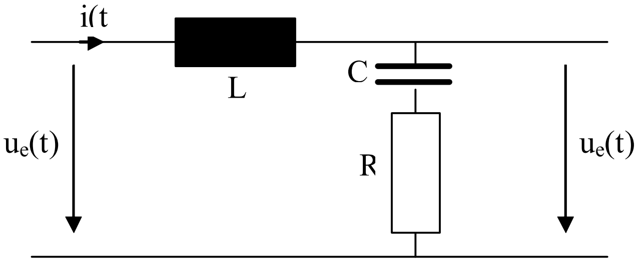
Wilfried Rohm , HTL Saalfelden

Zur Beispielsübersicht

Übertragungsverhalten von Vierpolen

Gegeben ist der nebenstehende Vierpol mit folgenden Bauelementen:

R = 100 Ω, C = 15 µF , L = 300 mH



a) Bestimmen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{G}(\omega)$ sowie Betrag und Phase (symbolische Rechnung)

b) Geben Sie Näherungen für $\underline{G}(\omega)$ und $|\underline{G}(\omega)|$ für kleine und sehr große Werte von ω an und berechnen Sie damit die Eckfrequenz ω_E. (symbolisch und numerisch)

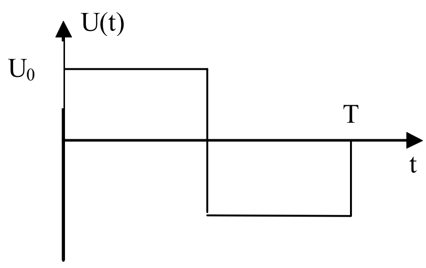
c) Zeichnen Sie das Bodediagramm. Berechnen Sie charakteristische Werte und kennzeichnen Sie diese im Bodediagramm:

* Amplituden – Maximum
* Wo beträgt die Phasenlage genau -90^0
* Einzeichnen der Näherungen aus b) und der Eckfrequenz

d) Zeichnen Sie die Ortskurve der Übertragungsfunktion, kennzeichnen Sie die speziellen Punkte (siehe Punkt c) und vergleichen Sie mit dem Bodediagramm (gemeinsam mit Punkt e)

e) *Erläutern Sie allgemein aus mathematischer und technischer Sicht Aufbau und Vorteile der beiden Darstellungsarten!*

f) An den obigen Vierpol wird die nebenstehende Eingangsspannung mit T=20 ms und $U_0 = 1$ V angelegt. Man ermittle:



* Fourierreihe dieses Eingangssignals samt Spektraldarstellung und Klirrfaktorberechnung

* Berechnen Sie das Ausgangssignal ua(t) für dieses Eingangssignal und *interpretieren* Sie den Unterschied zum Eingangssignal mit Hilfe von geeigneten Graphiken. Berechnen Sie auch den Klirrfaktor und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Klirrfaktor des Eingangssignals + *Interpretation*.

a) - e) Die komplexe Übertragungsfunktion / charakteristische Werte:

$R := 100\Omega$ $L := 300mH$ $C := 15\mu F$

$R := R$ $C := C$ $L := L$

$XC(\omega) := \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$ $XL(\omega) := j \cdot \omega \cdot L$

$$G(\omega) := \frac{R + XC(\omega)}{R + XC(\omega) + XL(\omega)} \left| \begin{matrix} \text{komplex} \\ \text{vereinfachen} \end{matrix} \right. \rightarrow \frac{R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + 1 - \omega^2 \cdot L \cdot C - i \cdot R \cdot \omega^3 \cdot C^2 \cdot L}{R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + 1 - 2 \cdot \omega^2 \cdot L \cdot C + \omega^4 \cdot L^2 \cdot C^2}$$

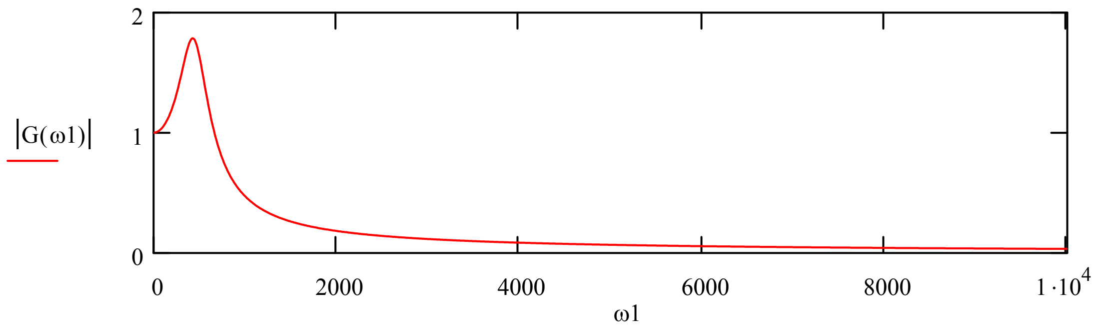
$$\Phi(\omega) := \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(G(\omega))}{\operatorname{Re}(G(\omega))}\right) \left| \begin{matrix} \text{komplex} \\ \text{vereinfachen} \end{matrix} \right. \rightarrow -\operatorname{atan}\left(R \cdot \omega^3 \cdot C^2 \cdot \frac{L}{R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + 1 - \omega^2 \cdot L \cdot C}\right)$$

bzw. Verwendung der Funktion atan2 alternativ möglich.

