

Wilfried Rohm

wrohms@aon.at

Taylorreihen



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**
Approximation von Funktionen durch Taylorpolynome, Integration durch Reihenentwicklung, Näherungsformeln in Physik und Technik, Restgliedabschätzung
- **Kurzzusammenfassung**
Der Artikel zeigt verschiedene Methoden zur Veranschaulichung der Approximation einer Funktion durch Taylorpolynome.
Ferner werden folgende Anwendungsbeispiele für Taylorreihen besprochen:
 - * **Integration mit Reihenentwicklungen (Beispiel Normalverteilung)**
 - * **Herleitung und Anwendung von Näherungsformeln in Naturwissenschaft und Technik (Kinetische Energie, Freier Fall mit Luftwiderstand, Kettenlinie)**
- **Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:**
Dieser Artikel ist inhaltlich darauf zugeschnitten, was dem Autor zum Kapitel "Taylorreihen" im HTL-Unterricht wichtig erscheint.
- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**
Angewandte Mathematik, 4.Jahrgang, alle Abteilungen
- **Mathcad-Version:**
Mathcad 2000 / 2001



INHALT : (gewünschten Bereich anklicken!)

- **[Die Approximation der Sinusfunktion durch Taylorpolynome](#)**
- **[Die Approximation einer beliebigen Funktion durch Taylorpolynome \(Animation\)](#)**
- **[Integration mit Reihenentwicklungen \(Beispiel Normalverteilung\)](#)**
- **[Herleitung / Anwendung von Näherungsformeln: Kinetische Energie, Freier Fall, Kettenlinie](#)**

■ Die Approximation der Sinusfunktion durch Taylorpolynome

[zurück zum Inhalt](#)

$$p_1(x) := x$$

$$p_3(x) := p_1(x) - \frac{x^3}{3!}$$

$$p_5(x) := p_3(x) + \frac{x^5}{5!}$$

$$p_7(x) := p_5(x) - \frac{x^7}{7!}$$

$$p_9(x) := p_7(x) + \frac{x^9}{9!}$$

$$p_3(x) \rightarrow x - \frac{1}{6} \cdot x^3$$

$$p_5(x) \rightarrow x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5$$

$$p_7(x) \rightarrow x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7$$

$$p_9(x) \rightarrow x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7 + \frac{1}{362880} \cdot x^9$$

Mathcad ermöglicht die direkte Bestimmung der Taylorpolynome auf 2 Arten:

Symbolik-Menü: Term eingeben, auf Variable klicken und **Symbolik / Variable / Reihenentwicklung** wählen

sin(x)

msgMapleSeries

$$1 \cdot x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + O(x^6)$$

enthält den Fehlerterm in Abhängigkeit von x^6

aktive Symbolik sin(x) reihe, x, 8 $\rightarrow x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7$

Entwicklung um x=0 bis maximal zum 7.Grad

$$\sin(x) \text{ reihe, } x = \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)^2 + \frac{1}{24} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)^4$$

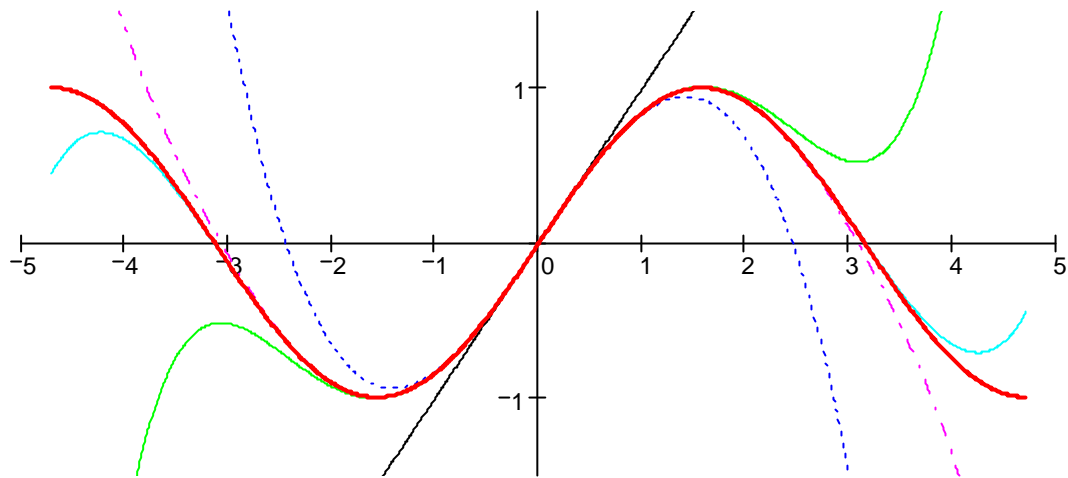
Die Wahl eines anderen Entwicklungspunktes ist möglich!

