Wilfried Rohm wilfried.rohm@schule.at

Die Logarithmische Spirale und ihre Faszination

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Polarkoordinaten, Archimedische Spirale, Logarithmische Spirale, polare Steigung, Ableitung einer Funktion in Parameterform

- Kurzzusammenfassung

  **Die wesentlichen, praxisrelevanten mathematischen Eigenschaften der Logarithmischen Spirale und der Archimedischen Spirale werden dargestellt und rechnerisch / zeichnerisch begründet.
  Davon ausgehend werden einige Beispiele für das Auftreten dieser Spiralformen in Naturwissenschaft und Technik aufgezeigt.**

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 3.Jahrgang, alle Abteilungen

- Mathcad-Version: **erstellt in der Version 11**

- Literaturangaben:

  **MAOR, Eli: Die Zahl e - Geschichte und Geschcihten, Birkhäuser.
  OGILVY, Stanley: Unterhaltsame Geometrie, Vieweg.
  McMAHON / BONNER: Form und Leben, Konstruktionen vom Reißbrett der Natur**

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Es handelt sich hier um ein bemerkenswertes Randthema der Mathematik im Oberstufenbereich, das für alle, die sich damit beschäftigen, ausgesprochen faszinierend ist. Nicht zuletzt haben sich auch viele Künstler und Naturwissenschafter mit diesen Formen beschäftigt. Auch ein gewisser Zusammenhang zu mythologischen Themenbereichen (Labyrinthe,...) lässt sich vielleicht daraus erklären.

Das Aussehen der Logarithmischen Spirale

-> Inhaltsübersicht

Meist wird die logarithmische Spirale in Parameterform angeschrieben:

Beispiel für logarithmische Spirale $r(\phi) = C \cdot a^{\phi}$

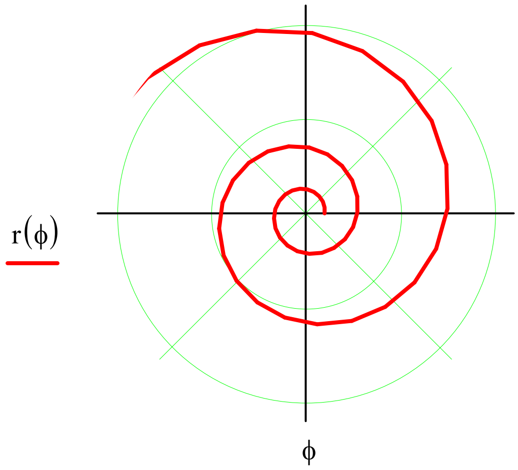
oder mit der Basis e $r(\phi) = C \cdot e^{k \cdot \phi}$

$k := 0.16$ $C := 1$ Variation der Parameter!

$C := C$ $k := k$ Rücknahme der Defintion für die späteren, symbolischen Berechnungen!

$r(\phi) := C \cdot e^{k \cdot \phi}$

$\phi := 0, 0.3 .. 8 \cdot \pi$ $\phi := \phi$



-> Inhaltsübersicht

Drei Eigenschaften der Logarithmischen Spirale

1) Die Gleichwinkeligkeit

Die bekannteste und wichtigste Eigenschaft der logarithmischen Spirale sagt aus, dass alle Radiusvektoren unter dem gleichen Winkel ψ geschnitten werden.

In der Differentialrechung wird der Tangens von ψ "POLARE STEIGUNG" genannt. Sie ist für eine Funktion in Polarform folgendermaßen definiert (Herleitung in Schulbüchern oder nahezu iedem Buch der Differential- und Integralrechnung):

$$\tan\psi = r(\phi) \cdot \left(\frac{d}{dr}\phi\right) = \frac{r(\phi)}{\left(\frac{d}{d\phi}r(\phi)\right)}$$

Wenn die Logarithmische Spirale die obige Eigenschaft hat, müsste die polare Steigung also - unabhängig von ϕ - stets konstant sein! Dies ist tatsächlich so, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$r(\phi) := C \cdot e^{k \cdot \phi}$$

$$\frac{d}{d\phi} r(\phi) \rightarrow C \cdot k \cdot \exp(k \cdot \phi)$$

Polare Steigung $\dfrac{r(\phi)}{\frac{d}{d\phi} r(\phi)} \rightarrow \dfrac{1}{k}$ konstant!!!!

d.h. Die Logarithmische Spirale hat überall den gleichen Schnittwinkel !!