$$\Phi(\omega) := \arg(G(\omega))$$

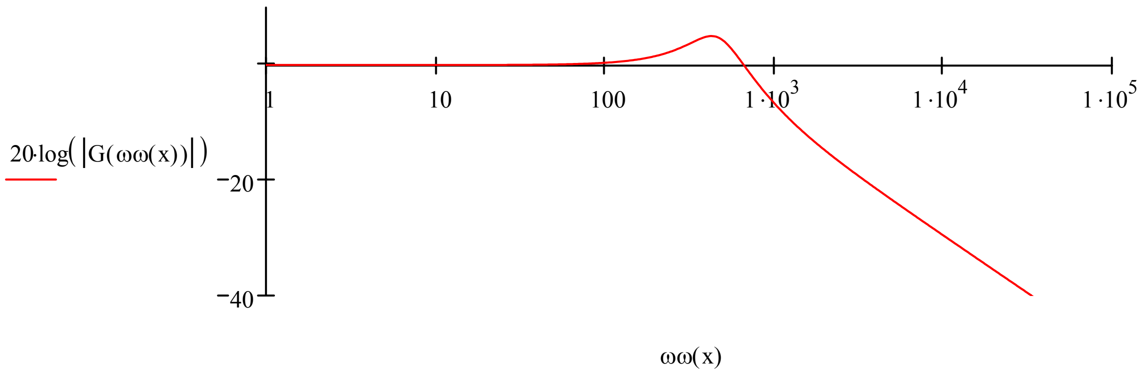
$$G_{betrag}(\omega) := |G(\omega)| \left| \begin{matrix} \text{komplex} \\ \text{vereinfachen} \end{matrix} \right. \rightarrow \left(\frac{R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + 1}{R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + 1 - 2 \cdot \omega^2 \cdot L \cdot C + \omega^4 \cdot L^2 \cdot C^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

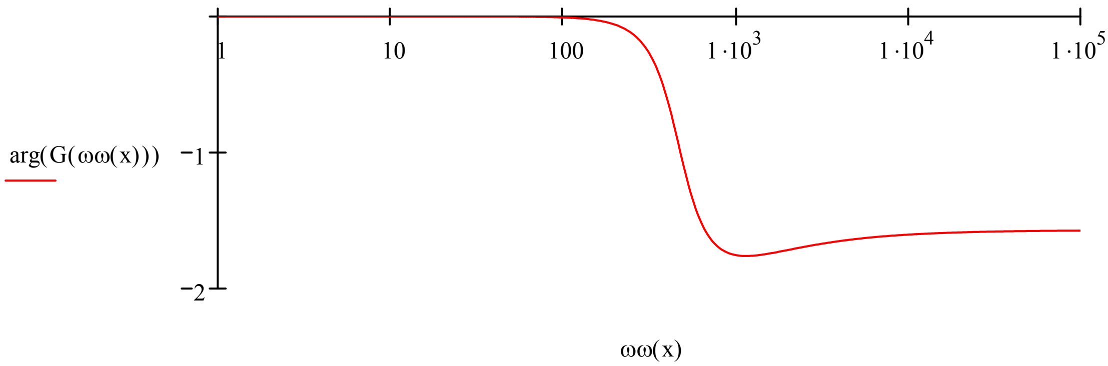
Darstellung der Betragfunktion $\omega 1 := 0Hz, 10Hz .. 10^4 Hz$



Darstellung im Bodediagramm

$x := 0, 0.01 .. 5 \qquad \omega\omega(x) := 10^{x}\,Hz$





Wo beträgt die Phasenlage -90⁰ ?

$\arg(G(\omega)) = \frac{-\pi}{2}$ auflösen, ω $\rightarrow$

funktioniert nicht !

Symbolische Lösung, nur die positive Lösung kommt in Frage

$$\mathrm{Re}(G(\omega)) = 0 \;\Big|\; \begin{matrix}\text{komplex} \\ \text{auflösen}, \omega\end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{C^2 \cdot R^2 - L \cdot C} \cdot \left(-C^2 \cdot R^2 + L \cdot C\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{C^2 \cdot R^2 - L \cdot C} \cdot \left(-C^2 \cdot R^2 + L \cdot C\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -666.667 \\ 666.667 \end{pmatrix} Hz$$

$\omega_{90} := 1000Hz$

Vorgabe

$$\arg(G(\omega_{90})) = \frac{-\pi}{2}$$

$\omega_{90} := \mathrm{Suchen}(\omega_{90}) \qquad \omega_{90} = 666.667\ Hz$

Numerische Lösung

Für welche Frequenz ist der Betrag der Übertragungsfunktion maximal = Stelle der Resonanzüberhöhung ?