Das folgende Excel-Sheet zeigt rein numerisch, wie der Fehler bei der Approximation der Sinusfunktion durch die Taylorpolynome mit der Entfernung vom Entwicklungspunkt zu- und mit höherem Grad der Polynome abnimmt.

Approximation der Sinusfunktion durch Taylorpolynome (Entwicklungspunkt x0 = 0)					
x	sin(x)	p3	p5	p7	p9
0,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	0,099833	0,099833	0,099833	0,099833	0,099833
0,2	0,198669	0,198667	0,198669	0,198669	0,198669
0,3	0,295520	0,295500	0,295520	0,295520	0,295520
0,4	0,389418	0,389333	0,389419	0,389418	0,389418
0,5	0,479426	0,479167	0,479427	0,479426	0,479426
1,047198	0,866025	0,855801	0,866295	0,866021	0,866025
1,570796	1,000000	0,924832	1,004525	0,999843	1,000004
2,356194	0,707107	0,176066	0,781232	0,701239	0,707407

Die Approximation soll nun graphisch demonstriert werden

$$z := -3 \cdot \frac{\pi}{2}, -3 \cdot \frac{\pi}{2} + 0.01 .. 3 \cdot \frac{\pi}{2}$$



- p1(x)
- - - p2(x)
- p3(x)
- - - p4(x)
- p5(x)
- sin(x)

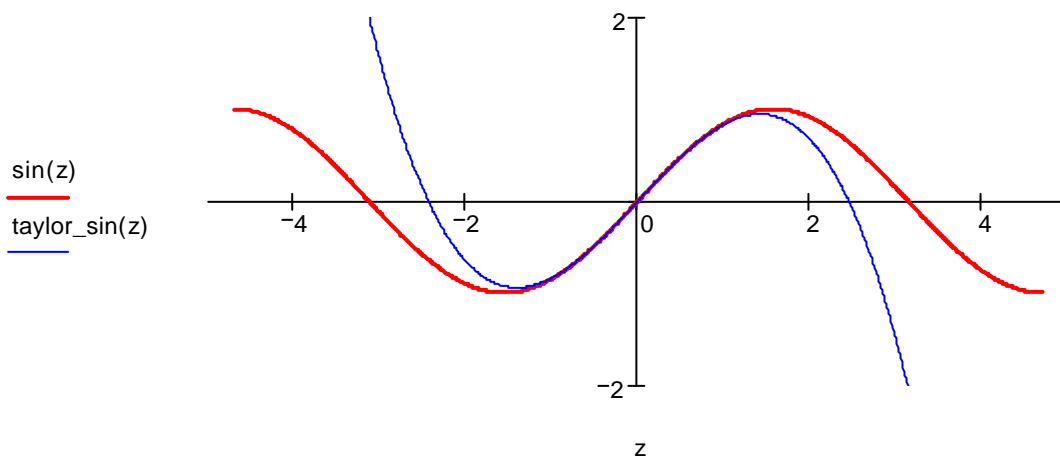
Diese graphische Veranschaulichung kann auch über eine **Animation** erfolgen, bei der der Grad des Polynoms über die Frame-Variable bestimmt wird.

```
n := 4 + 2FRAME
```

Für Animationen empfiehlt sich zu setzen: $n = 1 + 2 \cdot \text{FRAME}$
 FRAME beispielsweise von 0-7

$$\text{taylor_sin}(x) := \text{sin}(x) \text{ reihe, } x, n \rightarrow x - \frac{1}{6} \cdot x^3$$