Umständlicher in der Rechnung - dafür eindrucksvoller, weil grafisch darstellbar - ist die Rechnung über die Parameterform der Logarithmischen Spirale. Im Folgenden wird eine Logarithmische Spirale im kartesischen Koordinatensystem gezeichnet. In den Schnittpunkten mit dem Radiusvektor l(xx,phi) werden die Tangenten gezeichnet und der Schnittwinkel α berechnet.
Eine Änderung des Winkels phi bewirkt keine Änderung des Schnittwinkels α!

Ableitung einer Funktion in Parameterform

allgemein gegeben seien $y(t)$ und $x(t)$

dann gilt : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{y_{punkt}}{x_{punkt}}$

daher gilt für die logarithmische Spirale

$$x(\phi) := r(\phi) \cdot \cos(\phi)$$

$$y(\phi) := r(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$y_{strich}(\phi) := \frac{\frac{d}{d\phi}y(\phi)}{\frac{d}{d\phi}x(\phi)} \rightarrow \frac{C \cdot k \cdot \exp(k \cdot \phi) \cdot \sin(\phi) + C \cdot \exp(k \cdot \phi) \cdot \cos(\phi)}{C \cdot k \cdot \exp(k \cdot \phi) \cdot \cos(\phi) - C \cdot \exp(k \cdot \phi) \cdot \sin(\phi)}$$

Nun Aufstellen der Tangentengleichungen in den Schnittpunkten in der Form $y = kx + d$

$d(\phi) := y(\phi) - y_{strich}(\phi) \cdot x(\phi)$ Berechnen der Größe d in Abhängigkeit vom Winkel phi

$tangente(t,\phi) := y_{strich}(\phi) \cdot t + d(\phi)$ Tangentengleichung

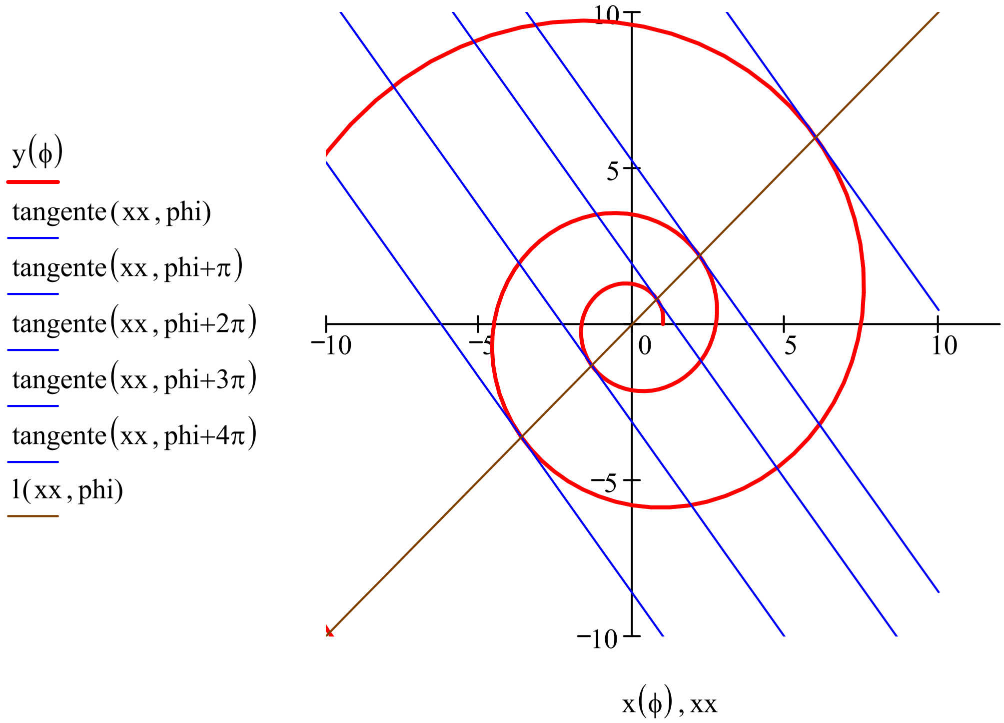
$l(t,\phi) := \tan(\phi) \cdot t$ Gleichung der Geraden durch den Urspruing mit Winkel ϕ (beliebiger "Radiusvektor")