Symbolische Rechnung

$$\frac{d}{d\omega}\left|G(\omega)\right| = 0 \;\Big|\begin{array}{l}\text{auflösen}, \omega\\ \text{vereinfachen}\end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C\cdot R\cdot L}\cdot\left[-L\cdot\left[L-\left[L\cdot\left(L+2\cdot R^2\cdot C\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right]\right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{C\cdot R\cdot L}\cdot\left[-L\cdot\left[L-\left[L\cdot\left(L+2\cdot R^2\cdot C\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right]\right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{C\cdot R\cdot L}\cdot\left[-L\cdot\left[L+\left[L\cdot\left(L+2\cdot R^2\cdot C\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right]\right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{C\cdot R\cdot L}\cdot\left[-L\cdot\left[L+\left[L\cdot\left(L+2\cdot R^2\cdot C\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right]\right]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 429.063 \\ -429.063 \\ 1.036i\times 10^3 \\ -1.036i\times 10^3 \end{pmatrix}\text{Hz}$$

Numerische Berechnung

$$\omega_{max} := 500\cdot 10^2\,\text{Hz}$$

Vorgabe

$$\frac{d}{d\omega_{max}}\left|G_{betrag}(\omega_{max})\right| = 0$$

$$\omega_{max} := \text{Suchen}(\omega_{max}) \qquad \omega_{max} = 0\,\text{Hz}$$

Macht Probleme !!!!!
Lösung stimmt in vielen Fällen nicht !!

Die Verwendung der wurzel-Funktion mit Bereichsangabe funktioniert besser:

$$\omega_{max} := \text{wurzel}\left(\frac{d}{d\omega_{max}}G_{betrag}(\omega_{max}), \omega_{max}, 10^2\text{Hz}, 10^3\text{Hz}\right) \qquad \omega_{max} = 429.063\,\text{Hz}$$

Ermittlung der Grenzfunktionen und der Eckfrequenz

$$G(\omega) := \frac{R + XC(\omega)}{R + XC(\omega) + XL(\omega)} \ \Big|\begin{array}{l}\text{komplex}\\ \text{vereinfachen}\end{array} \rightarrow \frac{R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + 1 - \omega^2 \cdot L \cdot C - i \cdot R \cdot \omega^3 \cdot C^2 \cdot L}{R^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2 + 1 - 2 \cdot \omega^2 \cdot L \cdot C + \omega^4 \cdot L^2 \cdot C^2}$$

$\lim_{\omega \to 0} G(\omega) \rightarrow 1$ Also für kleines ω $G(\omega)$ ungefähr 1/1 = 1 mit $\phi_1 = 0\text{Grad}$

$G(0Hz) = 1$ $\arg(G(0Hz)) = 0$

$\phi = 0$

$\lim_{\omega \to \infty} G(\omega) \rightarrow 0$ Also für großes ω $G(\omega)$ ungefähr $-j \cdot \frac{R}{\omega \cdot L}$

also: $G_{betrag}(\omega) = \frac{R}{\omega \cdot L}$ und $\phi_2 = -90\text{Grad}$

Näherung 1 $y1(\omega) := 1$ im Bodediagramm $20 \cdot \log(y1(\omega)) \rightarrow 0$

Näherung 2 $y2(\omega) := \frac{1}{\omega} \cdot \frac{R}{L}$ $\quad 20\log(y2(\omega)) \ \Big|\begin{array}{l}\text{entwickeln}\\ \text{gleit}, 3\end{array} \rightarrow -8.70 \cdot \ln(\omega) + 8.70 \cdot \ln(R) - 8.70 \cdot \ln(L)$

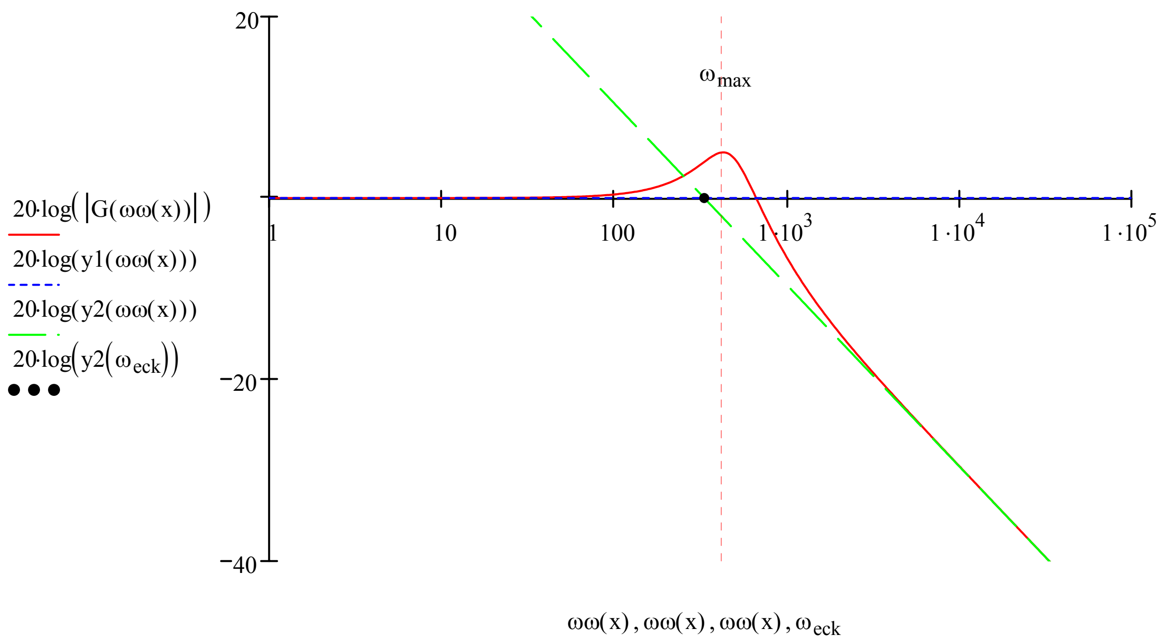
$\omega_{eck} := 7 \cdot 10^5 \text{Hz}$

