Wilfried Rohm wilfried.rohm@schule.at

Rollkurven - Zykloide - Animation

Beschreibung

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Zykloide, Epizykloide, Hypozykloide, Rollkurven, Parameterdarstellung von Funktionen

- Kurzzusammenfassung

  Für die bekannten Rollkurven wird demonstriert, wie man eine anschauliche Form einer (komplizierteren) animierten Bewegung mit Hilfe von Mathcad erzeugen kann.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Die vorliegenden Animationen eignen sich zur Demonstration im Unterricht, können aber (vielleicht mit etwas Hilfe) auch eine nette Projektarbeit für Schüler sein.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 2./3./4.Jahrgang (insbes. Abteilungen für Maschineningenieurwesen)

- Mathcad-Version:

  erstellt mit Mathcad 11

- Literaturangaben:

  Timischl-Kaiser, Ingenieur-Mathematik 2

Beschreibung

Die grundsätzliche Idee

Bei den folgenden Animationen für Zykloide, Epizykloide und Hypozykloide ist grundsätzlich immer das gleiche Problem zu lösen:

Der Abrollvorgang des Punktes P (entlang der Geraden bei der Zykloide bzw. an einem festen Kreis im Fall der Epizykloide und Hypozykloide) wird in den Animationen durch den Parameter t beschrieben. Dieser wiederum ist abhängig vom bisherigen "Abrollwinkel", welcher unten "b" bezeichnet wird (weil er als Winkel im Bogenmaß gedeutet werden kann). Hier kommt die "Animationsvariable" FRAME ins Spiel, die hier so definiert wird, dass für FRAME=100 eine vollständige Abwicklung erfolgt ist. Man erhält die jeweilige Abrollkurve.

Als Zweites muss der abzurollende Kreis (für jedes t !) immer neu gezeichnet werden. Dies geschieht, indem (unabhängig vom Wert b bzw. der FRAME-Variablen) der bei der Parameterdarstellung des Kreises verwendete Paramater T immer eine volle Umdrehung (0-360^0 bzw. 0-2π) durchläuft. Allerdings muss der Mittelpunkt des Kreises immer neu berechnet werden. Der Mittelpunkt des Kreises ist aber natürlich abhängig von t (und damit von der Animationsvaraible FRAME).

Im Sprachgebrauch der Informatik handelt es sich um eine Verschachtelung zweier Schleifen. Die "äußere Schleife" wird durch den Parameter t, die "innere Schleife" (also der immer neu zu zeichnende Kreis) durch den Parameter T beschrieben. Würde man diese Animation in einer klassischen Programmsprache (Basic, Pascal, C++, C#, ...) umsetzen, müsste man auch wie eben skizziert vorgehen!

Um die Animation noch verständlicher zu machen, wird der jeweilige Radius zum abzurollenden Punkt P eingezeichnet. Dies geschieht hier so, dass eine Gerade $g_x(i)$ und $g_y(i)$ in Abhängigkeit von einem weiteren Parameter i gezeichnet wird. i nimmt nur die Werte 0 und 1 an, wobei i=0 den Kreismittelpunkt und i=1 den Punkt auf der Abrolllinie (Zykloide, Epizykloide, Hypozykloide) angibt.

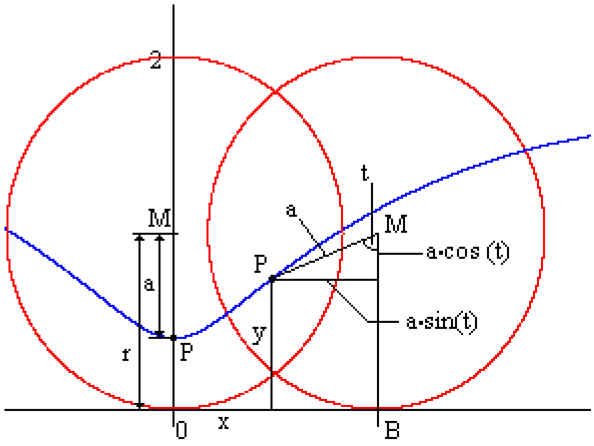
Zykloide (Rollkurve)