Nun ändere man die Werte von phi und beobachte Grafik und Ergebnis von α:

Schnittwinkel

$phi := \frac{\pi}{4}$ $\alpha := \text{atan}\left(y_{strich}(phi)\right) - phi$ $\alpha = -99.09\,\text{Grad}$

$xx := -10, -9 .. 10$ $\phi := 0, 0.1 .. 8 \cdot \pi$ $\phi := \phi$



2) Die Rektifikation der Logarithmischen Spirale

Bereits 1645 entdeckte Evangelista Torricelli (1608-16479), ein Schüler Galileis, dass der Weg der Spirale von irgendeinem Punkt zum Pol (auf den sich die Spirale zusammenzieht) trotz der unendlich vielen Umdrehungen endlich ist. Er bewies ausserdem, dass die Bogenlänge von einem beliebigen auf der x-Achse liegenden Punkt P der Spirale bis zum Pol gleich ist der Länge des von P bis zur y-Achse gemessenen Abschnittes der Tangente im Punkt P an die Spirale! Das Ergebnis von Torricelli ist übrigens die **erste bekannte *Rektifikation* (=Bestimmen der Bogenlänge) einer nichtalgebraischen Kurve**!
Dies wollen wir im Folgenden nachrechnen und zeichnerisch darstellen!

Länge des Bogens von einem Punkt zum Pol (Mittelpunkt)

$$s = \int_{\phi 1}^{\phi 2} \sqrt{(r(\phi))^2 + \left(\frac{d}{d\phi} r(\phi)\right)^2}\, d\phi$$

mit

$$C := C \qquad k := k$$

$$r(\phi) := C \cdot e^{k \cdot \phi}$$

$$\frac{d}{d\phi} r(\phi) \rightarrow C \cdot k \cdot \exp(k \cdot \phi)$$

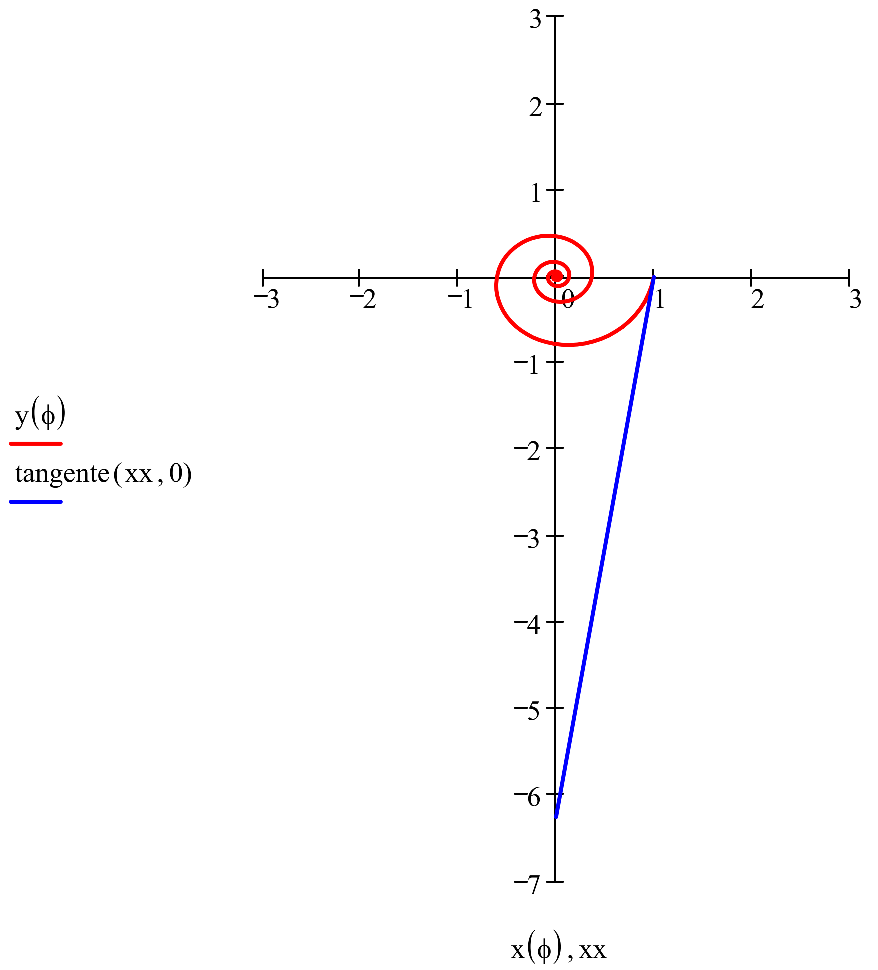
$$s = \int_{\phi 1}^{\phi 2} \sqrt{C^2 \cdot \left(e^{k\phi}\right)^2 + C^2 \cdot k^2 \cdot \left(e^{k\phi}\right)^2}\, d\phi$$