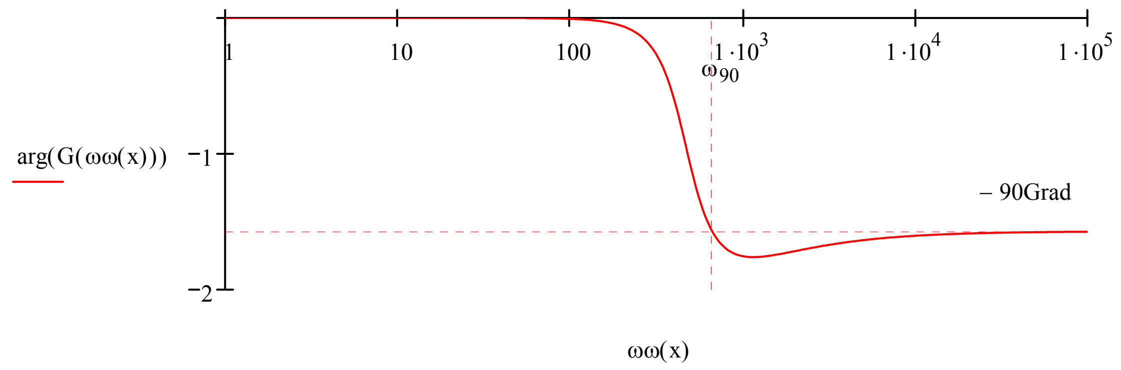
Vorgabe

Man erkennt, dass es sich bei logarithmischer Teilung der x-Achse um eine Gerade handeln muss!