Die Parameterdarstellung der Zykloide lautet
(siehe auch nebenstehende Skizze)

$x(t) = r \cdot t - a \cdot \sin(t)$

$y(t) = r - a \cdot \cos(t)$

$|OB| = r \cdot t = r \cdot b$



Animation zur Beschreibung des Bewegungsablaufes

$r := 2 \quad a := 2$

$b := 0 + 0.01 \cdot 2 \cdot \pi \cdot FRAME$

b ist die sich ändernde Bogenlänge in Radiant, beginnend bei 0 und endend bei 2π (-> 360^0), wenn FRAME=100 ist. Daher liefert FRAME von 0 bis 100 eine volle Umdrehung

$b := 3$

Man kann die Vorgangsweise vielleicht besser verstehen, wenn man für b einen fixen Wert (hier beispielsweise 3) annimmt und dann die Zeichnung unten betrachtet.

$x1(T,b) := b \cdot r + r \cdot \cos(T) \qquad y(T) := r + r \cdot \sin(T)$

Der abzurollende Kreis (Mittelpunkt [b*r | r]

$X1(t) := r \cdot t - a \cdot \sin(t) \qquad Y(t) := r - a \cdot \cos(t)$

Die Zykloidenpunkte an der Stelle T

$g_x(i) := b \cdot r + i \cdot (X1(b) - b \cdot r) \qquad g_y(i) := r + i \cdot (Y(b) - r)$

Die Verbindungslinie vom Mittelpunkt des Kreises zum Zykloidenpunkt
es sollen 2 Punkte durch eine Gerade verbunden werden
Anfangspunkt: i= 0 (Kreismittelpunkt)
Endpunkt i=1 (Zykloidenpunkt)

$T := 0, 0.01 .. 2 \cdot \pi$ Parameter für die Kreisdarstellung (rote Zeichenfarbe)

$t := 0, 0.01 .. b$ Parameter für die Zykloide, wobei b (wie oben erklärt) bei 0 beginnt und in Abhängigkeit von der FRAME-Variable bei 2π endet. (blaue Zeichenfarbe)

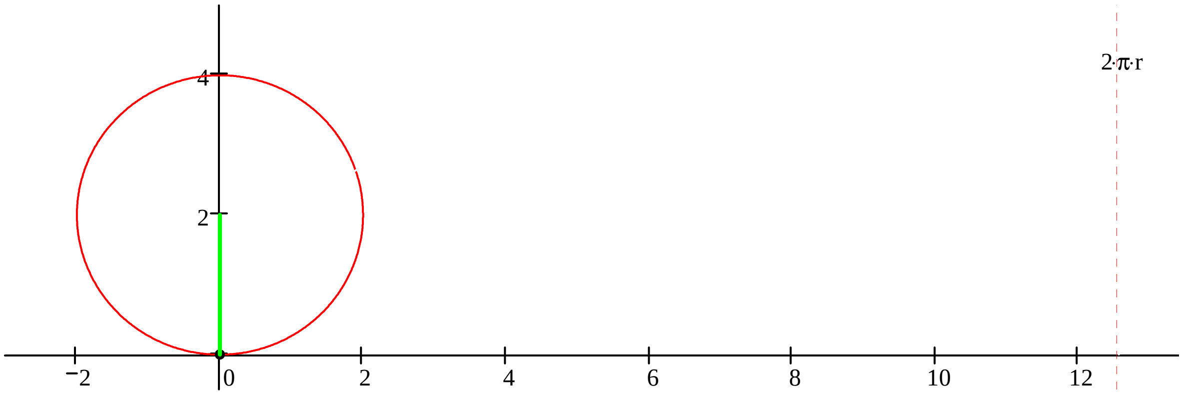
$i := 0 .. 1$

Parameter für die grün eingefärbte "Radiuslinie" - d.h. die Verbindungslinie Kreismittelpunkt (i=0) und Zykloidenpunkt (i=1)

$g_x(i) = \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline\end{array} \qquad g_y(i) = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 0 \\ \hline\end{array}$

Nun kann eine Animation mit FRAME von 0 bis 100 erstellt werden.

