Wilfried Rohm

# Reifeprüfungsaufgaben (SRDP) 2016

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  **Funktionen, Trigonometrie, Differentialrechnung, Integralrechnung, Normalverteilung, Binomialverteilung, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Regression, Ausgleichsfunktionen, Interpolation, Polynomfunktionen, Lineare Funktion, Exponentialfunktion, Allgemeine Sinusfunktion, Differentialgleichungen**

- Kurzzusammenfassung

  **Hier werden die Lösungen der standardisierten Reifeprüfungsaufgaben 2016 (Haupttermin) für den Teil A sowie für den Cluster 2 an den Höheren Technischen Lehranstalten Österreichs unter Verwendung von Mathcad vorgeführt. Diese Aufgaben wurden zentral vom BIFIE (Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens) gestellt. Bezüglich der Aufgabenstellungen siehe auch: https://www.bifie.at/node/81**

- Didaktische Überlegungen:

  **Es wird (fast überall) bei den vorgestellten Lösungen über die gestellte Aufgabenstellung hinausgegangen. Dies deswegen, um der Bedeutung dieser Aufgaben für den Einsatz im Unterricht besser gerecht zu werden. In vielen Fällen werden mehrere Lösungswege aufgezeigt (teils auch unter Verwendung verschiedener Methoden von Mathcad)**

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  **Angewandte Mathematik, 1.-5.Jahrgang, alle Abteilungen**

- Mathcad-Version:

  **Mathcad 15**

- Wichtige Anmerkungen:

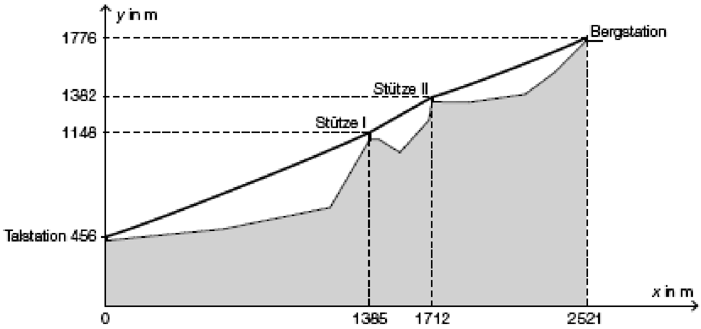
  **Im vorliegenden File wurde nur teilweise davon Gebrauch gemacht, direkt in Matchcad mit Einheiten zu rechnen. Immer dann, wenn das Rechnen mit Einheiten größere Routine im Umgang mit Einheiten erfordert, wurde der einfacheren Lesbarkeit wegen darauf verzichtet.**

  **Bei Grafiken wurden durchgehend die jeweiligen Laufvariablen mit Unterstrich geschrieben (zum Beispiel die Zeit t als "t_"). Dies deswegen, weil bei der Definition der Laufvariablen beispielsweise mit t:=0, 0.01 .. 10 ein Vektor für t erzeugt wird. Dies würde aber bei nachfolgenden numerischen oder symbolischen Auswertungen bzw. Berechnungen teils zu Problemen führen. Außerdem steht bei der Verwendung von Einheiten in Mathcad 15 "t" für "1 Tonne".**
  **Zur besseren Übersicht werden geforderte Ergebnisse GELB hervorgehoben, Angaben hingegen TÜRKIS/BLAU.**

  **Die Aufgaben aus Teil A wurden in ALLEN Schulen des Berufsbildenden Schulwesens in Österreich (HTL, HAK, HBLA, HLW, BAKIP) in gleicher Form gestellt. Es handelt sich also dabei um die Aufgaben 1 bis 5. Die Aufgaben 7, 8, 9 sind "clusterspezifisch", d.h. sie sind bestimmten Typen von Höheren Technischen Lehranstalten zugeordnet (siehe auch: https://www.bifie.at/node/81 )**
  **Cluster 1: Bautechnische Abteilungen und Verwandte**
  **Cluster 2: Elektrotechnische Abteilungen und Verwandte**
  **Cluster 3: Maschinenbauliche Abteilungen und Verwandte**
  **Cluster 4: Chemie**
  **Cluster 5: Informationstechnik**

# Teil A: Aufgabe 1 - Gondelbahn auf den Untersberg

**In nachstehender Abbildung ist der Verlauf des Tragseils der Gondelbahn von St. Leonhard auf den Untersberg vereinfacht dargestellt.**




$x$ ... horizontaler Abstand von der Talstation in Metern (m)
$y$ ... Höhe über Meeresniveau in m

a) Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

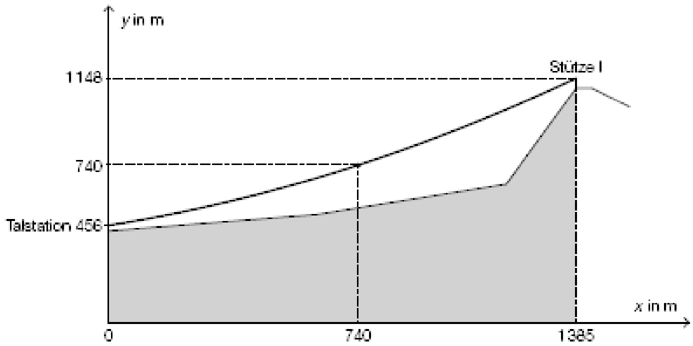
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1776 - 456}{2521 - 0} \approx 0{,}52$$

– Beschreiben Sie, was das Ergebnis im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet. *[1 Punkt]*

b) Der Seilverlauf zwischen Stütze I und Stütze II wird vereinfacht als linear angenommen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Steigungswinkel des Seilverlaufs in diesem Abschnitt kleiner als 40° ist. *[1 Punkt]*

c) Aufgrund des Eigengewichts hängt das Tragseil zwischen der Talstation und der Stütze I durch. Sein Verlauf kann näherungsweise als Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).




– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten $a$, $b$ und $c$ ermittelt werden können. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie $a$, $b$ und $c$. *[1 Punkt]*

### Teil a) Differenzenquotient

In der Angabe wird der Differenzenquotient von der Talstation zur Bergstation angegeben.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1776 - 456}{2521 - 0} = 0.52$$

Ein Differenzenquotient gibt die Steigung der entsprechenden Verbindungsline an ("Verhältnis von Gegenkathete zur Ankathete vom Steigungswinkel α aus gesehen").
Da die Seilbahn auf Grund der Stützen unterschiedliche Steigungen aufweist, kann man sagen, dass der vorliegende Differenzenquotient **die durchschnittliche Steigung (mittlere Steigung) der Seilbahn auf den Untersberg** angibt.

### Teil b) Seilverlauf zwischen Stütze I und Stütze II

Nun lautet der Differenzenquotient (bzw. die Steigung des Seiles):

$$k := \frac{1382 - 1148}{1712 - 1385} = 0.7156$$

Für den Steigungswinkel gilt daher : $\alpha := \operatorname{atan}(k) = 0.621$ $\quad \alpha = 35.587 \cdot {}^\circ$

Wie man sieht, ist dieser errechnete Winkel kleiner als 45°

### Teil c) Verlauf des Tragseils aufgrund des Eigengewichtes

Ansatz : $y(x, a, b, c) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Für die gegebenen drei Punkte gilt daher das folgende Gleichungssystem

Vorgabe

$$y(0, a, b, c) = 456$$

$$y(740, a, b, c) = 740$$

$$y(1385, a, b, c) = 1148$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \operatorname{Suchen}(a, b, c) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1979}{11017675} \\ \frac{552789}{2203535} \\ 456 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00018 \\ 0.250865 \\ 456 \end{pmatrix}$$

#### Variante unter Verwendung der gegebenen Punkte in Form einer Matrix:

Abszisse Ordinate

Herausextrahieren der Abszissen- und Ordinatenwerte

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 456 \\ 740 & 740 \\ 1385 & 1148 \end{pmatrix} \qquad Px := P^{\langle 0 \rangle} \qquad Py := P^{\langle 1 \rangle} \qquad Px = \begin{pmatrix} 0 \\ 740 \\ 1385 \end{pmatrix} \qquad Py = \begin{pmatrix} 456 \\ 740 \\ 1148 \end{pmatrix}$$

Vorgabe

$$y(Px_0, a, b, c) = Py_0$$

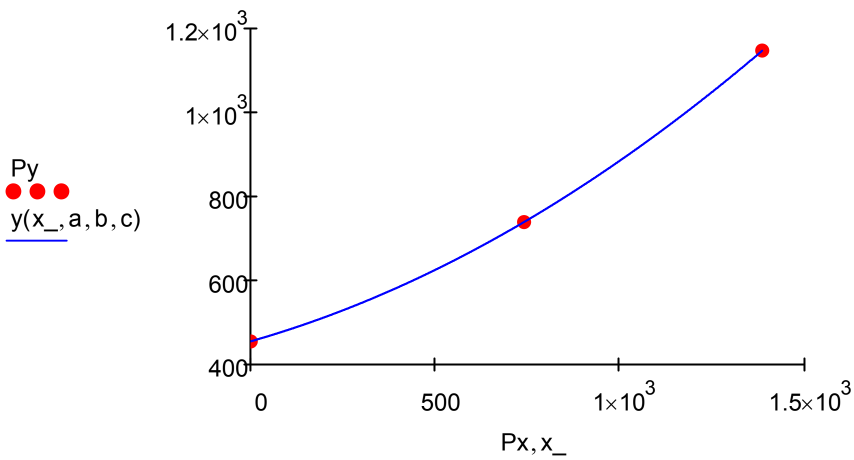
$$y(Px_1, a, b, c) = Py_1$$

$$y(Px_2, a, b, c) = Py_2$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \text{Suchen}(a, b, c) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1979}{11017675} \\ \frac{552789}{2203535} \\ 456 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00018 \\ 0.250865 \\ 456 \end{pmatrix}$$

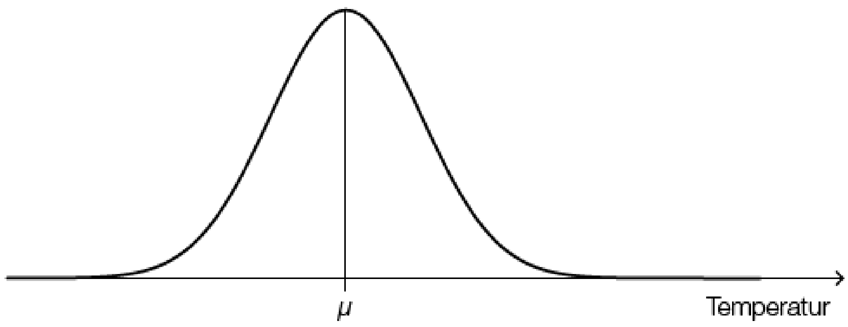
Grafische Darstellung

$$x\_ := 0, 1 .. Px_2$$



# Teil A: Aufgabe 2 - Klimawandel und Ozon

a) Man geht davon aus, dass durch den Klimawandel die Temperaturen steigen. Die mittleren Sommertemperaturen in Wien sind annähernd normalverteilt.*
Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.