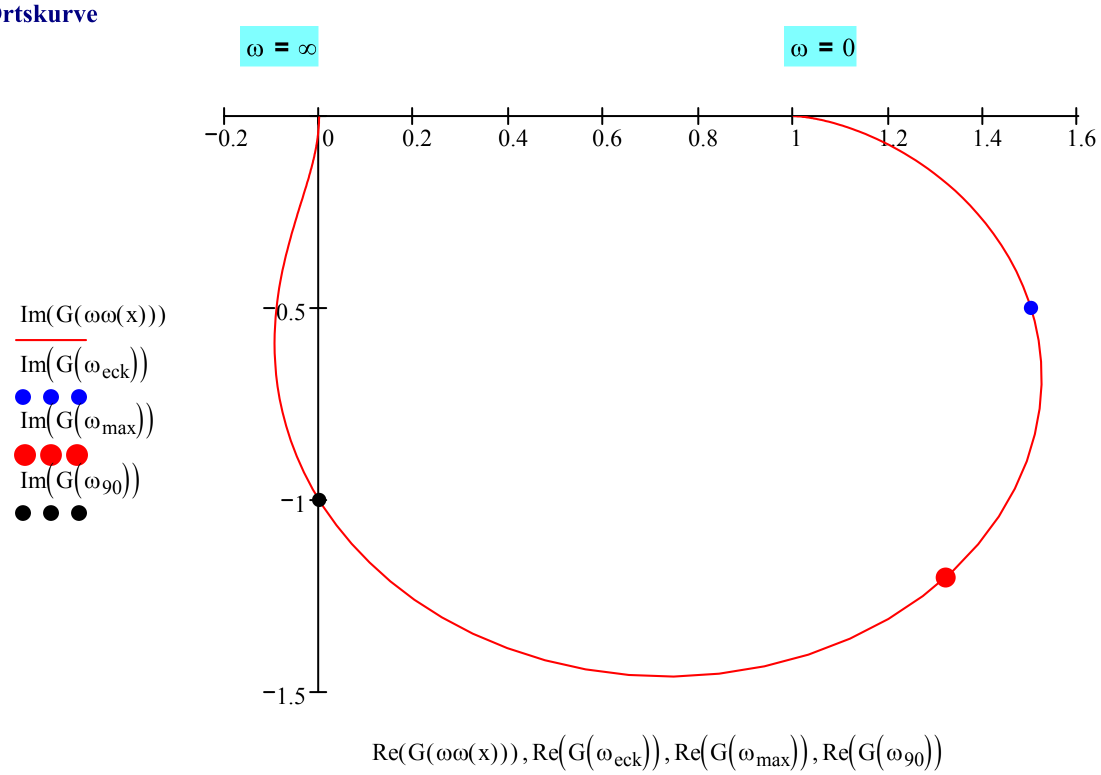
$y1(\omega_{eck}) = y2(\omega_{eck})$

$\omega_{eck} := \text{Suchen}(\omega_{eck})$ $\quad \omega_{eck} \rightarrow \frac{R}{L}$ $\quad \omega_{eck} = 333.333\ \text{Hz}$





Die Ortskurve



Vergleich zwischen Bode-Diagramm und Ortskurve:
Beide zeigen grundsätzlich das Gleiche auf unterschiedliche Weise - mit Vor- und Nachteilen in der Praxis

Ortskurve: Ermöglicht **gleichzeitig** das Ablesen von Betrag und Winkel - die Darstellung ist eine Funktion in der komplexen Zahleneben

Bode-Diagramm: Ist auf den ersten Blick nicht so übersichtlich wie die Ortskurve (getrenntes Ablesen von Betrag bzw. Phase - trotzdem ist diese Darstelung beim Elektrotechnmiker wesentlich beliebter, weil sie (wegen der Logarithmierung der y-Achse) ein direktes graphisches "Addieren" von Kurven mehrerer hintereinandergeschalteter Vierpole erlaubt. Über die sogenannte Knickzugnäherung kann das Bode-Diagramm auch kompliziertere Kombinationen von Vierpolen sehr anschaulich hergeleitet und überblickt werden. So ist auch sofort die Ordnung des Vierpols graphisch erkannt werden.

Hier handelt es sich um ein Übertragungsglied 2.Ordnung - für sehr große Frequenzen verhält sich das Übertragungsglied aber praktisch wie ein Glied 1.Ordnung, weil der Widerstand des Kondensators 1/(ω*C) gegen 0 geht!

Teil f: Analyse des Filters durch Fourieranalyse und -synthese

Definieren des Eingangssignales

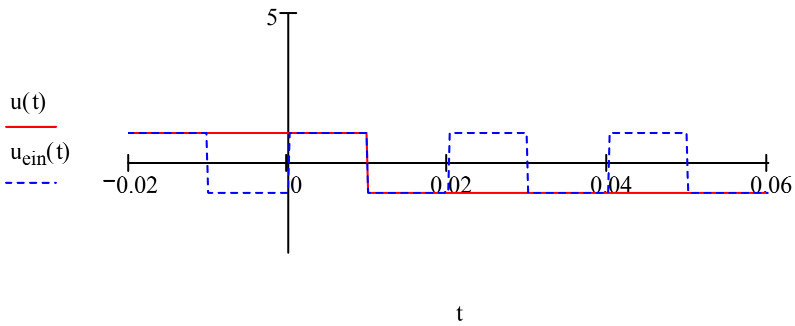
$T := 0.02\text{s} \qquad U_0 := 1\text{V}$

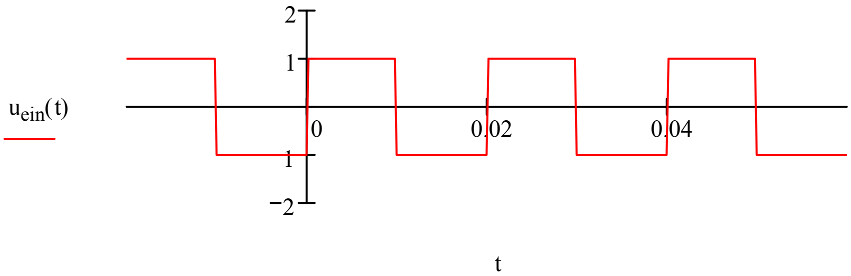
$$u(t) := \begin{cases} U_0 & \text{if } t < \frac{T}{2} \\ -U_0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u_{ein}(t) := u\left(t - T \cdot \text{floor}\left(\frac{t}{T}\right)\right)$$

Mit u(t) (eine Periode) wird gerechnet, zum Zeichnen wird die Funktion aber noch "periodisch gemacht" : Man erhält die Funktion $u_{ein}(t)$.

$$t := -T, -T + \frac{T}{100} .. 3 \cdot T$$





Aufstellen der Fourierreihe $\qquad n_{max} := 100$

$n := 0 .. n_{max}$

$$a_n := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot n \cdot t\right) dt$$

$$b_n := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot n \cdot t\right) dt$$

$$A := \sqrt{a^2 + b^2}$$

a = (V)

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	$3.336 \cdot 10^{-13}$

b = (V)