$$s = C \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \int_{\phi 1}^{\phi 2} e^{k \cdot \phi}\, d\phi = \frac{C \cdot \sqrt{1 + k^2}}{k} \cdot \left(e^{k \cdot \phi 2} - e^{k \cdot \phi 1}\right)$$

Setzen wir nun beispielsweise $\phi 2 = 0$ und lassen $\phi 1$ gegen minus Unendlich gehen, so erhält man:

$$s = \frac{C \cdot \sqrt{1 + k^2}}{k} \qquad s := C \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 1} \qquad s = 6.329$$

$\phi := -100, -100 + 0.1 .. 0$ $\qquad$ $xx := 0 .. 1$



$\phi := \phi$ Für die weitere symbolische Berechnung!

Nun legen wir - siehe obige Zeichnung - die Tangente an den gleichen Punkt - den Punkt mit ϕ=0. Von oben (Eigenschaft 1) übernehmen wir für die Tangentengleichung (allgemein)

$d(\phi) := y(\phi) - y_{strich}(\phi) \cdot x(\phi)$ Schnittpunkt mit der y-Achse

$\text{tangente}(t,\phi) := y_{strich}(\phi) \cdot t + d(\phi)$

Allgemein gerechnet erhalten wir:

$$y_{strich}(\phi) \rightarrow \frac{C \cdot k \cdot \exp(k \cdot \phi) \cdot \sin(\phi) + C \cdot \exp(k \cdot \phi) \cdot \cos(\phi)}{C \cdot k \cdot \exp(k \cdot \phi) \cdot \cos(\phi) - C \cdot \exp(k \cdot \phi) \cdot \sin(\phi)}$$

$d(0) \rightarrow \frac{-1}{k} \cdot C$ Schnittpunkt mit der y-Achse $d(0) = -6.25$

$x(0) \rightarrow C$ Schnittpunkt mit der x-Achse $x(0) = 1$

$l := \sqrt{(d(0))^2 + x(0)^2}$ $l \rightarrow \left(\frac{1}{k^2} \cdot C^2 + C^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Länge des Tangentenstückes

$l = 6.329$ Symbolisch und numerisch die gleichen Werte wie oben!

3) Die Inversion der Logarithmischen Spirale

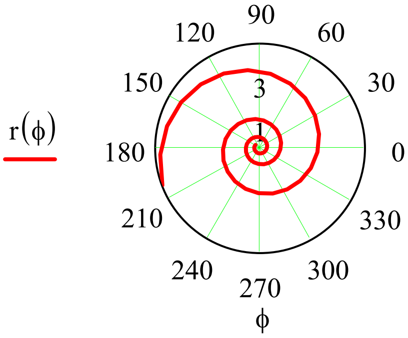
Die Logarithmische Spirale bleibt gegenüber den meisten geometrischen Transformationen *invariant*, d.h. unverändert. Dies wird hier am Beispiel der Inversion demonstriert, die ja z.B. in der Elektrotechnik Anwendung findet (siehe der Artikel "***Ortskurven: Darstellung und Berechnungen***" auf **www.math-tech.at**)
Bei der Inversion wird der Punkt P mit den Polarkoordianten (r, ϕ) auf einen Punkt mit den Polarkoordinaten $\left(\frac{1}{r}, \phi\right)$ abgebildet. Gewöhnlich erfährt eine Kurve drastische Veränderungen, wenn sie einer Inversion unterworfen wird. Anders bei der logarithmischen Spirale: Wie nachfolgende Berechnung und Zeichnung zeigt, ist die Bildkurve spiegelbildlich zur ursprünglichen Spirale!