Dargestellt wird ein Taylorpolynom bis zum Grad $n - 1 = 3$

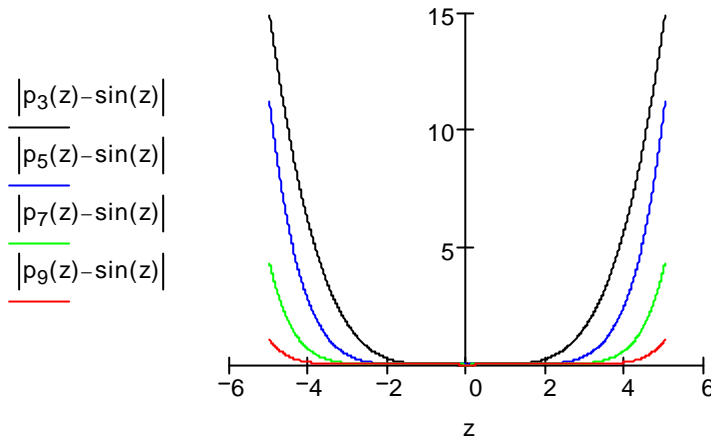


Dass der Fehler bei der Berechnung mit Hilfe der Taylorreihe mit der Entfernung vom Entwicklungspunkt zu- und mit dem Grad des Polynoms abnimmt, wurde bereits optisch und numerisch gezeigt.

Weitere Möglichkeit:

Graphische Darstellung des absoluten (gegebenenfalls auch des relativen Fehlers) in Abhängigkeit vom Polynomgrad.

$$z := -5, -4.99 .. 5$$



Wahl des Entwicklungspunktes

Mathcad ermöglicht auch unterschiedliche Wahl von Entwicklungspunkten. Dies ermöglicht eine bessere Approximation im gewünschten Bereich. Oder es ermöglicht das Aufstellen der Taylorreihe, wenn etwa die Reihe um $x=0$ nicht entwickelt werden kann.

Für die Logarithmusfunktion ergeben sich beispielsweise folgende Möglichkeiten:

$\ln(x)$ reihe, $x, 7 \rightarrow \ln(x)$ Reihenentwicklung um $x=0$ nicht möglich (Polstelle!)

$$\ln(x) \text{ reihe, } x = 1, 7 \rightarrow x - 1 - \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x - 1)^3 - \frac{1}{4} \cdot (x - 1)^4 + \frac{1}{5} \cdot (x - 1)^5 - \frac{1}{6} \cdot (x - 1)^6$$

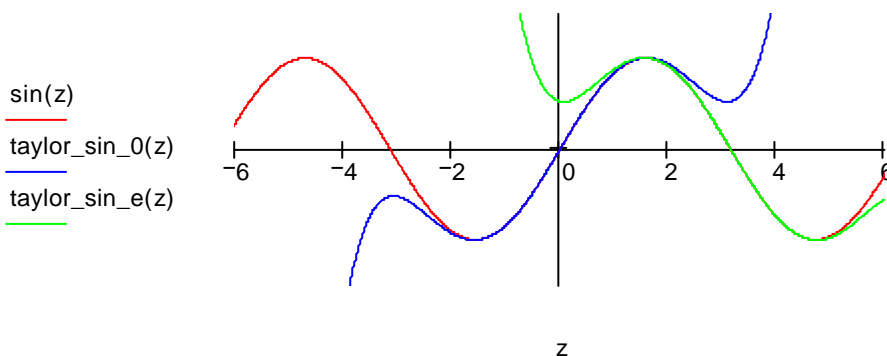
$$\ln(x + 1) \text{ reihe, } x = 0, 7 \rightarrow x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{5} \cdot x^5 - \frac{1}{6} \cdot x^6$$

Graphische Demonstration am Beispiel der Sinusfunktion $z := -2 \cdot \pi, -2 \cdot \pi + 0.01 .. 2 \cdot \pi$