	0
0	0
1	1.273
2	0
3	0.424
4	0
5	0.255
6	0
7	0.182
8	0

Da die Eingangsfuunktion gerade ist, sind alle Koeffizienten b_n erwartungsgemäß gleich 0 (abgesehen von einer eventuellen numerischen Ungenauigkeit)

Im folgenden wird die Frage gelöst (nicht verlangt), bei welchem n die Fourierreihe abzubrechen ist, wenn die Amplituden kleiner als p werden:

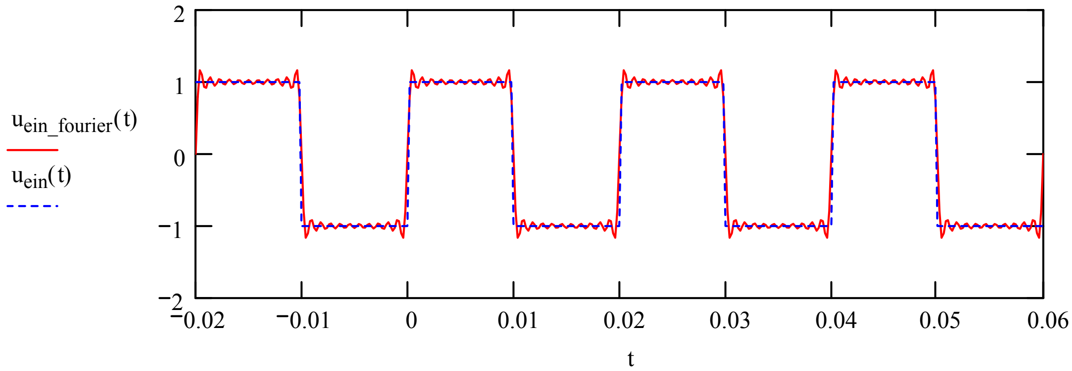
$$N(p, nmax) := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 2 \\ \text{while } i \le nmax \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{return } i \text{ if } A_i < A_1 \cdot p \wedge A_i > TOL \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ \text{return } nmax \end{array} \right.$$

Hier werden die oben berechneten Amplituden verwendet.

$n_{max} := N(0.05, 100)$ $\quad n_{max} = 21$

Darstellung des Eingangssignales im Vergleich mit der Fourierzerlegung

$$u_{ein\_fourier}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot n \cdot t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot n \cdot t\right) \right)$$

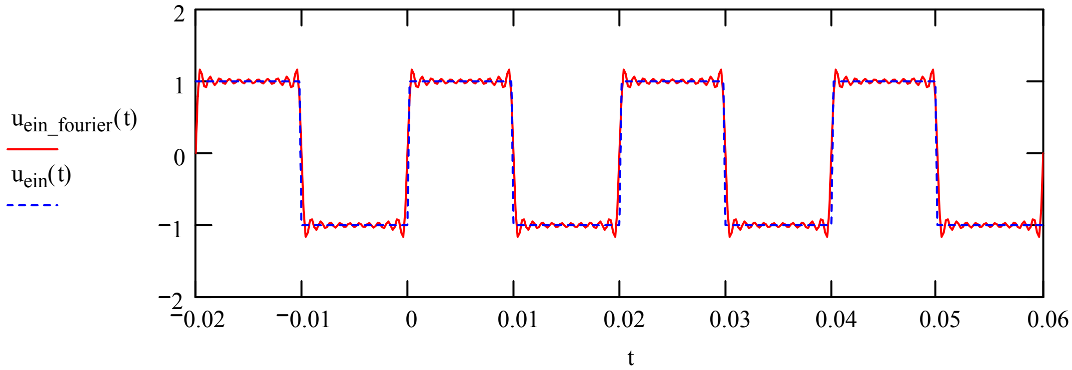


Analog kann natürlich auch die Darstellung in Amplituden-Phasenform erfolgen. Für die Berechnung der Phasenlage ist aber zu berücksichtigen, dass auf Grund numerischer Ungenauigkeiten völlig falsche Winkel erhalten werden, wenn nicht - so wie nachfolgend geschehen - diese numerischen Ungenauigkeiten mit Hilfe einer Toleranzschwelle TOL "ausgebügelt" werden:

$TOL := 10^{-6} V$ $\quad a_n := \text{wenn}\left(\left|a_n\right| < TOL, 0, a_n\right)$ $\quad b_n := \text{wenn}\left(\left|b_n\right| < TOL, 0, b_n\right)$

$$phi_n := \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{if } a_n = 0 \wedge b_n = 0 \\ \text{atan2}(b_n, a_n) & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$$u_{ein\_fourier}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left(A_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot t + phi_n\right) \right)$$



phi =

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0

a = V

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0

b = V

	0
0	0
1	1.273
2	0
3	0.424
4	0
5	0.255

$\omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T}$ Kreisfrequenz der Grundschwingung (zur kürzeren Schreibweise im folgenden definiert)

Nun soll die Ausgangsspannung (am Ausgang des Vierpols) bestimmt werden. Dazu wird JEDE Schwingungskompente der Fourieranalyse durch den Vierpol geschickt und das Ergebnis am Ausgang ermittelt. Sodann wird durch Summation (Fouriersysnthese) das Ausgangssignal ermittelt.