– Skizzieren Sie im obigen Diagramm den Graphen der Dichtefunktion einer Normalverteilung, bei der sowohl der Erwartungswert als auch die Standardabweichung größer als in der gegebenen Darstellung sind. *[2 Punkte]*

b) Bei einer Messstation im Bereich des südlichen Polarkreises kann die Ozonmenge pro Quadratmeter in Abhängigkeit von der Zeit für einen bestimmten Zeitraum näherungsweise durch die Funktion $N$ beschrieben werden:

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}9917^t$

$t$ ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Ozonmenge pro Quadratmeter zur Zeit $t$
$N_0$ ... Ozonmenge pro Quadratmeter zur Zeit $t = 0$

– Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Ozonmenge pro Quadratmeter jährlich abnimmt. *[1 Punkt]*

Die Gleichung $0{,}5 = 0{,}9917^t$ wird gelöst.

– Beschreiben Sie die Bedeutung der Lösung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

**Teil a) Dichtefunktion der Normalverteilung**

Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist von zwei Parametern abhängig:

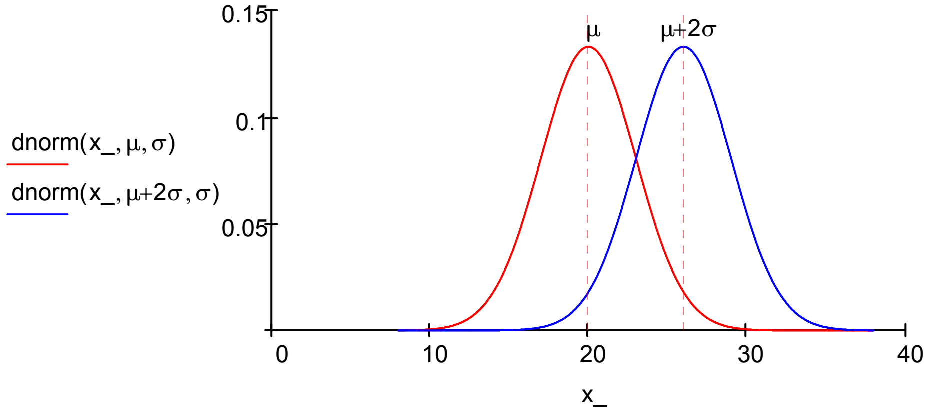
* Der Parameter $\mu$ ist der Erwartungswert der Verteilung - da der Erwartungswert als "theoretischer Mittelwert" gedeutet werden kann, liegt $\mu$ in der "Mitte" der Verteilung, wie in der Angabe bereits eingezeichnet. Eine Erhöhung des Erwartungswertes verschiebt daher die Verteilung als Ganzes nach rechts in Richtung höherer Temperaturwerte (siehe Grafiken weiter unten)

* Der Parameter $\sigma$ legt die Wendepunkte der Dichtefunktion fest, weil diese bei $\mu \pm \sigma$ liegen. Bei größer werdendem $\sigma$ wandern daher diese Wendepunkte weiter hinaus, die Verteilung wird **BREITER**. Da außerdem - was für jede Dichtefunktion gilt - die Fläche unterhalb der Dichtefunktion (genauer: zwischen Dichtefunktion und Abszisse) konstant gleich 1 bzw. 100% bleiben muss, bedeutet ein Breiterwerden der Verteilung gleichzeitig, dass das Maximum kleiner werden muss - die Verteilung wird in Ordinatenrichtung **GESTAUCHT**. (siehe Skizzen)

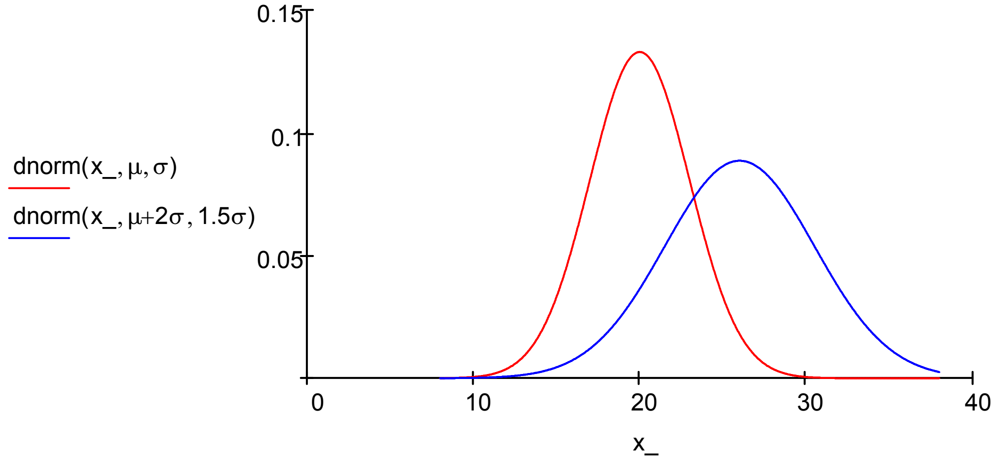
$\mu := 20$ angenommene Werfte für die grafische Darstellung der Normalverteilung

$\sigma := 3$

$x\_ := \mu - 4\cdot\sigma, \mu - 4\cdot\sigma + \frac{\sigma}{100} .. \mu + 6\cdot\sigma$ In der Grafik wird (modellhaft) μ um 2 σ-Einheiten vergrößert




In der folgenden Grafik wird (modellhaft) μ wie oben um 2 σ-Einheiten vergrößert, darüber hinaus aber auch σ selbst um 50% vergrößert




**Teil b) Abnahme der Ozonmenge**

$N_0 := 1 \quad N_0 := N_0$

$N(t) := N_0 \cdot 0.9917^t$

Diese Funktion ist eine **EXPONENTIALFUNKTION**.
Zunächst zeigen wir (exemplarisch), dass die jährliche Abnahme der Ozonmenge tatsächlich konstant bleibt (was ja ohnehin charakteristisch für Exponentialfunktionen ist!)

$\frac{N(t+1)}{N(t)}$ vereinfachen $\rightarrow 0.9917$ also : $N(t+1) = 0.9917 \cdot N(t)$

$\frac{N(t+2)}{N(t+1)}$ vereinfachen $\rightarrow 0.9917$ also : $N(t+2) = 0.9917 \cdot N(t+1)$

$\frac{N(t+3)}{N(t+2)}$ vereinfachen $\rightarrow 0.9917$ also : $N(t+3) = 0.9917 \cdot N(t+2)$

Fazit : Nach jedem Jahr sinkt die Ozonmenge auf das 0,9917-fache der Vorjahresmenge.
Die jährliche Abnahme beträgt das 0,0083-fache der Vorjahresmenge, denn:

$1 - 0.9917 = 0.0083$ bzw. $1 - 0.9917 = 0.83 \cdot \%$

Die Gleichung $0.5 = 0.9917^t$ ist äquivalent zur Gleichung

$$0.5 \cdot N_0 = N_0 \cdot 0.9917^t$$

in dieser Gleichung ist also N(t) gleich $0.5 \cdot N_0$ gesetzt. Daher bedeutet die Lösung der Gleichung

$$0.5 = 0.9917^t \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 83.2$$

jene Zeit, nach der die Ozonmenge (jeweils) auf die Hälfte gesunken ist! (Halbwertszeit)

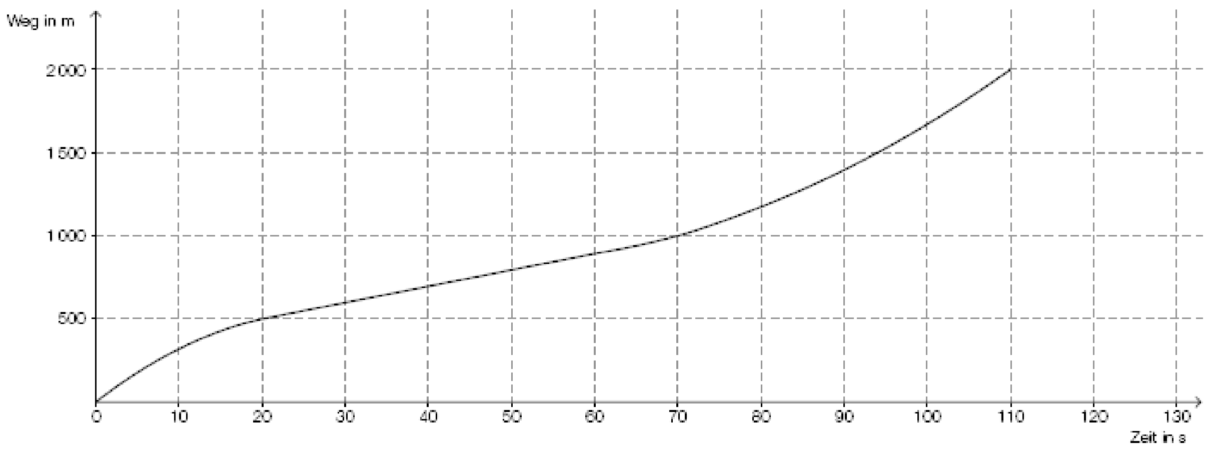
# Teil A: Aufgabe 3 - Section Control

**_Section-Control_ bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.**

**a)** In einem 6 km langen Baustellenbereich wird eine Section-Control errichtet.
Es gilt eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 60 km/h.
Jemand behauptet: „Wenn ich die zulässige Höchstgeschwindigkeit im gesamten Baustellenbereich um 10 % überschreite, dann verkürzt sich meine Fahrzeit im Baustellenbereich um 10 %.“

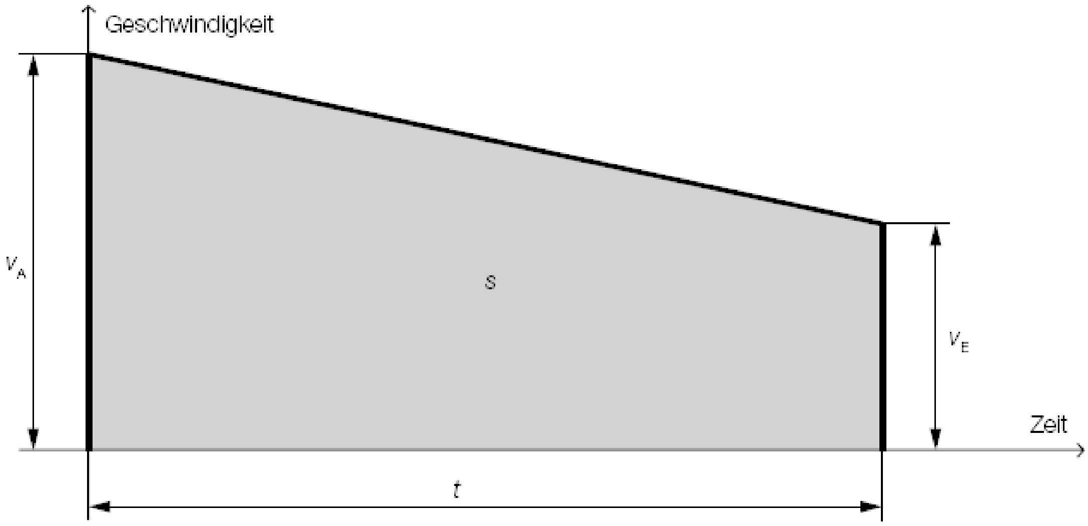
– Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist. *[1 Punkt]*

**b)** Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeuges in einem überprüften Bereich dargestellt.




– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte. *[1 Punkt]*
– Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist. *[1 Punkt]*

c) Ein Fahrzeug fährt durch einen Bereich, der durch eine Section-Control überwacht wird. Seine Geschwindigkeit nimmt auf diesem Streckenabschnitt linear ab.