$n := 6$ entwpkt := π

$$\text{taylor_sin_0}(x) := \sin(x) \text{ reihe, } x = 0, n \rightarrow x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5$$

$$\text{taylor_sin_e}(x) := \sin(x) \text{ reihe, } x = \text{entwpkt}, n \rightarrow -x + \pi + \frac{1}{6} \cdot (x - \pi)^3 - \frac{1}{120} \cdot (x - \pi)^5$$



[zurück zum Inhalt](#)

■ Die Approximation einer beliebigen Funktion durch Taylorpolynome (Animation)

[zurück zum Inhalt](#)

Als Beispiel wird die Exponentialfunktion verwendet, man kann aber diese durch eine beliebige andere bei $x=0$ entwickelbare Funktion ersetzen. Dazu muß nur $f(x)$ undefiniert und gegebenenfalls der z -Bereich bzw. der Bereich der grafischen Darstellung angepaßt werden

$n := 5 + \text{FRAME}$

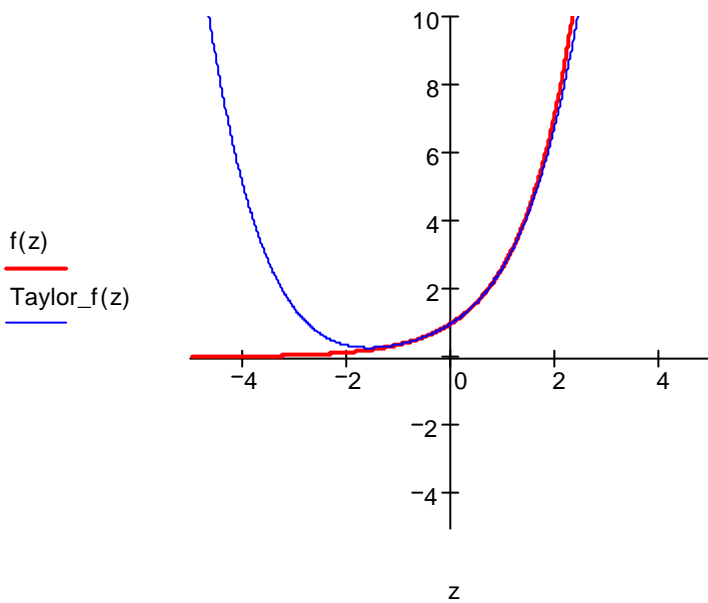
$f(x) := e^x$

$z := -5, -4.99.. 5$

$\text{Taylor}_f(x) := f(x) \text{ reihe, } x, n \rightarrow 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4$

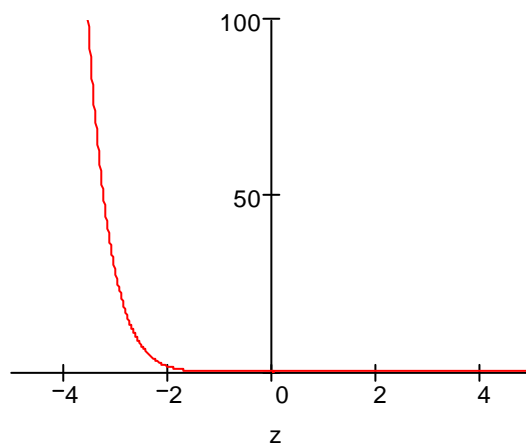
Taylorpolynom bis zum Grad $n - 1 = 4$

Animation mit $n:=1+\text{FRAME}$ und $\text{FRAME} = 0 - 10$ (beispielsweise) durchführen!



Darstellung des relativen Fehlers der Approximation durch das Taylorpolynom

$\frac{|f(z) - \text{Taylor}_f(z)|}{f(z)}$



$n - 1 = 4$

[zurück zum Inhalt](#)

■ Integration mit Reihenentwicklungen (Beispiel Normalverteilung) [zurück zum Inhalt](#)

Eine wichtige Anwendung von Reihenentwicklungen bezieht sich auf die (allgemeine) näherungsweise Berechnung von Integralen, für welche keine Stammfunktion existiert. (z.B. elliptische Integrale,)

Das Prinzip wird hier an Hand der Ermittlung der normierten Normalverteilung rechnerisch und graphisch demonstriert. Integrale der Dichtefunktion können als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.

$$g_{nv}(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Die Dichtefunktion der normierten Normalverteilung

Diese Funktion ist nicht elementar integrierbar. Daher wird die e-Funktion in eine Reihe entwickelt. Dies kann direkt geschehen oder durch die Reihenentwicklung von e^u , indem $u = \frac{-x^2}{2}$ anschließend substituiert wird.