Aus Demonstrationsgründen erfolgt dies hier auf mehrere Arten (bzw. mehrere Schreibweisen)

VARIANTE 1: Die Koeffizienten der Fourierreihe werden mit dem Betrag der Übertragungsfunktion (der jeweiligen Frequenz) multipliziert. $\Phi(n*\omega_0)$ ist die Phasenlage von $G(n*\omega_0)$

$$u_{aus\_fourier}(t) := \left(\frac{a_0}{2} \cdot |G(0Hz)|\right) \ldots + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left[\begin{array}{l}\left[\left(|G(n \cdot \omega_0)| \cdot a_n\right) \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot n \cdot t + \Phi(n \cdot \omega_0)\right)\right] \ldots \\ + |G(n \cdot \omega_0)| \cdot b_n \cdot \sin\left[(\omega_0 \cdot n \cdot t) + \Phi(n \cdot \omega_0)\right]\end{array}\right]$$

VARIANTE 2: Entspricht der Variante 1, jedoch ermöglich die Darstellung der Fourierreihe in Amplituden-Phasen-Form eine etwas kürzere bzw. übersichtlerere Schreibweise. Die Phasenverschiebung PHI(n) setzt sich nun aus 2 Komponenten zusammen: der Phasenverschiebung der jeweiligen Schwingung gemäß Fourieranalyse der Eingangsspannung und der Phasenlage von $\Phi(n*\omega_0)$

$$a2_n := a_n \cdot |G(n \cdot \omega_0)| \qquad b2_n := b_n \cdot |G(n \cdot \omega_0)| \qquad A2_n := \sqrt{(a2_n)^2 + (b2_n)^2}$$

$$PHI(n) := \Phi(n \cdot \omega_0) + phi_n$$

$$u_{aus\_fourier}(t) := \frac{a_0}{2} \cdot |G(0Hz)| + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left[A2_n \cdot \sin\left[(\omega_0 \cdot n \cdot t) + PHI(n)\right]\right]$$

VARIANTE 3: Diese verwendet die komplexe Darstellung der Einzelschwingungen. Dadurch ist direkt eine Multiplikation mit der (komplexen) Übertragungsfunktion möglich. Das Ergebnis wird wiederum auf 2 Arten (welche den beiden obiegen Varianten 1 und 2 entsprechen) dargestellt.
Anmerkung: Die Darstellungsform hat nichts mit der sogenannten "komplexen Fourierreihe" zu tun .

$c_n := b_n + i \cdot a_n$ Komplexe Darstellung der Einzelschwingungen, dadurch können sie einfach mit der Übertragungsfunktion multipliziert werden

$cc_n := c_n \cdot G(\omega_0 \cdot n)$ Für das Ausgangasignal werden hier - zur Unterscheidung - die Bezeichnungen aa,bb,cc etc gewählt

$aa_n := \mathrm{Im}(cc_n) \qquad bb_n := \mathrm{Re}(cc_n)$

$AA_n := \sqrt{(aa_n)^2 + (bb_n)^2} \qquad AA_0 := \frac{aa_0}{2}$

$aa_n := \mathrm{wenn}(|aa_n| < TOL, 0, aa_n) \qquad bb_n := \mathrm{wenn}(|bb_n| < TOL, 0, bb_n)$

$$phiphi_n := \begin{cases} 0 & \text{if } aa_n = 0 \wedge bb_n = 0 \\ \mathrm{atan2}(bb_n, aa_n) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u_a(t) := \frac{aa_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left(aa_n \cdot \cos(\omega_0 \cdot n \cdot t) + bb_n \cdot \sin(\omega_0 \cdot n \cdot t) \right)$$

$$u_a(t) := AA_0 + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left(|AA_n| \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t + phiphi_n) \right)$$

Darstellung in Amplituden-Phasenform

Werte :