Die Endgeschwindigkeit $v_E$, die Fahrzeit $t$ und der zurückgelegte Weg $s$ sind bekannt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit $v_A$ des Fahrzeugs:

$v_A$ = ______________________________ *[1 Punkt]*

**Teil a) Section-Control im Baustellenbereich**

Aus $s = v \cdot t$ folgt: $t = \frac{s}{v}$

$$t_1 := \frac{6\text{km}}{60\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0.1 \cdot \text{h}$$

Dies ist die Zeit, welche man bei einer Geschwindigkeit von 60km/h durch den Baustellenbereich benötigt.

$$t_2 := \frac{6\text{km}}{60\frac{\text{km}}{\text{h}} + 0.1 \cdot 60\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0.091 \cdot \text{h}$$

Dies ist die Zeit, welche man bei einer Geschwindigkeit benötigt, welche um 10% die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 60km/h überschreitet.

$$0.1 \cdot \text{h} \cdot 0.90 = 0.09 \cdot \text{h}$$

Dies wäre jene Zeit, welche man benötigen würde, wenn sich die Zeit um 10% verringert - wie man sieht, stimmt das **NICHT** mit t überein!

Andere Variante:

$$\frac{t_2}{t_1} = 0.909091$$

Das heißt, dass die Zeit um weniger als 10% verringert wird, nämlich etwa 9,1%:

$1 - 0.909 = 0.091$

**Teil b) Deutung des Weg-Zeit-Diagramms**

Für die erste Weghälfte der 200m gilt $v_{mittel} := \frac{1000\text{m}}{70\text{s}} = 14.286\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Für die zweite Weghälfte gilt: $v2_{mittel} := \frac{1000\text{m}}{40\text{s}} = 25\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die mittlere Geschwindigkeit in der 2.Weghälfte ist also größer.

In der zweiten Weghälfte wird die gleiche Weglänge in kürzerer Zeit zurückgelegt - also muss die Geschwindigkeit größer sein!

**Teil c) Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit**

Grundsätzlich gilt der folgende physikalische Zusammenhang zwischen Weg s und Geschwindigkeit v:

$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

Dieser Zusammenhang ist in der Angabe (quasi als "Hilfestellung") schon angegeben, weil die Fläche unterhalb der Funktion für v(t) mit s beschriftet und entsprechend markiert ist.
Daher können wir die Formel des Trapezes für die Flächenberechnung verwenden:

$$s = \frac{v_A + V_E}{2} \cdot t \text{ auflösen}, v_A \rightarrow \frac{2 \cdot s - V_E \cdot t}{t}$$

Also gilt: $v_A = \dfrac{2s - v_E \cdot t}{t}$

# Teil A: Aufgabe 4 - Blutkreislauf

**Blut versorgt die Organe des menschlichen Körpers mit Sauerstoff. Das Herz pumpt das Blut in einem Kreislaufsystem durch den Körper.**

**a)** Im Blut gibt es 3 verschiedene Arten von Blutzellen. Ein erwachsener Mensch hat ca. 5 Liter Blut im Körper. Diese 5 Liter enthalten ca. $25 \cdot 10^{12}$ rote Blutkörperchen, ca. $15 \cdot 10^{11}$ Blutplättchen und ca. $3 \cdot 10^{10}$ weiße Blutkörperchen.

– Berechnen Sie, wie viele Blutzellen (rote Blutkörperchen, Blutplättchen und weiße Blutkörperchen zusammen) sich in 1 Kubikmillimeter Blut befinden. *[2 Punkte]*

**b)** Die Pumpleistung des Herzens (in Litern pro Minute) kann in Abhängigkeit vom Alter (in Jahren) annähernd durch eine lineare Funktion *P* beschrieben werden. Sie beträgt bei 20-jährigen Personen 5 Liter pro Minute und bei 70-jährigen Personen 2,5 Liter pro Minute.

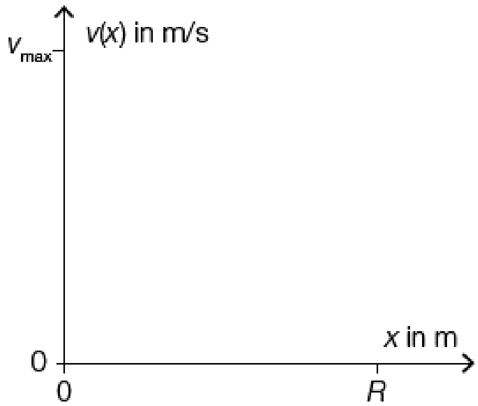
– Stellen Sie eine Funktionsgleichung von *P* auf. *[1 Punkt]*
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) Betrachtet man den Querschnitt eines Blutgefäßes vereinfacht als Kreis, so lässt sich die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in Blutgefäßen näherungsweise durch die Funktion $v$ beschreiben:

$v(x) = v_{max} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)$ mit $0 \leq x \leq R$

$x$ ... Abstand von der Mitte des Blutgefäßes in Metern (m)
$v(x)$ ... Strömungsgeschwindigkeit des Blutes im Abstand $x$ in m/s
$v_{max}$ ... maximale Geschwindigkeit des Blutes in Metern pro Sekunde (m/s) mit $v_{max} > 0$
$R$ ... Radius des Blutgefäßes in m

– Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion $v$ in der nachstehenden Abbildung. *[1 Punkt]*




### Teil a) Anzahl der Blutzellen in 1 Kubikmillimeter

In 5 Liter Blut befinden sich an Blutkörperchen

$N_{5Liter} := 25 \cdot 10^{12} + 15 \cdot 10^{11} + 3 \cdot 10^{10}$

$N_{1Kubikmillimeter} := \frac{N_{5Liter}}{5} \cdot 10^{-6} = 5.306 \times 10^{6}$

$dm := 10^{-1} m \qquad 1mm^3 = 1 \times 10^{-6} \cdot dm^3$

### Teil b) Pumpleistung des Herzens

Die lineare Funktion lautet $P(t, k, d) := k \cdot t + d$

Über die gegebenen zwei "Punkte" dieser linearen Funktion kann ein Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden.

Vorgabe

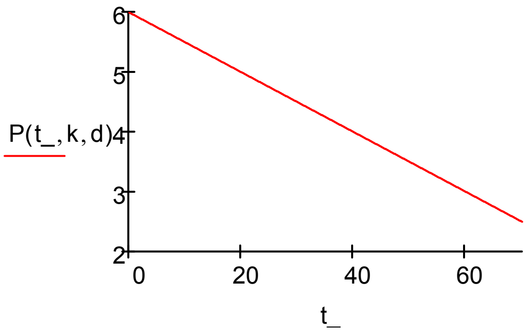
$P(20, k, d) = 5$

$P(70, k, d) = 2.5$

$\begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} := \text{Suchen}(k, d) \rightarrow \begin{pmatrix} -0.05 \\ 6.0 \end{pmatrix}$

grafische Darstellung

$t\_ := 0, 0.1 .. 70$




Die Steigung $k = -0.05 \frac{\frac{Liter}{min}}{Jahr}$ gibt an, dass pro Lebensjahr die Pumpleistung um 0,05 Liter/min abnimmt.

"Abnehmen" deswegen, weil k negativ ist!

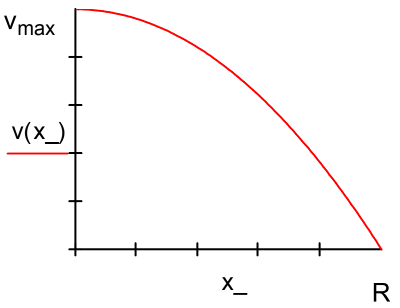
**Teil c) Strömungsgeschwindigkeit des Blutes**

$v_{max} := 1$ $R := 1$

Einsetzen spezieller Werte, um die Funktion in Mathcad zeichnen zu können.

$$v(x) := v_{max} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)$$

$x\_ := 0, 0.01 .. R$




Erklärung für den Funktionsverlauf :

* Für x=0 erhält man $v(0)=v_{max}$ - also muss der Schnittpunkt mit der Ordinate bei $v_{max}$ liegen!
* Für x=R erhält man v(R)=0 - also ist an der Stelle x=R die Nullstelle der Funktion
* Weil der Parameter bei $x^2$ negativ ist, handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt bei $(0|v_{max})$

# Teil A: Aufgabe 5 - Batterien

**Ein Unternehmen produziert Batterien.**

**a)** Ein Händler kauft Batterien bei diesem Unternehmen und erhält die Information, dass erfahrungsgemäß 2 % der gelieferten Batterien defekt sind.

Der Händler entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 40 Batterien.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 der entnommenen Batterien defekt sind. *[1 Punkt]*

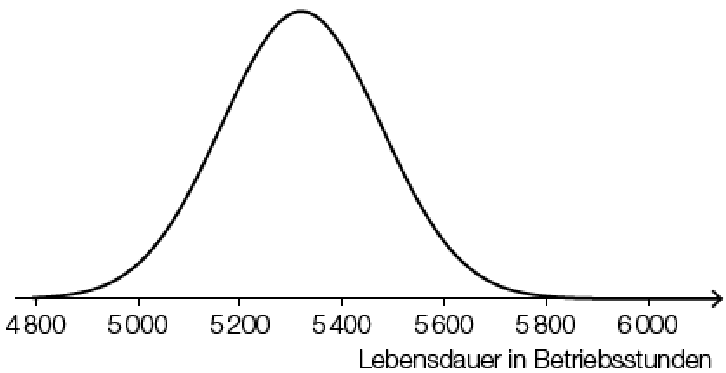
**b)** Für den Versand der Batterien an Einzelhändler werden diese jeweils in 4er-Packungen verpackt. Ein Einzelhändler erhält eine Lieferung von $a$ 4er-Packungen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie defekt ist, beträgt $p$.

– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $4 \cdot a \cdot p$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird. *[1 Punkt]*

**c)** Das Unternehmen gibt an, dass die Lebensdauer der Batterien annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5320$ Betriebsstunden und der Standardabweichung $\sigma = 156$ Betriebsstunden ist.

– Berechnen Sie dasjenige symmetrische Intervall um $\mu$, in dem die Lebensdauer einer zufällig ausgewählten Batterie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt. *[1 Punkt]*

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion dieser Normalverteilung dargestellt.




– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie eine Lebensdauer von maximal 5200 Betriebsstunden hat. *[1 Punkt]*

### Teil a) Wahrscheinlichkeit für defekte Batterien

Es liegt das Modell der Binomialverteilung vor (gleichbleibende Wahrscheinlichkeit p, Zufallsstichprobe des Umfangs n)

$n := 40 \qquad p := 0.02$

Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 der entnommenen Batterien defekt sind.

Variante über die Verteilungsfunktion (probability function)

$\text{pbinom}(2, n, p) = 0.954$

Variante über die Wahrscheinlichkeitsfunktion (Dichtefunktion = densitiy function)

$\text{dbinom}(0, n, p) + \text{dbinom}(1, n, p) + \text{dbinom}(2, n, p) = 0.954$

### Teil b) Erwartungswert

Gemäß Angabe werden insgesamt $4 \cdot a$ Batterien geliefert.
Wenn man mit der Binomialverteilung (siehe Punkt a) überlegt, heißt das, dass die Größe $n = 4 \cdot a$ ist.

Da der Erwartungswert für die Anzahl defekter Batterien gemäß dem Modell der Binomialverteilung gleich $\mu = n \cdot p$ ist, bedeutet der Ausdruck $\mu = 4 \cdot a \cdot p$ den Erwartungswert bzw. die zu erwartende Anzahl defekter Batterien in der Lieferung.
(Der Erwartungswert kann als "mittlere zu erwartende Anzahl defekter Batterien" gedeutet werden.)

### Teil c) Normalverteilte Lebensdauern

$\mu := 5320$ Stunden

$\sigma := 156$ Stunden

Das gesuchte symmetrische Intervall um μ wird auch als "Zufallsstreubereich" bezeichnet, die Breite hängt von der gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit α ab

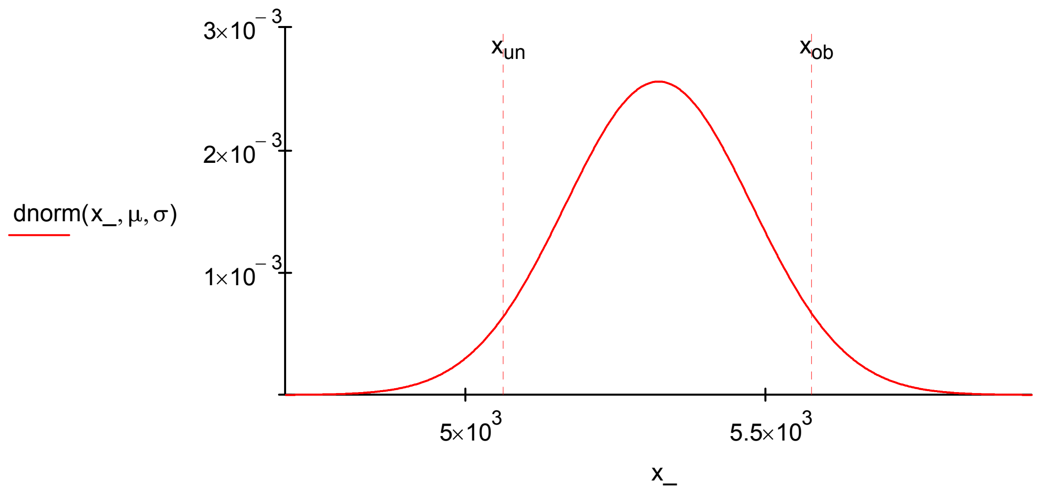
$\alpha := 10\%$

$x_{un} := \text{qnorm}\left(\frac{\alpha}{2}, \mu, \sigma\right) = 5063.4$ Stunden

$x_{ob} := \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \mu, \sigma\right) = 5576.6$ Stunden

Eine zufällig ausgewählte Batterie hat daher eine Lebensdauer, welche mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% im angegebenen Bereich $x_{un} \leq x \leq x_{ob}$ liegt!

$x\_ := \mu - 4 \cdot \sigma, \mu - 4 \cdot \sigma + \frac{\sigma}{100} .. \mu + 4 \cdot \sigma$



Hinweis : Ändert man den Wert für α, kann man Folgendes beobachten:

* Wird α größer (also größere Irrtumswahrscheinlichkeit als 10%), so wird das Ergebnis "genauer", d.h. der Zufallsstreubereich wird schmäler - wegen der größeren Irrtumswahrscheinlichkeit wird die Angabe des Bereiches aber immer "problematischer".

* Wird α kleiner (also kleinere Irrtumswahrscheinlichkeit als 10%), so wird das Ergebnis "ungenauer", weil der Zufallsstreubereich größer wird. Dafür stimmt die Bereichsangabe für die Lebensdauer mit größerer Wahrscheinlichkeit.

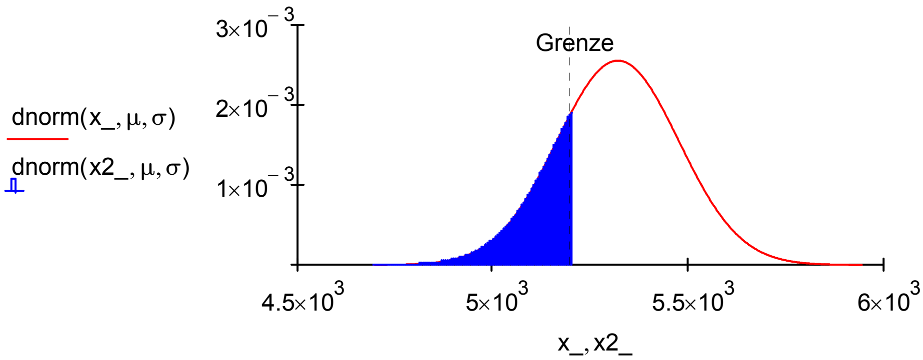
Nun soll noch die Wahrscheinlichkeit veranschaulicht werden, dass eine zufällig ausgewählte Batterie eine Lebensdauer von maximal 5200 Betriebsstunden hat.

Wahrscheinlichkeiten sind bei der Normalverteilung grundsätzlich als Flächenanteile zu interpretieren, da die Funktion der Normalverteilung so normiert ist, dass die Gesamtfläche gleich 1 bzw. 100% beträgt.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(x \le 5200)$ ist daher als Fläche unter der Funktion von $-\infty$ bis 5200 zu deuten:

$\text{Grenze} := 5200$

$$x\_ := \mu - 4\cdot\sigma, \mu - 4\cdot\sigma + \frac{\sigma}{100} .. \mu + 4\cdot\sigma$$

$$x2\_ := \mu - 4\cdot\sigma, \mu - 4\cdot\sigma + \frac{\sigma}{100} .. \text{Grenze}$$



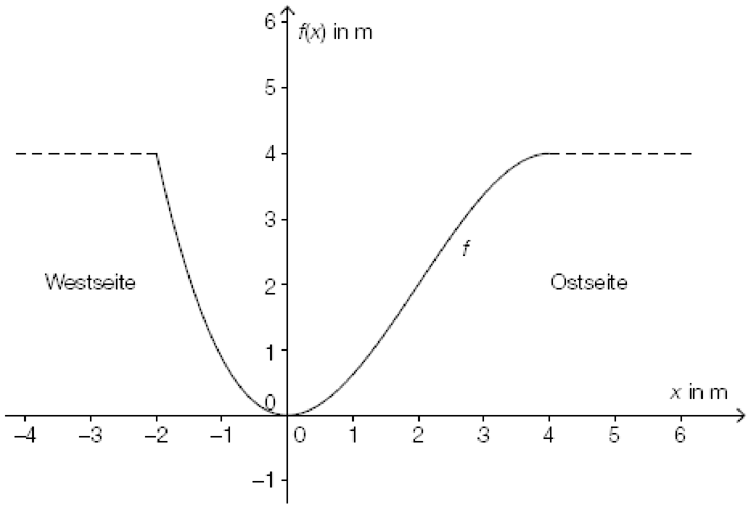
# Aufgabe 6 - Am Fluss

a) Das Querschnittsprofil eines künstlichen Flusslaufes kann annähernd durch den Graphen der Polynomfunktion $f$ beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \text{ mit } -2 \leq x \leq 4$$

$x$, $f(x)$ ... Koordinaten in Metern (m)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



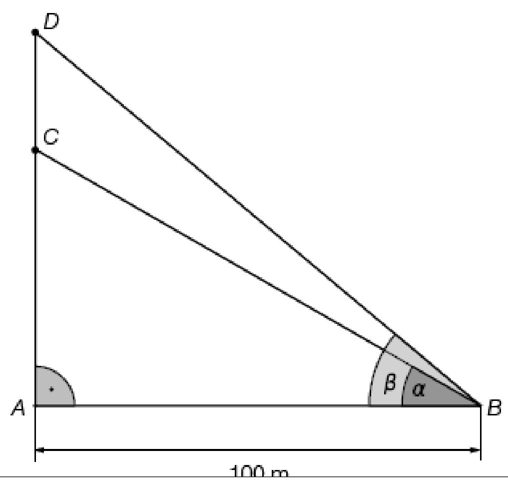

– Berechnen Sie diejenige Stelle, an der das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten ansteigt. *[1 Punkt]*

Gegeben ist das folgende Integral:

$$\int_{-2}^{4} (4 - f(x))\, dx$$

– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mithilfe dieses Integrals berechnet werden kann. *[1 Punkt]*

b) Ein von einem Punkt $A$ senkrecht aufsteigender Ballon wird von einem Punkt $B$ am Flussufer unter dem Höhenwinkel $\alpha = 30°$ gesehen. Etwas später erscheint der Ballon unter dem Höhenwinkel $\beta = 40°$ (siehe nachstehende Skizze).



– Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{CD}$. *[1 Punkt]*

**Teil a) Querschnittsprofil eines künstlichen Flusslaufes**

$$f(x) := -\frac{1}{8}\cdot x^3 + \frac{3}{4}\cdot x^2 \qquad -2 \le x \le 4$$

Die Stelle, an der das Querschnittsprofik am stärksten ansteigt, erhält man durch die Berechnung des Abszissenwertes des Wendepunktes. Im Wendepunkt ist die 2.Ableitung gleich 0, was gleichbedeutend damit ist, dass die Steigung der Tangente an dieser Stelle einen extremen Wert annimmt.

$$x_{wP} := \frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 2 \qquad x_{wP} = 2$$

$$f(2) = 2$$

Im Folgenden werden die Ableitungen als Funktionen gespeichert, um weiter unten die Situation graphisch veranschaulichen zu können

$$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \qquad f2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) \qquad f3(x) := \frac{d^3}{dx^3}f(x)$$

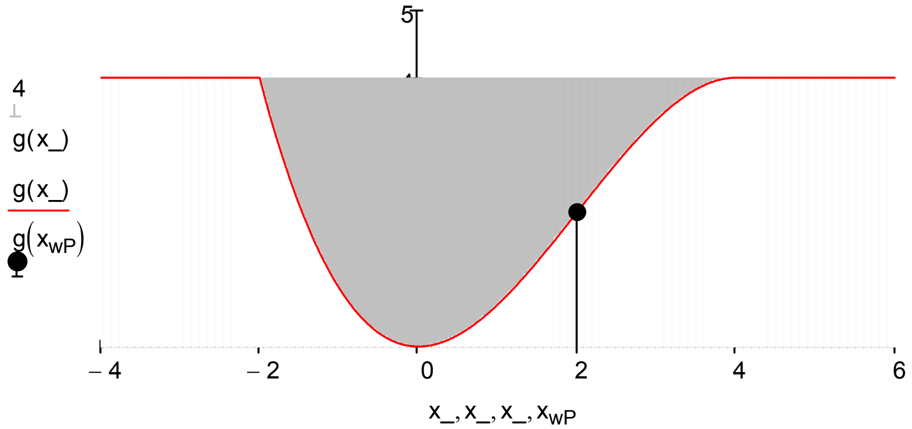
$$f2(x_{wP}) \rightarrow 0 \qquad f3(x_{wP}) \rightarrow -\frac{3}{4}$$

rechnerischer Nachweis für die Stelle mit maximaler Steigung

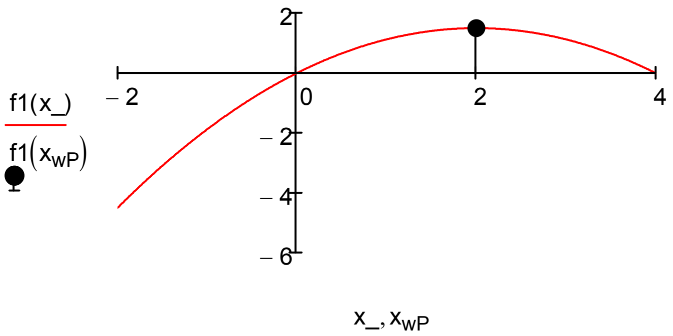
$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } -2 \le x \le 4 \\ 4 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Die zu zeichnende Funktion wird stückweise definiert und unten gezeichnet. Der Wendepunkt wurde eingezeichnet. Außerdem wurde schraffiert jene Fläche eingezeichnet, welche mit dem gegebenen Integral berechnet wird:

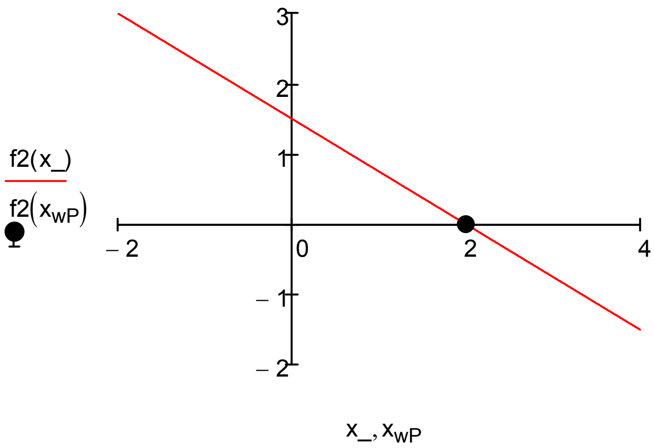
$$x\_ := -4, -3.99 .. 6 \qquad \int_0^4 4 - f(x)\,dx = 8$$



$x\_ := -2, -1.99 .. 4$




Die "Anstiegsfunktion" (1.Ableitung der Funktion f(x) ) zeigt, dass im eingezeichneten Wendepunkt die Steigung maximal ist.




Die 2.Ableitung ist an der Stelle des Wendepunktes gleich 0 (was ja für die Berechnung weiter oben verwendet wurde)

**Teil b) Aufsteigender Ballon**

$\alpha := 30°$ $\beta := 40°$ $AB := 100m$

$AC := \tan(\alpha) = \frac{AC}{AB}$ auflösen, AC $\rightarrow 100 \cdot m \cdot \tan(30 \cdot °) = 57.735\,m$

$AD := \tan(\beta) = \frac{AD}{AB}$ auflösen, AD $\rightarrow 100 \cdot m \cdot \tan(40 \cdot °) = 83.91\,m$

$CD := AD - AC = 26.175\,m$

# Aufgabe 7 - Förderbänder (für Cluster 2,3,4,5)

In der automatisierten Fertigung werden Werkstücke auf Förderbändern bewegt.

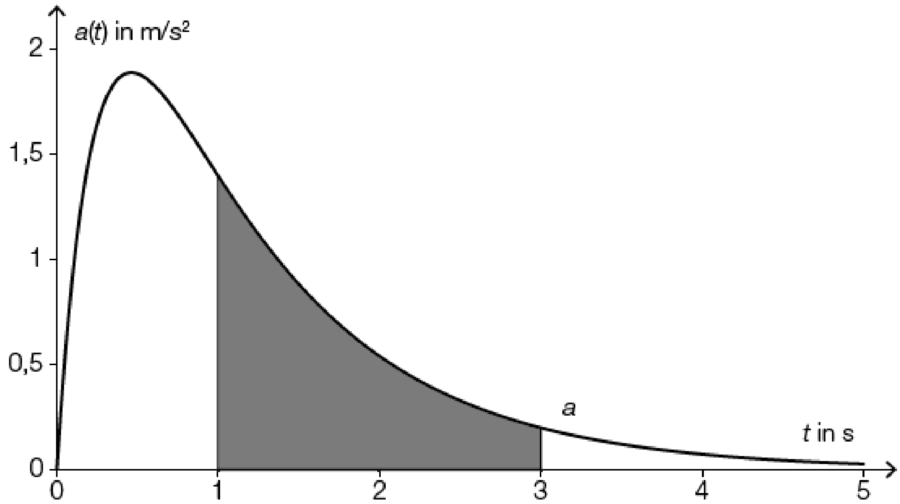
a) Die Bewegung eines Werkstücks wird für $t \geq 0$ näherungsweise durch die Funktion $s$ beschrieben:

$$s(t) = 0{,}4 \cdot e^{-4 \cdot t} - 0{,}1 \cdot e^{-t} + 0{,}5$$

$t$ ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... Entfernung zu einem Bezugspunkt zur Zeit $t$ in Metern (m)

– Beschreiben Sie die Bedeutung von $s'(0)$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*
– Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Werkstücks zu demjenigen Zeitpunkt, zu dem die Beschleunigung null ist. *[2 Punkte]*

b) Die Beschleunigung eines Werkstücks wird für $t \geq 0$ näherungsweise durch die Funktion $a$ beschrieben.
Der Graph der Funktion $a$ ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.




– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts $A$ der markierten Fläche.

$A =$ ______________________________ *[1 Punkt]*

– Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) Die Geschwindigkeit eines Werkstücks wird für $t \geq 0$ näherungsweise durch die Funktion $v$ beschrieben:

$v(t) = 1{,}3 \cdot \sin(20 \cdot t)$

$t$ ... Zeit in Sekunden
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit $t$ in m/s

Für die 1. Ableitung von $v$ gilt:
$v'(t) = 26 \cdot \cos(20 \cdot t)$

– Beschreiben Sie anhand der Ableitungsregeln, wodurch der Faktor 26 der Ableitungsfunktion $v'$ zustande kommt. *[1 Punkt]*

**Teil a) Bewegung eines Werkstückes**

$$s(t) := 0.4 \cdot e^{-4 \cdot t} - 0.1 \cdot e^{-t} + 0.5$$

Die erste Ableitung des Weges nach der Zeit ist die Geschwindigkeit, also $v = \frac{ds}{dt}$

s'(0) .... das ist die erste Ableitung an der Stelle t=0 und bedeutet daher die Geschwindigkeit des Werkstückes zum Zeitpzunkt t=0 (Anfangsgeschwindigkeit)

Die Beschleunigung a(t) wiederum ist die 1.Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit oder die 2.Ableitung des Weges nach der Zeit, daher wird die Geschwindigkeit des Werkstücks zu demjenigen Zeitpunkt, zu dem die Beschleunigung Null ist, wie folgt bestimmt:

$v(t) := \frac{d}{dt} s(t)$ $\qquad v(0) = -1.5$ Meter/Sekunde

$$a(t) := \frac{d^2}{dt^2} s(t)$$

$t_a := a(t) = 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 5 \end{array} \right. \rightarrow 1.3863$ Sekunden

$v(t_a) = 0.01875$ Meter/Sekunde

**Teil b) Beschleunigung a(t) eines Werkstückes**

$$A = \int_1^3 a(t)\, dt$$

Grundsätzlich ist das Integral der Beschleunigung diue Geschwindigkeit. Wie man der gegebenen Grafik entnimmt, gibt es aber vor der 1.Sekunde eine "Vorgeschichte", nämlich die Beschleunigungsfunktion für $0 \leq t \leq 1$ Sekunden. Das bedeutet, dass das Werkstück zum Zeitpunkt t=1Sekunde bereits eine Geschwindigkeit ungleich 0 hat - welche der Fläche unter der Funktion a(t) im Bereich $0 < t < 1$ Sekunden entspricht.

Daher gilt:

Der schraffierte Flächeninhalt entspricht der **Geschwindgkeitszunahme** im Intervall $1 \le t \le 3$ Sekunden.

**Teil c) Ableitungsfunktion**

$$v(t) := 1.3 \cdot \sin(20 \cdot t)$$

$$\frac{d}{dt} v(t) \rightarrow 26.0 \cdot \cos(20 \cdot t)$$

Genau genommen kommen hier 2 Differentiationsregeln zur Anwendung

**1) Eine multplikative Konstante "bleibt stehen" (sogenannte Faktorregel)**

$$\frac{d}{dt}(\text{konstante1} \cdot F(t)) \rightarrow \text{konstante1} \cdot \frac{d}{dt} F(t)$$

Also bleibt der Faktor 1,3 "stehen".