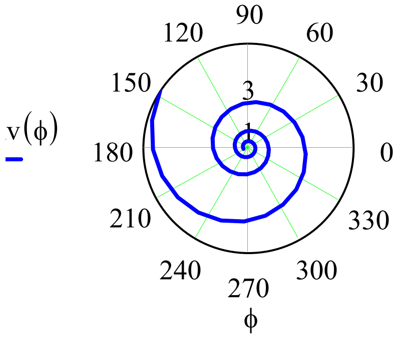
$\phi := \phi$

$r(\phi) \rightarrow C \cdot \exp(k \cdot \phi)$ $\quad rinv(\phi) := \frac{1}{r(\phi)}$ $\quad rinv(\phi) \rightarrow \frac{1}{C \cdot \exp(k \cdot \phi)}$

$\left(\frac{1}{r(\phi)} = \frac{1}{C} \cdot e^{-k \cdot \phi}\right)$

$\phi := -10, -10 + 0.3 .. 10$





-> Inhaltsübersicht

Anwendungen der Logarithmischen Spirale

Die mir bekannten Anwendungen der Logarithmischen Spirale sind großteils auf die Eigenschaft der Gleichwinkeligkeit zurückzuführen, Beispiele dazu:

- **Fräserform:** Häufig nach einer logarithmischen Spirale, damit der Schnittwir beim Nachschleifen konstant bleibt.
- **Radialturbinenschaufeln:** Die Form nach einer logarithmischen Spirale bewirkt, dass der Auftreffwinkel des Dampfstrahles konstant bleibt.
- **Winkelkonstante Spiralantennen:** Ist eine in gewissen Bereichen frequenzunabhängige Antennenform (Näheres siehe: **http://www.wolfgang-rolke.de/antennas/ant_200.htm#230)**
- **Konstante Beschleunigung**: Die logarithmische Spirale kann mit konstanter Beschleunigung durchfahren werden. Wird die Spirale mit zunehmender Krümmung (in sich verengender Richtung) durchfahren, so ist auch die Bremsbeschleunigung konstant.(Näheres siehe: **http://htc.physik.hu-berlin.de/~mitdank/dist/scriptenm/spiralen.htm**)
- **Spiralformen von Galaxien:** Möglicher Weise hängt der oben angegebene Punkt mit der Beobachtung zusammen, dass Sternengalaxien ebenfalls logarithmische Spiralen bilden.
- **Wachstumsformen in der Natur:** Beim Punkt "**Die Faszination der logarithmischen Spirale**" dieses Artikels wird gezeigt und begründet, dass isometrische Überlegungen dazu führen, dass die logarithmische Spirale die bevorzugte Form einer "Wachstumsspirale" in der Natur sowohl bei Tieren als auch Pflanzen ("Phyllotaxis"=Blattstellungen) ist!
(siehe z.B. auch **http://www.alferillu.de/privat/privat_fib014.html)**

-> Inhaltsübersicht

Archimedische Spirale

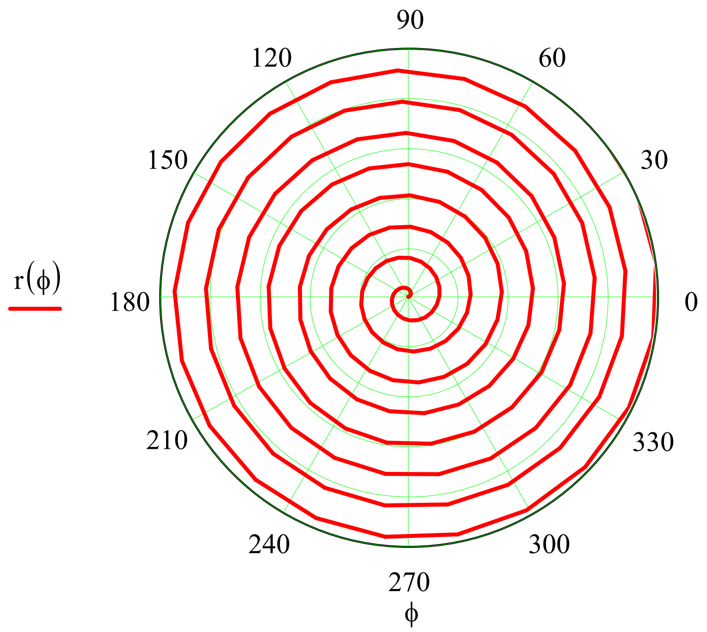
Ergänzend und als Gegenüberstellung zur Logarithmischen Spirale wird hier noch die Archmideische Spirale erwähnt, welche dadurch gekennzeichnet ist, dass der Radius linear mit dem Winkel zunimmt! Daher entstehen Spiralen, deren Abstände untereinander konstant sind (konstanter Windungsabstand)
Beispiele aus der Praxis:

- **Laufkatze eines Drehkranes:** Wenn diese mit konstanter Geschwindigkeit nach aussen (bzw. innen) fährt und gleichzeitig der Arm des Drehkranes gedreht wird, beschreibt die Archmidesche Spirale die Lage der Laufkatze i Abhängigkeit vom Winkel.
- **Die Spiralenförmige Speicherung von Daten** auf CD oder Langspielplatten (LP´s)

$a := 2$

$r(\phi) := a \cdot \phi$

$\phi := 0, 0.3 .. 20 \cdot \pi$



Im Gegensatz zur Logarithmischen Spirale ist diese aber nicht gleichwinkelig! Dies wird demonstriert, indem einfach der entsprechende Abschnitt von oben herunterkopiert und mit der archimedischen Spirale dargestellt und berechnet wird.

Es gilt für die archimedische Spirale $r(\phi) := a \cdot \phi$

$x(\phi) := r(\phi) \cdot \cos(\phi)$

$y(\phi) := r(\phi) \cdot \sin(\phi)$

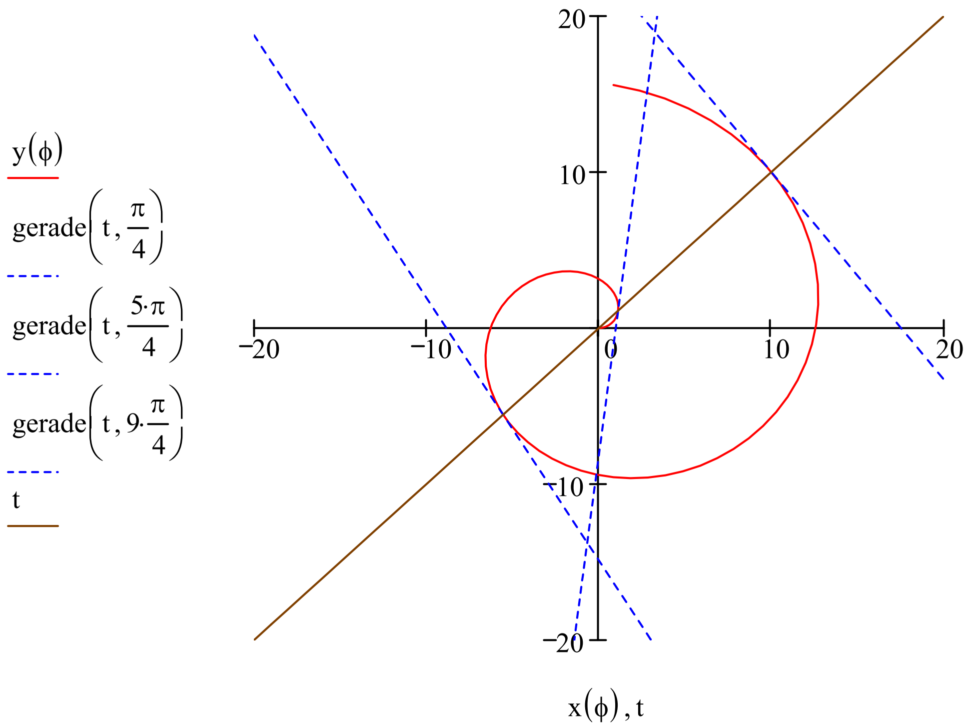
$$y_{strich}(\phi) := \frac{\left(\frac{d}{d\phi} r(\phi)\right) \cdot \sin(\phi) + r(\phi) \cdot \cos(\phi)}{\left(\frac{d}{d\phi} r(\phi)\right) \cdot \cos(\phi) - r(\phi) \cdot \sin(\phi)}$$

$y = kx + d$

$d(\phi) := y(\phi) - y_{strich}(\phi) \cdot x(\phi)$

$gerade(t, \phi) := y_{strich}(\phi) \cdot t + d(\phi)$

$\phi := 0, 0.1 .. 10 \cdot \frac{\pi}{4}$ $t := -20 .. 20$



[-> Inhaltsübersicht]