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ reihe, } x, 11 \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{8} \cdot x^4 - \frac{1}{48} \cdot x^6 + \frac{1}{384} \cdot x^8 - \frac{1}{3840} \cdot x^{10}$$

$$e^u \left\{ \begin{array}{l} \text{reihe, } u, 6 \\ \text{ersetzen, } u = \frac{-x^2}{2} \end{array} \right. \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{8} \cdot x^4 - \frac{1}{48} \cdot x^6 + \frac{1}{384} \cdot x^8 - \frac{1}{3840} \cdot x^{10}$$

Wir verwenden das Polynom 10.Grades zur näherungsweisen Berechnung des Integrals in den Grenzen a und b

$$nv(a, b) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_a^b \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{8} \cdot x^4 - \frac{1}{48} \cdot x^6 + \frac{1}{384} \cdot x^8 - \frac{1}{3840} \cdot x^{10} \right) dx$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Meßwert innerhalb des Bereiches $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ befindet, entspricht dem Integral dieser Funktion mit den Grenzen $a = -1$ und $b = 1$.

$$nv(-1, 1) = 0.68268824$$

Im Vergleich mit der in Mathcad eingebauten Funktion für die normierte Normalverteilung sehen wir eine Abweichung erst bei der 6.Dezimalstelle

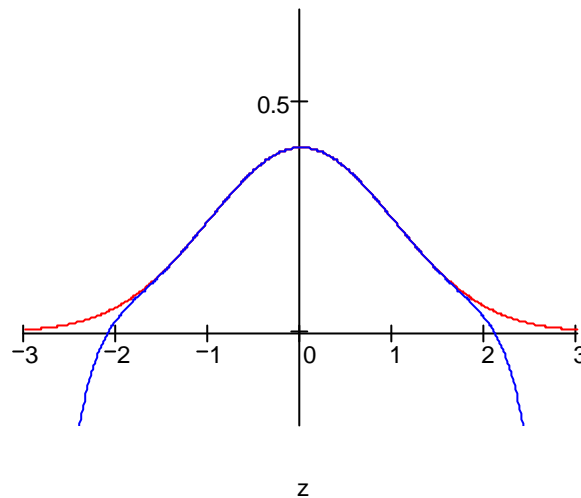
$$knorm(1) - knorm(-1) = 0.68268949$$

Für den graphischen Vergleich der Normalverteilung mit ihrer Näherung durch Reihenentwicklung definieren wir uns eine "angenäherte Dichtefunktion" $g_{nv_n}(x)$. **Der Grad der Näherung wird neben der Graphik bestimmt!!**

$$g_{nv_n}(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ reihe, } x, \text{ grad} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot x^2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot x^4 - \frac{1}{96} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot x^6 + \frac{1}{768} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot x^8 - \frac{1}{6144} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot x^{10}$$

$$z := -3, -2.99.. 3$$

$g_{nv}(z)$
 $g_{nv_n}(z)$



Polynomgrad kleiner als:

grad \equiv 11

[zurück zum Inhalt](#)

■ Herleitung / Anwendung von Näherungsformeln

[zurück zum Inhalt](#)

Exakte Zusammenhänge physikalischer Größen werden oft durch komplizierte bzw. numerisch schwer handbare Formeln beschrieben. Zur tatsächlichen Berechnung werden - insbesondere in der Technik - häufig einfacher zu handhabende Näherungsformeln verwendet. Diese erhält man allgemein dadurch, dass man die exakte Formel (Funktion) in der Nähe des interessierenden Wertes in eine Taylor-Reihe entwickelt und nach dem ersten, zweiten oder dritten Glied abbricht.