**2 ) Kettenregel: Ableitung einer zusammengesetzten Funktion = "Äußere Ableitung" * "Innere Ableitung"**

$$\frac{d}{dt} \sin(\text{konstante2} \cdot t) \rightarrow \text{konstante2} \cdot \cos(\text{konstante2} \cdot t)$$

Daher ergibt sich (mit allgemeinen Konstanten):

$$\frac{d}{dt}(\text{konstante1} \cdot \sin(\text{konstante2} \cdot t)) \rightarrow \text{konstante1} \cdot \text{konstante2} \cdot \cos(\text{konstante2} \cdot t)$$

Da konstante1=1.3 und konstante2=20 erhält man:

$$\frac{d}{dt}(1.3 \cdot \sin(20 \cdot t)) = 1.3 \cdot 20 \cdot \sin(20 \cdot t) = 26 \cdot \cos(20t)$$

# Aufgabe 8 - Atemvolumen (für Cluster 2,3,4,5)

a) Das Atemvolumen in der Lunge einer Person in Abhängigkeit von der Zeit kann näherungsweise durch eine Funktion $V$ beschrieben werden:

$V(t) = 3 + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ mit $A > 0$, $\omega > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$

$t$ ... Zeit in Sekunden (s)
$V(t)$ ... Atemvolumen zur Zeit $t$ in Litern (L)

Zu Beginn des Einatemvorganges ist das Atemvolumen minimal und beträgt 2,75 L. Nach 2 s wird das maximale Volumen erreicht.

– Bestimmen Sie $A$, $\omega$ und $\varphi$. *[3 Punkte]*

b) Das Atemvolumen einer anderen Person in Abhängigkeit von der Zeit kann näherungsweise durch eine Funktion $V$, deren Ableitung bekannt ist, beschrieben werden:

$V'(t) = 0{,}4 \cdot \sin(1{,}6 \cdot t)$

$t$ ... Zeit in Sekunden (s)
$V'(t)$ ... momentane Änderungsrate des Atemvolumens zur Zeit $t$ in Litern pro Sekunde (L/s)

Zur Zeit $t = 0$ beträgt das Atemvolumen 2,4 L.

– Ermitteln Sie die Funktion $V$. *[2 Punkte]*

c) In der nachstehenden Tabelle ist die jeweilige momentane Änderungsrate des Atemvolumens $V'(t)$ in Litern pro Sekunde zu bestimmten Zeitpunkten $t$ einer Atmungsphase einer Person angegeben.

| $t$ in s | 0,0 | 0,5 | 1,5 | 2,5 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(t)$ in L/s | 0,00 | 0,33 | 0,49 | 0,29 | 0,00 |

– Stellen Sie die Messpunkte in einem Koordinatensystem dar. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie für diese Atmungsphase eine quadratische Ausgleichsfunktion. *[1 Punkt]*
– Begründen Sie, warum es sich bei diesem Vorgang um eine Einatmungsphase handelt. *[1 Punkt]*

**Teil a) Funktion für das Atemvolumen in Abhängigkeit von der Zeit**

Es sind die 3 unbekannten Parameter A, ω und φ der Funktion V(t) zu bestimmen. Dazu können unterschiedliche Vorgangsweisen gewählt werden (wie hier demonstriert wird).

**Variante 1: Aufstellen eines Gleichungssystems von 3 Gleichungen mit den 3 Unbekannten**

Diese Methode kommt nur bei Verwendung eines Computeralgebrasystems in Frage!

$V(t,A,\omega,\varphi) := 3 + A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$ Ansatz in Abhängigkeit von den Unbekannten A,ω und φ

$V1(t,A,\omega,\varphi) := \frac{d}{dt}V(t,A,\omega,\varphi)$ Ableitungsfunktion

$\omega := 1 \quad A := 1 \quad \varphi := -1$ Vorgabewerte für die nummerische Lösungssuche des Gleichungssystems

Vorgabe

$V(0,A,\omega,\varphi) = 2.75$ Beginn des Einatmungsvorganges

$V1(0,A,\omega,\varphi) = 0$ Am Beginn ist das Atemvolumen minimal (1.Ableitung = 0)

$V1(2,A,\omega,\varphi) = 0$ Nach 2 Sekunden ist das Atemvolumen maximal (1.Ableitung = 0)

$$\begin{pmatrix} A \\ \omega \\ \varphi \end{pmatrix} := \text{Suchen}(A,\omega,\varphi) = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1.571 \\ -1.571 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems mit nummerischen Methoden (Verwendung von Vorgabewerten) -

Hinweis: Bei Verwendung des Symbolprozessors liefert Mathcad 15 allerdings falsche Werte für ω und φ (ohne "Warnung")!

**Variante 2: Direkte Ermittlung der Parameterwerte für A, ω und φ aus der Angabe**

Das ist quasi die "klassische Methode" ohne Verwendung eines Computeralgebrasystems

Bestimmung der Amplitude A

$A := 3 - 2.75 = 0.25$ Die Amplitude ergibt sich aus der Differenz des mittleren und des kleinsten Wertes

$T := 2\cdot 2 = 4$ Die Periodenlänge T muss doppelt so groß sein wie die Zeit, welche vom minimalen zum maximalen Atemvolumen gemäß Angabe vergeht ( das sind laut Angabe 2 Sekunden)

$\omega := \frac{2\pi}{T} \to \frac{\pi}{2} = 1.571$ Die Berechnung der Kreisfrequenz erfolgt mit der Formel $\omega = 2\pi\cdot f = 2\pi\cdot\frac{1}{T}$

$\varphi := -\frac{\pi}{2} = -90\cdot °$ Da zum Zeitpunkt t=0 das Atemvolumen minimal ist, muß der Phasenwinkel φ gleich -90° bzw. -π/2 sein.

$t0 := 1 \qquad \varphi := \varphi$

$t0 = \frac{-\varphi}{\omega}$ auflösen, $\varphi \to -1.5707963267948966 = -90\cdot °$

φ kann aber auch mit Verwendung der Nullstelle t0 (welche hier gleich 1 sein muss) ermittelt werden

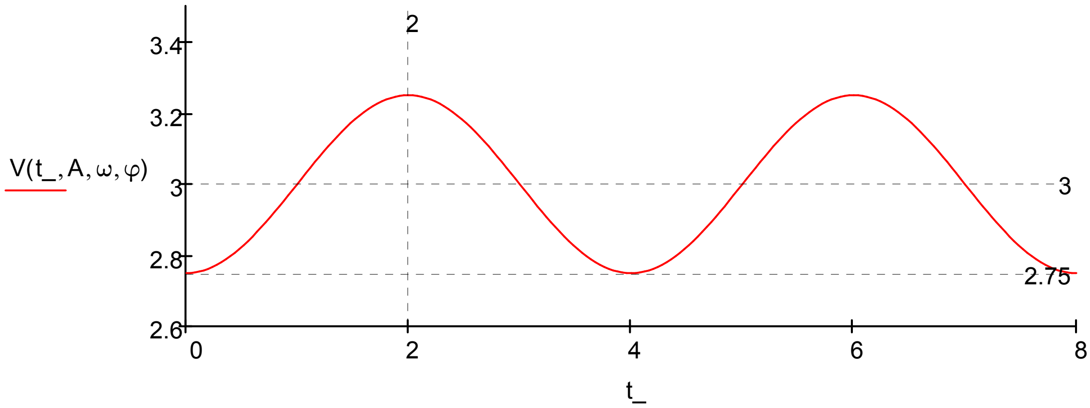
Setzt man die weiter oben berechneten Werte für A und ω in die Funktionsgleichung ein, berücksichtigt man die "Anfangsbedingung" V(0)=275 und löst die Funkltionsgleichung nach φ auf, so liefert Mathcad 15 nicht -90°, sondern φ=270° als Lösung. Diese ist natürlich ebenfalls richtig.

$V(0) = 2.75$

$2.75 = 3 + A\cdot\sin(\omega\cdot 0+\varphi)$ auflösen, $\varphi \to 4.7123889803846898577 = 270\cdot °$

Die zeichnerische Darstellung liefert eine Kontrolle der Lösung:

$t\_ := 0, \frac{T}{100} .. 2T$




**Teil b) Bestimmung der Funktion für das Atemvolumen aus der momentanen Änderungsrate des Atemvolumens**

$V1(t) := 0.4 \cdot \sin(1.6 \cdot t)$

$V(t) := \int V1(t)\,dt \rightarrow -0.25 \cdot \cos(1.6 \cdot t)$

Die Funktion V(t) erhält man aus der Ableitungsfunktion durch Integration. Mathcad läßt allerdings beim unbestimmten Integral die Integrationskonstante unberücksichtigt - daher muß diese (wie hier demonstriert) noch extra berücksichtigt werden und mit Hilfe der Anfangsbedingung berechnet werden.

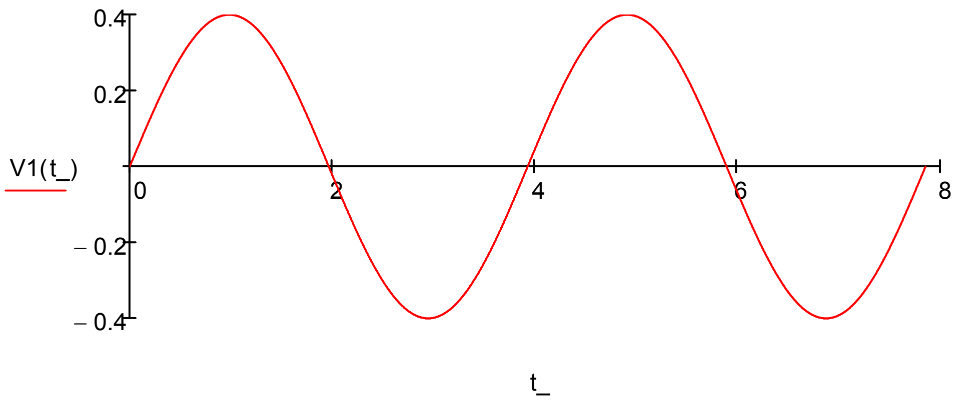
$2.4 = -0.25 \cdot \cos(1.6 \cdot 0) + C$ auflösen, $C \rightarrow 2.65$

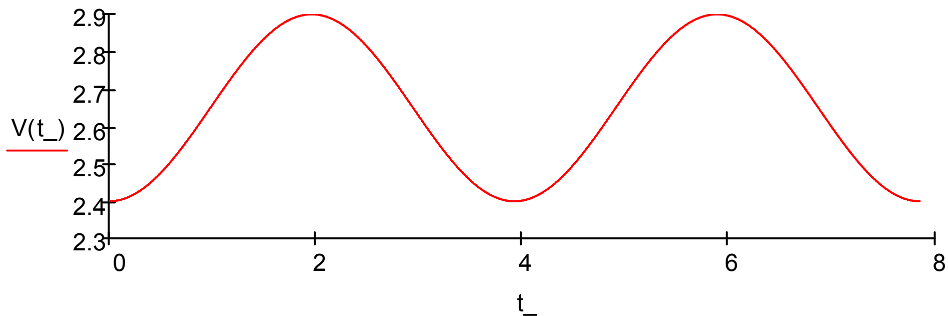
$V(t) := -0.25 \cdot \cos(1.6 \cdot t) + 2.65$

T

Nun werden noch die gegebene Ableitungsfunktion und die Integralfunktion graphisch dargestellt, was in beiden Richtungen eine entsprechende anschauliche Interpretation erlaubt!