A2 =

	0
0	0
1	1.931
2	0
3	0.222
4	0
5	0.063

V

AA =

	0
0	0
1	1.931
2	0
3	0.222
4	0
5	0.063

V

PHI(n) =

0
-15.058
-86.182
-100.022
-100.791
-99.87

Grad

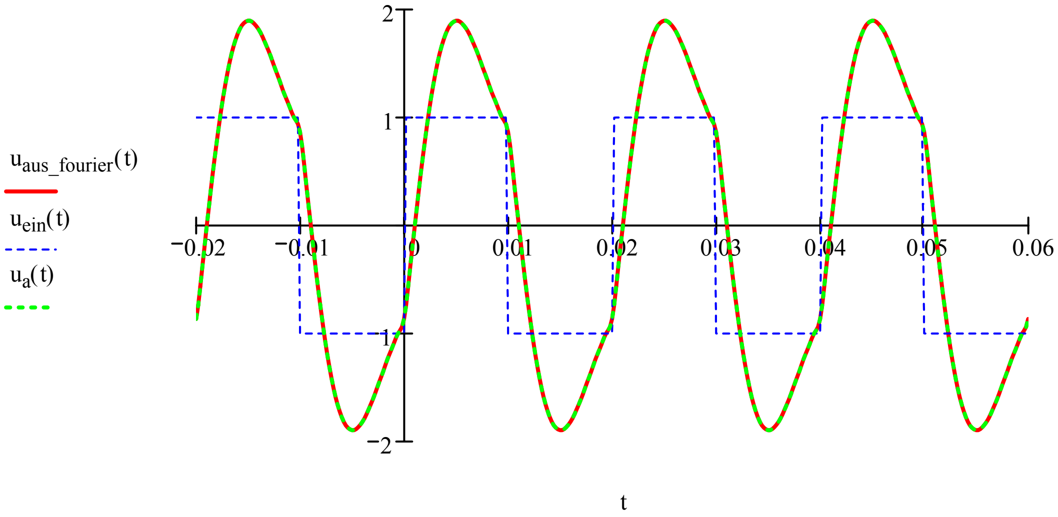
PHI(n) =

0
-0.263
-1.504
-1.746
-1.759
-1.743

phiphi =

	0
0	0
1	-15.058
2	0
3	-100.022
4	0
5	-99.87

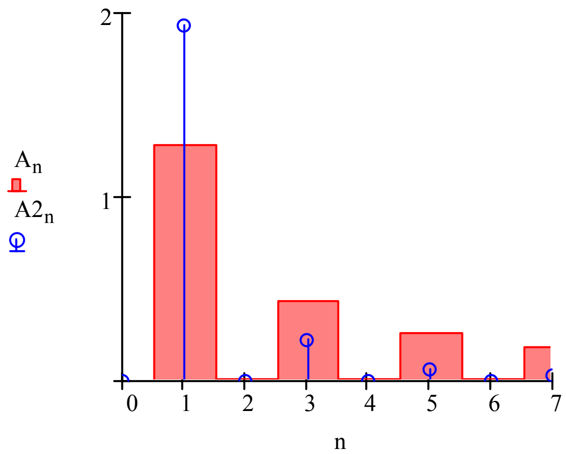
Grad



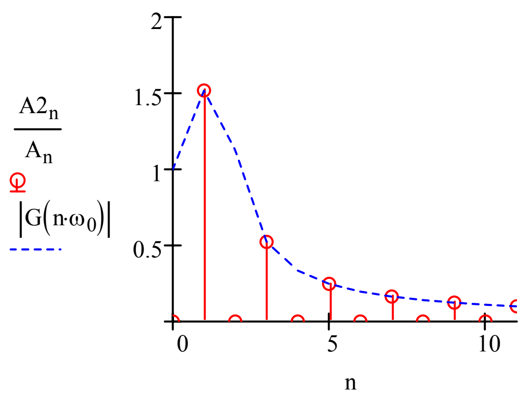
Klirrfaktorberechnung

$$k_1 := \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{n_{max}} (A_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{max}} (A_i)^2}} \qquad k_1 = 0.417$$

$$k_2 := \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{n_{max}} (A2_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{max}} (A2_i)^2}} \qquad k_2 = 0.12$$



Der Vergleich der beiden Klirrfaktoren vor (= k1) und nach dem Durchgang durch den Filter (k2) zeigt, dass der Oberwellenanteil kleiner wird - was natürlich auf Grund des Tiefpasscharakters der Schaltung evident ist (Höhere Frequentzen werden stärker gedämpft!).
Ähnliches zeigen die nebenstehenden grafischen Vergleiche!



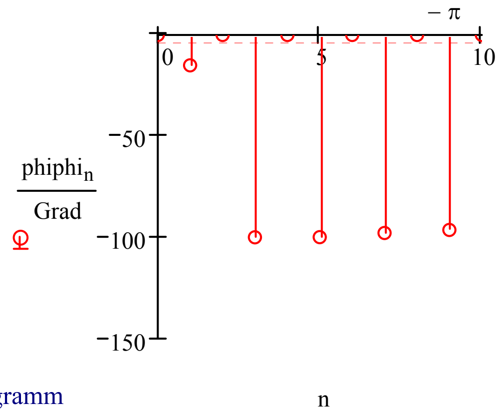
Interpretation :

$n \cdot \omega_0 =$

0	Hz
314.159	
628.319	
942.478	
$1.257 \cdot 10^3$	

$n =$

0
1
2
3
4



Für n=1 kommt es zu einer Verstärkung, da man im Bodediagramm in den Bereich der Resonanzüberhöhung fällt. Daher hat die Grundschwingung eine größere Amplitude als die Ausgangsfunktion.
Für größere Frequenzen macht sich der Tiefpasscharakter bemerkbar.
Die starke Verzerrung entsteht durch die stark unterschiedliche Phasenverschiebung der 1. und 3. Oberwelle, weil der Bereich einer starken Änderung der Phasenlage eben in diesen Bereich fällt.

Zur Beispielsübersicht