1. Beispiel: Berechnung der kinetischen Energie eines Körpers.

Nach A. Einstein gilt:

$$E_{\text{kin}} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

m_0 Ruhemasse
 c Lichtgeschwindigkeit
 v Geschwindigkeit des Körpers
 m Masse des Körpers bei der Geschwindigkeit v

Der folgende Ausdruck kann nun in eine Taylorreihe um $x=0$ entwickelt werden.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ reihe, } x=0, 8 \rightarrow 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{3}{8} \cdot x^4 + \frac{5}{16} \cdot x^6 + \frac{35}{128} \cdot x^8$$

Ersetzen wir x durch v/c und setzen wir in die Formel für die kinetische Energie ein. Wir erhalten:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-x^2}} \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 \left| \begin{array}{l} \text{reihe, } x, 8 \\ \text{ersetzen, } x = \frac{v}{c} \end{array} \right. = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{m_0}{c^2} \cdot v^4 + \frac{5}{16} \cdot \frac{m_0}{c^4} \cdot v^6$$

Daher erhält man für $v \ll c$ die Formel aus der Newton'schen Mechanik:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_0 \cdot v^2}{2}$$

bzw. als nächste Näherung für "kleines" v/c

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_0 \cdot v^2}{2} + \frac{3}{8} \cdot m_0 \cdot v^2 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

2. Beispiel: Freier Fall mit Luftwiderstand

Das Weg-Zeit-Gesetz für den freien Fall mit Luftwiderstand lautet

$$s(t) = \frac{v_s^2}{g} \cdot \ln \left(\cosh \left(\frac{g \cdot t}{v_s} \right) \right)$$

v_s ... maximal erreichbare Geschwindigkeit (als Maß für den Luftwiderstand)

g Erdbeschleunigung

Wir versuchen, eine Näherungsformel über die Reihenentwicklung des transzendenten Terms zu erhalten:

$$\ln(\cosh(x)) \text{ reihe, } x, 8 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \cdot x^4 + \frac{1}{45} \cdot x^6$$

$$\frac{v_s^2}{g} \cdot \ln(\cosh(x)) \left| \begin{array}{l} \text{reihe, } x, 8 \\ \text{ersetzen, } x = \frac{g \cdot t}{v_s} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - \frac{1}{12 \cdot v_s^2} \cdot g^3 \cdot t^4 + \frac{1}{45 \cdot v_s^4} \cdot g^5 \cdot t^6$$

Für kleines $x = \frac{g \cdot t}{v_s}$ kann als eine entsprechende Näherung verwendet werden. Dies ist der Fall für geringen Luftwiderstand (=großes v_s) und / oder für kleines t (also für den "Anfang" des freien Falles).

Man erhält die bereits Galilei bekannte Formel:

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

beziehungsweise als "nächste" Näherung für kleines "x":

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 - \frac{g^3 \cdot t^4}{12 \cdot v_s^2}$$

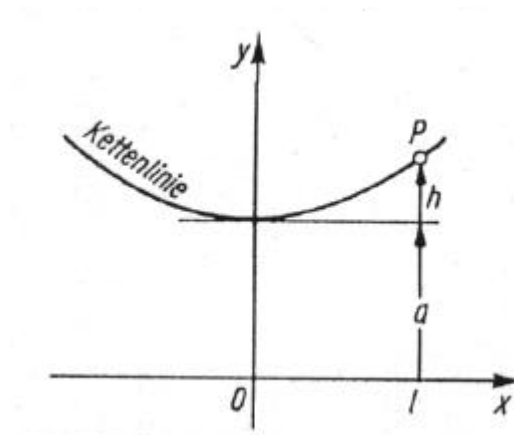
3. Beispiel: Die Kettenlinie

$$y = a \cdot \cosh \left(\frac{x}{a} \right) \quad \text{Gleichung der Kettenlinie}$$

Die Größe a soll aus der gegebenen halben Spannweite l und dem Durchhang h bestimmt werden.