$T := \frac{2\pi}{1.6}$ $\qquad t\_ := 0, \frac{T}{1000} .. 2T$



## Teil c) Ausgleichsfunktion

$$werte := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.33 \\ 1.5 & 0.49 \\ 2.5 & 0.29 \\ 3.0 & 0 \end{pmatrix} \qquad t\_s := werte^{\langle 0 \rangle} \qquad V1 := werte^{\langle 1 \rangle}$$

Die gegebenen Punkte werden in zwei Vektoren übertragen (Abszissen- und Ordinatenwerte)

Die quadratische Ausgleichsfunktion kann in Mathcad auf sehr unterschiedliche Weise ermittelt werden. Hier werden 2 Vorgangsweisen demonstriert, welche auch das gleiche Ergebnis liefern.

**Variante 1: Direkte Anwendung des Prinzips der kleinsten Quadrate (C.F.Gauß) mit Hilfe der Funktion "minfehl"**

Diese Methode ist zwar vergleichsweise aufwändig, allerdings hat sie den (didaktischen) Vorteil, dass man sehr schön das Prinzip der kleinsten Quadrate ohne rechnerischen Aufwand nachvollziehen kann!

$$p(x, a, b, c) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Ansatz für die quadratische Ausgleichsfunktion

$$sumq(a, b, c) := \sum_{i=0}^{4} \left(p\left(t\_s_i, a, b, c\right) - V1_i\right)^2$$

Das ist die Summe der quadrierten Abstände zwischen den Funktionswerten der Ausgleichsfunktion und den Ordinatenwerten der gegebenen Punkte (Summe der "Abstandsquadrate")

$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 1$

Vorgabe

$$sumq(a, b, c) = 0$$

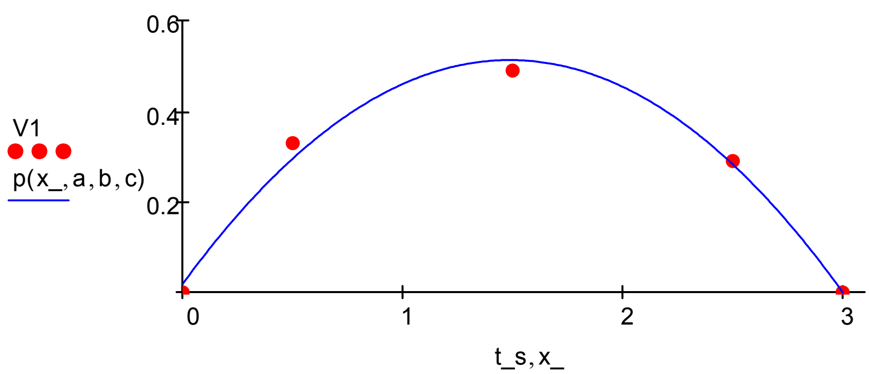
Nun werden auf nummerischen Weg unter Verwendung von Vorgabewerten und der Funktion "minfehl" jene Werte für die Koeffizienten a,b und c gesucht, für welche die Summe der Abstandsquadrate möglichs nahe bei 0 - also MINIMAL - ist!

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := Minfehl(a, b, c) = \begin{pmatrix} -0.224 \\ 0.666 \\ 0.018 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = -0.224 \cdot x^2 + 0.666 \cdot x + 0.018$$

So lautet daher die quadratische Ausgleichsfunktion , welche nun zusammen mit den Messpunkten zeichnerisch dargestellt wird.

$x\_ := 0, 0.01 .. 3$



**Variante 2: Verwendung spezieller Mathcad-Funktionen für die Regression mittels Polynomfunktionen ("regress" und "interp")**

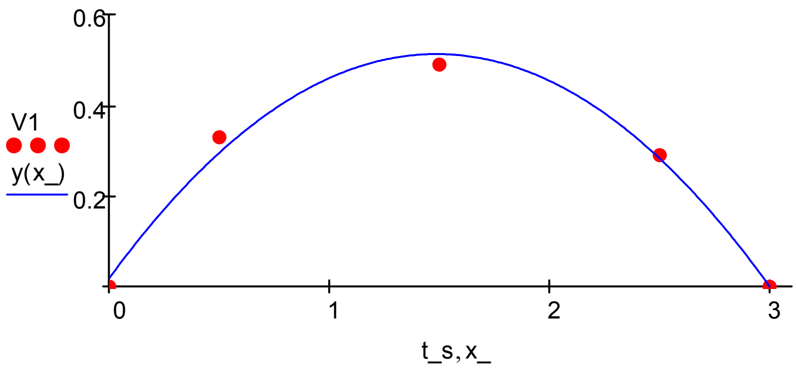
Diese Methode ist wesentlich kürzer als oben - dafür aber auch nicht so "anschaulich".

vs := regress(t_s, V1, 2)

Anpassung einer Polynomfunktion (hier: 2.Ordnung) an die gegebenen Abszissen- und Ordinatenwerte ("Regression") - Die Funktion "regress" liefert einen Vektor vs, welcher ab dem 3.Index die Koeffizienten des gesuchten Polynoms enhält und in der Funktion "interp" zur Interpolation verwendet wird.

y(x) := interp(vs, t_s, V1, x)

Möchte man die Gleichung der Ausgleichsfunktion anschreiben, muss man hier also die Koeffizienten aus dem Vektor vs ablesen - man sieht im Vergleich zu oben, dass man die gleichen Werte erhält.




$$vs = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0.018 \\ 0.666 \\ -0.224 \end{pmatrix}$$

zeichnerische Darstellung

Begründung, weshalb hier ein EINATMUNGSVORGANG vorliegt:

- Die Änderungsrate des Atemvolumens in Abhängigkeit von der Zeit (= 1.Ableitung der Volumensfunktion V(t) ) bzw. die Steigung der Funktion V(t)) ist immer positiv - das bedeutet, dass während des gesamten Vorganges $0 \le t \le 3$ das Volumen ZUNIMMT. Das aber wiederum ist gleichbedeutend damit, dass ein Einatmungsvorgang vorliegt.

# Aufgabe 9 - Kondensatoren (für Cluster 2)

a) Für den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung bei einem Entladevorgang gilt:

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$t$ ... Zeit ab Beginn des Entladevorgangs
$u_C(t)$ ... Kondensatorspannung zum Zeitpunkt $t$
$U_0$, $\tau$ ... positive Parameter

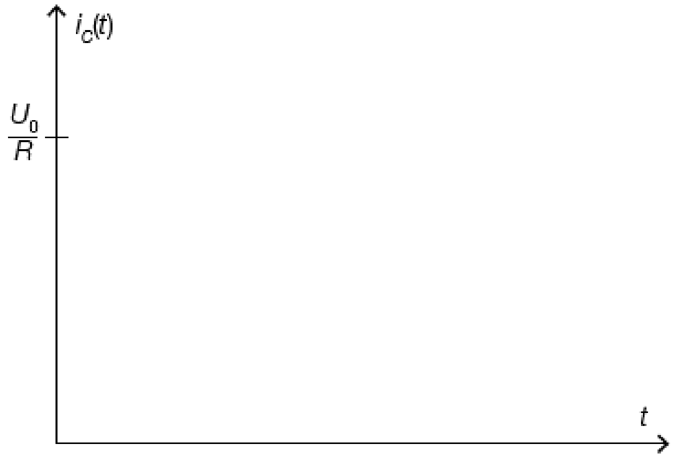
– Stellen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen dieser Funktion zum Zeitpunkt $t = \tau$ auf. *[2 Punkte]*
– Zeigen Sie, dass diese Tangente die $t$-Achse zum Zeitpunkt $t = 2 \cdot \tau$ schneidet. *[1 Punkt]*

**b)** Bei der Entladung eines Kondensators über einen Widerstand $R$ gilt für den Entladestrom

$$i_C(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

$t$ ... Zeit ab Beginn des Entladevorgangs
$i_C(t)$ ... Stromstärke zum Zeitpunkt $t$
$U_0$, $R$, $C$ ... positive Parameter

– Skizzieren Sie den Funktionsverlauf von $i_C$ im nachstehenden Diagramm. *[1 Punkt]*



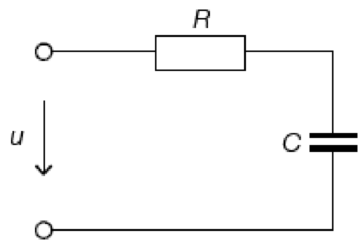

Die in einem Zeitintervall [0; $t_0$] abfließende Ladung wird mit

$$q(t_0) = \int_0^{t_0} i_C(t)\,\mathrm{d}t$$

ermittelt.

– Veranschaulichen Sie $q(t_0)$ in der von Ihnen erstellten Skizze. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie $q(\tau)$ mit $\tau = R \cdot C$. *[1 Punkt]*

c) Gegeben ist die folgende *RC*-Schaltung:




– Zeigen Sie, dass für das Verhältnis $\underline{G}(\omega) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_{gesamt}}$ der komplexen Widerstände $\underline{Z}_C$ und $\underline{Z}_{gesamt}$ gilt:

$$\underline{G}(\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$ *[1 Punkt]*

Man betrachtet $\varphi(\omega) = \arg(\underline{G}(\omega))$ mit $-\pi < \varphi(\omega) \leq \pi$.

– Argumentieren Sie mathematisch, weshalb $\varphi(\omega)$ für alle $\omega > 0$ negativ ist. *[1 Punkt]*

d) An ein *RC*-Glied mit Zeitkonstante $\tau > 0$ wird eine Gleichspannung $U_0$ angelegt. Zum Zeitpunkt des Einschaltens ($t = 0$) beträgt die Kondensatorspannung 2 Volt.
Bei diesem Einschaltvorgang wird die Kondensatorspannung $u_C$ durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{U_0}{\tau}$$

– Zeigen Sie rechnerisch mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass

$u_C(t) = U_0 - K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ ($K$ ... Integrationskonstante)

die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung ist. *[1 Punkt]*

– Berechnen Sie die spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung mit der oben angegebenen Anfangsbedingung. *[1 Punkt]*

– Begründen Sie mathematisch, warum die Funktion $u_C$ für $0 < U_0 < 2$ streng monoton fallend ist. *[1 Punkt]*

**Teil a) Entladevorgang - Tangentengleichung**

$U_0 := 1 \qquad \tau := 1$ — Festlegung von (beliebigen) Werten für die spätere graphische Darstellung.

