erscheint eine geeignete Veranschaulichung sinnvoll.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

- Mathcad-Version:
  Mathcad 2000 / 2001

Zentraler Grenzwertsatz - gezeigt am Beispiel von n Würfeln

Der zentrale Grenzwertsatz sagt im Prinzip aus, dass Summen von n beliebig verteilten Zufallsgrößen für n gegen ∞ normalverteilt sind.

Da die Augensummen EINES Würfels gleichverteilt sind, ist an diesem Beispiel der zentrale Grenzwertsatz besonders eindrucksvoll: Die Augensummen von n Würfeln sind bereits für kleines n (etwa n=5) optisch "schön" normalverteilt.

Da sich Mittelwerte auch aus Einzelsummen zusammensetzen, gilt daher der Zentrale Grenzwertsatz für Mittelwerte beliebig verteilter Einzelgrößen.

ANWENDUNG: Im Qualitätsmanagement (Qualitätsregelkartentechnik) wird allgemein davon ausgegangen, dass für Mittelwerte ab n=5 Normalverteilung angenommen werden kann ! Darauf beruhen auch die dort verwendeten Berechnungsformeln für die Grenzen der Regelkarten.

Simulation (Zur Berechnung die Region anklicken)

n ... Anzahl der Würfel, die gleichzeitig geworfen werden.
N ... Anzahl der Würfe mit den n Würfeln

n und N werden unten neben der Grafik global festgelegt.

$i := 0 .. N-1 \qquad j := 0 .. n-1$

$wurf_{i,j} := \mathrm{floor}(\mathrm{rnd}(6)+1)$ Erzeugung der n*N Zufallszahlen und Ablegung in der Matrix "wurf"

$augensumme_i := \sum_j wurf_{i,j}$

Ermittlung der Augensumme des i-ten Wurfes

Darstellung der erzeugten Zufallszahlen in einem Histogramm: Dazu werden mittels "hist"-Befehl die relativen Häufigkeiten der vorkommenden Augensummen ermittelt:

$max := n \cdot 6 + 1$ $\quad r := 0 .. max$ $\quad werte_r := r$

$h := \frac{hist(werte, augensumme)}{N}$ $\quad k := 0 .. max - 1$ $\quad \sum_k h_k = 1$ (zur Kontrolle)

Angenäherte Normalverteilung (ausgehend von der Gleichverteilung eines Würfels mit m=3.5 und s_glvtlg^2 = (b-a)^2/12 = 6^2/12)

$\mu := n \cdot 3.5$ $\quad \sigma := \sqrt{\frac{6^2}{12}} \cdot \sqrt{n}$

$g_N(x, \mu, \sigma) := dnorm(x, \mu, \sigma)$

Dichtefunktion der Normalverteilung

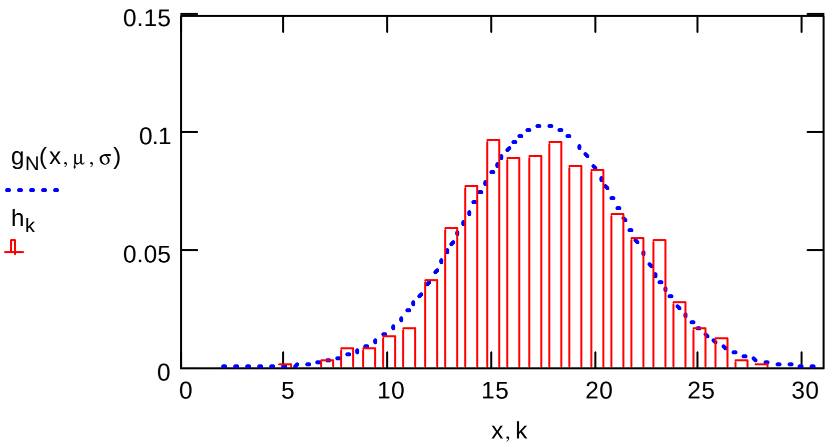
$x := \mu - 4 \cdot \sigma, (\mu - 4 \cdot \sigma) + \frac{\sigma}{100} .. \mu + 4 \cdot \sigma$

Der Zeichenbereich für die Normalverteilung wird auf den Bereich m +/– 4*s εινγεσχηρ™νκτ

Anzahl n der Würfel, die gleichzeitig geworfen werden: $n \equiv 5$

Versuchszahl (Anzahl der Versuche zur Ermittlung der Augensumme von n Würfeln) $N \equiv 1000$

HINWEIS: Die Normalverteilung ist unsichtbar, weil sie mit weisser Farbe gezeichnet wurde. Zur Darstellung Doppelklick auf das Diagramm und die Farbe der Spur "Normalvtlg" z.B. auf "blau" stellen"



Anmerkungen

*** n=1 liefert natürlich eine Simulation einer Gleichverteilung**
*** n=2 liefert die Simulation einer "Dreiecksverteilung"**
*** für höhere n wird allmählich immer mehr die Normalverteilung approximiert. Die GÜTE DER Approximation kann über die Anzahl der durchgeführten Versuche (N) gesteuert werden.**