Eine Bestimmungsgleichung für a erhält man über die Koordinaten des Punkte P (siehe Skizze):

$$a + h = a \cdot \cosh \left(\frac{l}{a} \right)$$



Diese Gleichung ist aber transzendent und kann nur näherungsweise gelöst werden (Newtonverfahren,). Wir versuchen aber, eine **allgemeine Näherungslösung** für die Gleichung über die Reihenentwicklung des rechten Terms zu erhalten:

$$a \cdot \cosh(x) \left| \begin{array}{l} \text{reihe, } x, 4 \\ \text{ersetzen, } x = \frac{l}{a} \end{array} \right. \rightarrow a + \frac{1}{2 \cdot a} \cdot l^2$$

$$a + h = a + \frac{1}{2 \cdot a} \cdot l^2 \text{ auflösen, } a \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{h} \quad \text{Man erhält also: } a = \frac{l^2}{2 \cdot h}$$

Diese Näherung ist natürlich nur zulässig, wenn l klein im Vergleich zu a ist, bzw. $\frac{l}{a} \ll 1$.

Wie aus der Gleichung für a hervorgeht, ist dies der Fall, wenn $h \ll l$ ist, das bedeutet: der Durchhang muß klein im Vergleich zur Spannweite sein. Das ist beispielsweise bei Hochspannungsleitungen gegeben.

Setzen wir nun den angenäherten Wert für a in die Definitionsgleichung der Kettenlinie ein, so erhalten wir:

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \text{ ersetzen, } a = \frac{l^2}{2 \cdot h} \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{h} \cdot \cosh\left(2 \cdot \frac{x}{l^2} \cdot h\right)$$

Nun wird in der Praxis auch diese Gleichung für $h \ll l$ oft durch den Anfang der Reihe dargestellt:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{h} \cdot \cosh(y) \left| \begin{array}{l} \text{reihe, } y, 3 \\ \text{ersetzen, } y = \frac{2 \cdot x \cdot h}{l^2} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{h} + \frac{1}{l^2} \cdot h \cdot x^2$$

Damit erhalten wir schließlich für die angenäherte Gleichung der Kettenlinie eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel in der Höhe $a = \frac{l^2}{2 \cdot h}$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{h} + \frac{1}{l^2} \cdot h \cdot x^2$$

Restgliedabschätzung für $y = \frac{l^2}{2 \cdot h} \cdot \cosh\left(\frac{2 \cdot h}{l^2} \cdot x\right)$

$$\cosh\left(\frac{2 \cdot h}{l^2} \cdot x\right) \text{ reihe, } x, 5 \rightarrow 1 + 2 \cdot \frac{h^2}{l^4} \cdot x^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{h^4}{l^8} \cdot x^4$$

Der Abbruch der Reihe erfolgte nach dem 2.Glied. Daher gilt für das Restglied:

Daher gilt (für das Restglied)

$$R_4(x) = \frac{\left(\frac{d^4}{dx^4} f(\delta \cdot x) \right)}{4!} \cdot x^4 \quad \text{mit } 0 < \delta < 1$$

Da $\cosh(x)$ für $x > 0$ monoton steigend ist, kann das Restglied mit $\delta=1$ und $x=l$ nach oben abgeschätzt werden:

$$R_{4_max}(l) = \frac{l^2}{2 \cdot h} \cdot \frac{\frac{d^4}{dx^4} \cosh\left(\frac{2 \cdot h}{l^2} \cdot x\right)}{4!} \cdot x^4 \text{ ersetzen, } x = l \rightarrow R_{4_max}(l) = \frac{1}{3 \cdot l^2} \cdot h^3 \cdot \cosh\left(\frac{2}{l} \cdot h\right)$$

Die Abschätzung des Restgliedes ergibt also folgenden maximalen Fehler bei der Anwendung der "Parabelgleichung"

$$R_{max}(h, l) := \frac{1}{3 \cdot l^2} \cdot h^3 \cdot \cosh\left(\frac{2}{l} \cdot h\right)$$

Beispiel: $l := 100\text{m}$ $h := 10\text{m}$

$$R_{max}(h, l) = 0.034 \text{ m}$$

[zurück zum Inhalt](#)

$$i8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot x^8 - \frac{1}{7680} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot x^{10}$$