$U_0 := U_0 \qquad \tau := \tau \qquad d := d$ — Für (rein) symbolische Berechnungen werden die Festlegungen "aufgehoben"

$u_c(t) := U_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$ — Festlegung der gegebenen Exponentialfunktion

$u1_c(t) := \frac{d}{dt} u_c(t) \qquad k := u1_c(\tau) \rightarrow -\frac{U_0 \cdot e^{-1}}{\tau}$ — Bestimmung der Steigung (k) der Tangente im Punkt t = τ mit Hilfe der 1.Ableitung.

$g(t) = k \cdot t + d \qquad g(\tau) = u_c(\tau)$

Aufstellen der Tangentengleichung in allgemeiner Form

$d := u_c(\tau) = k \cdot \tau + d$ auflösen, $d \rightarrow 2 \cdot U_0 \cdot e^{-1}$

Bestimmung des Parameters d (Einsetzen des Punktes und von k)

$g(t) := k \cdot t + d \rightarrow 2 \cdot U_0 \cdot e^{-1} - \frac{U_0 \cdot t \cdot e^{-1}}{\tau}$

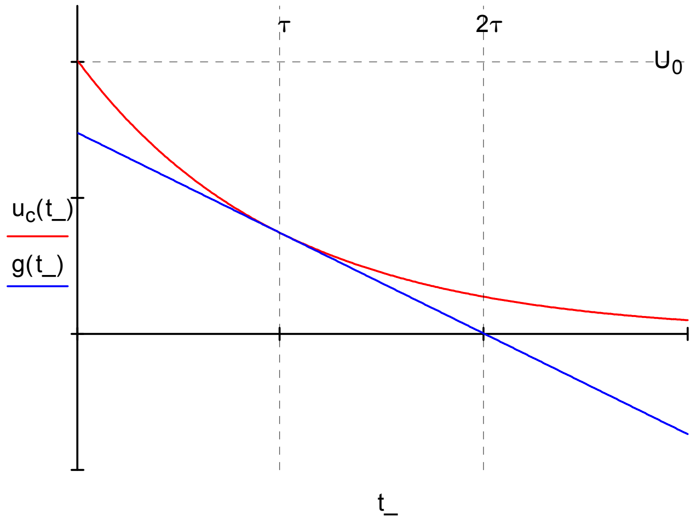
Das ist die gesuchte Tangentengleichung

$g(t) = 0$ auflösen, $t \rightarrow 2 \cdot \tau$

$g(2\tau) \rightarrow 0$

Bestimmung der (geforderten) Nullstelle der Tangentengleichung. Wie man hier (in 2 Varianten) sieht, schneidet die Tangente im Punkt $t = \tau$ die t-Achse bei $t = 2\tau$.

$t\_ := 0, \frac{\tau}{100} .. 3\tau$




graphische Veranschaulichung

**Teil b) Kondensatorentladung**

$U_0 := 1 \qquad R := 1 \qquad C := 1 \qquad C := C \qquad t_0 := 1$

Festlegung von (beliebigen) Werten für die spätere graphische Darstellung.

$U_0 := U_0 \qquad R := R \qquad \tau := R \cdot C \qquad t_0 := t_0$

Für (rein) symbolische Berechnungen werden die Festlegungen "aufgehoben"

$i_c(t) := \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$

Ermittlung der abfließenden Ladung zum Zeitpunkt τ.

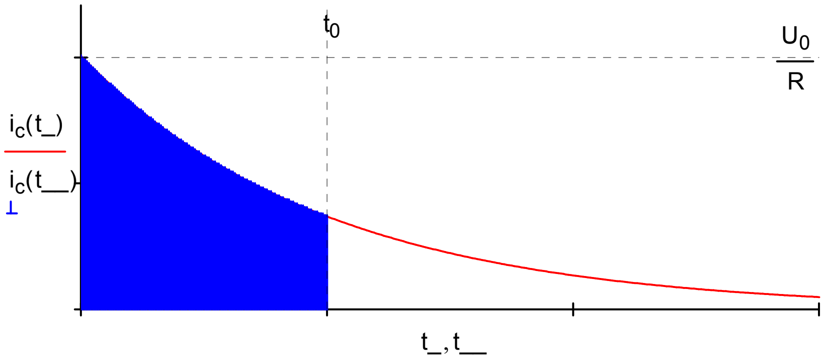
Die Ermittlung von $q(t_0)$ durch Integration folgt aus der Beziehung $i(t) = \frac{dq}{dt}$

$q(t_0) := \int_0^{t_0} i_c(t)\, dt \rightarrow -C \cdot U_0 \cdot \left(e^{-\frac{t_0}{C \cdot R}} - 1\right)$

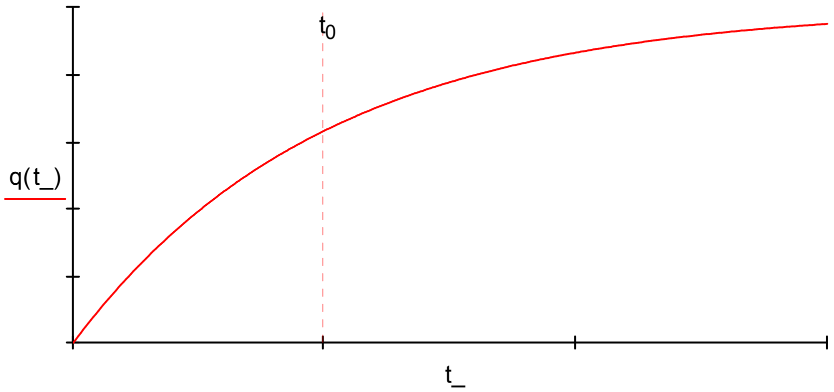
$q(\tau) \rightarrow -C \cdot U_0 \cdot \left(e^{-1} - 1\right)$

$t\_ := 0, \frac{\tau}{100} .. 3\tau \qquad t\_\_ := 0, \frac{\tau}{1000} .. t_0 \qquad t_0 \rightarrow t_0$

Graphische Veranschaulichung des Funktionsverlaufes und Einzeichnen von $q(t_0)$ - das ist im Diagramm für den Strom $i_c(t)$ die blau schraffierte Fläche bzw. in der 2.Grafik der Funktionswert $q(t_0)$




$t0 := 0, \frac{\tau}{100} .. 3\tau$




**Teil c) RC-Schaltung**

$R := R \quad C := C \quad \omega := \omega$

Für (rein) symbolische Berechnungen werden die bisherigen Festlegungen "aufgehoben"

$$G_{komplex}(\omega) := \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$

Definition der komplexen Übertragungsfunktion gemäß Angabe.
Es soll gezeigt werden, dass diese gleich dem angegebenem Term ist.

$$G_{komplex}(\omega) \rightarrow -\frac{i}{C \cdot \omega \cdot \left(R - \frac{i}{C \cdot \omega}\right)}$$

Wir versuchen es zunächst mit einer symbolischen Auswertung. Das Ergebnis entspricht allerdings nicht dem angegebenem Term

$$G_{komplex}(\omega) \text{ vereinfachen } \rightarrow -\frac{i}{C \cdot R \cdot \omega - i}$$

Daher versuchen wir uns nun mit dem Zusatz "vereinfachen" bzw. "**simplify**" - aber auch nun entspricht das Ergebnis nicht dem angegebenem Term.

**FAZIT** (gilt prinzipiell für jedes Computeralgebrasystem!) : Unter "Vereinfachen" kann man völlig unterschiedliche Vorgangsweisen verstehen - um die geforderte Vereinfachung durchführen zu können, muss man daher diese "händisch" durchführen.

$$G_{komplex}(\omega) = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{\frac{j \cdot \omega \cdot R \cdot C + 1}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$

Nun soll noch argumentiert werden, warum der Phasenwinkel $\varphi(\omega)$ für $\omega>0$ negativ ist - d.h. dass der Zeiger von $G_{komplex}(\omega)$ in der komplexen Zahlenebene im (-1).Quadranten (bzw. 4.Quadranten) liegt.
Dazu formen wir $G_{komplex}(\omega)$ mit dem Zusatz "**rechteckig**" in Komponentenform um:

$$G_{komplex}(\omega) \text{ rechteckig } \rightarrow \frac{1}{C^2 \cdot R^2 \cdot \omega^2 + 1} - \frac{C \cdot R \cdot \omega}{C^2 \cdot R^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot i$$

**Interpretation des Ergebnisses:**

Da sämtliche Größen (R,C und $\omega$) positiv sind, ist der Realteil positiv und der Ausdruck $\frac{C \cdot R \cdot \omega}{C^2 \cdot R^2 \cdot \omega^2 + 1}$ ebenfalls positiv. Wegen dem "-" ist daher der Imaginärteil mit Sicherheit negativ.
Daher muss $G_{komplex}(\omega)$ in der komplexen Zahlenebene im (-1).Quadranten liegen und $\varphi(\omega)$ ist negativ.

**Teil d) Lösung der Differentialgleichung für das RC-Glied**

$u_c := u_c \qquad \tau := \tau$

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{U_0}{\tau}$$

Trennen der Variablen:

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{U_0}{\tau} - \frac{u_c}{\tau}$$

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{\tau} \cdot (U_0 - u_c)$$

$$\frac{du_c}{U_0 - u_c} = \frac{1}{\tau} dt$$

$$\int \frac{1}{U_0 - u_c} \, du_c \rightarrow -\ln(u_c - U_0) \qquad \int \frac{1}{\tau} \, dt \rightarrow \frac{t}{\tau}$$

Berechnung der Integrale auf beiden Seiten

$$-\ln(u_c - U_0) = \frac{t}{\tau} + K1$$

Berücksichtigung einer Integrationskonstanten K1

$$\ln(u_c - U_0) = -\left(\frac{t}{\tau} + K1\right)$$

$$u_c - U_0 = e^{\frac{-t}{\tau}} \cdot e^{-K1}$$

Entlogarithmieren und explizit machen der gesuchten Größe

$$u_c(t) = U_0 + K \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Für eine spezielle Lösung muß noch die Integrationskonstante K nach Einsetzen der Anfangsbedingung berechnet werden:

$K := 2 = U_0 + K \cdot e^{0}$ auflösen, $K \rightarrow 2 - U_0$

Daher: $u_c(t) = U_0 + (2 - U_0) \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$

Nun soll noch begründet werde, dass die Funktion uc für $0 < U_0 < 2$ streng monoton fallen ist. Das soll hier mit Hilfe der 1.Ableitung der Funktion $u_c(t)$ gezeigt werden.

$$\frac{d}{dt}\left[U_0 + (2 - U_0) \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}\right] \rightarrow \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot (U_0 - 2)}{\tau}$$

Da einerseits gilt $e^{-\frac{t}{\tau}} > 0$ und andererseits $(U_0 - 2) < 0$ für $0 < U_0 < 2$ ist für den genannten Bereich von $U_0$ die erste Ableitung negativ für alle t.
Das bedeutet: Die Funktion ist streng monoton fallend!