$b = 0$



Bogenlängenberechnung

Berechnung der Länge des Bogens für die gewöhnliche Zykloide

$r := r$

Die symbolische Berechnung des Integrals für die Berechnung der Zykloidenlänge kann in Mathcad (in Abhängigkeit von der jeweiligen Version) einige Schwierigkeiten machen, welche erst dann behoben werden, wenn r positiv definiert wird.

$a := a \qquad a := r \qquad L := 2\pi$

$x(t) := r \cdot t - a \cdot \sin(t)$

$y(t) := r - a \cdot \cos(t)$

$$s := \left[\int_0^L \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2}\, dt\right] \qquad s \rightarrow 4 \cdot \left(r^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$$

s vereinfachen $\rightarrow 8 \cdot \mathrm{csgn}(r) \cdot r$

Hinweis : Die Funktion csgn ist die komplexe Variante der (reellen) Vorzeichenfunktion signum(x).

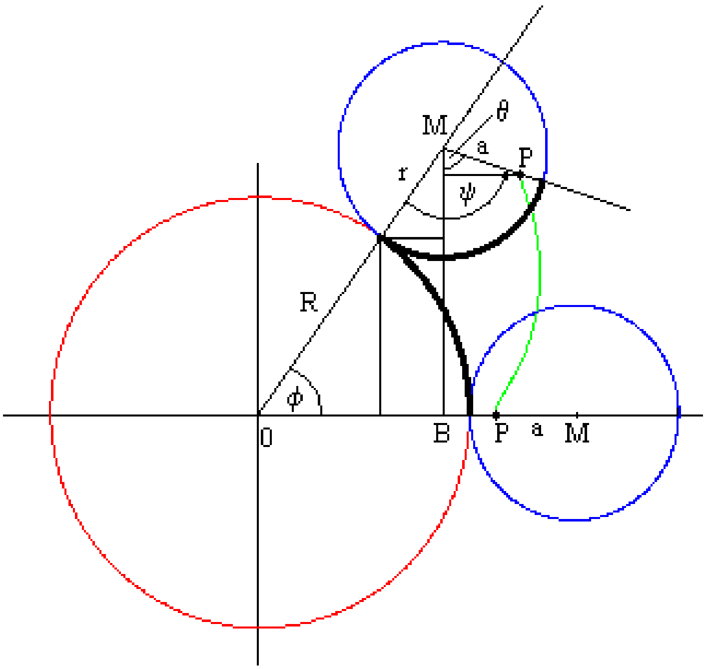
$$s \left| \begin{array}{l} \text{vereinfachen} \\ \text{annehmen}, r > 0 \end{array} \right. \rightarrow 8 \cdot r \qquad s = 16$$

Zum Vergleich: Der symbolische Taschenrechner TI-Voyage liefert : $s = 8 \cdot |r|$

Bogenlängenberechnung

Epizykloiden :

Die Parameterdarstellung lautet mit
dem Winkelparameter t $= \phi$:
(Herleitung siehe Literatur bzw. Skizze)



$$x(t) = (R + r) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos\left(\frac{r + R}{r} \cdot t\right)$$

$$y(t) = (R + r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\frac{r + R}{r} \cdot t\right)$$

Hinweis: Wenn man t als den Wälzwinkel ψ interpretiert, erhält man den folgenden Formelsatz, der im Weiteren aber hier nicht verwendet wird:

$$x(t) = (R + r) \cdot \cos\left(\frac{r \cdot t}{R}\right) - a \cdot \cos\left(\frac{r + R}{R} \cdot t\right)$$

$$y(t) = (R + r) \cdot \sin\left(\frac{r \cdot t}{R}\right) - a \cdot \sin\left(\frac{r + R}{R} \cdot t\right)$$

Erstellung des Animationsmoduls:

$R := 3$ $\quad r := 1$ $\quad a := 1$

$b := 0 + 0.01 \cdot 2 \cdot \pi \cdot FRAME$

$k1x(T) := R \cdot \cos(T)$ $\quad k1y(T) := R \cdot \sin(T)$ Der grosse (rote) Kreis

$mx(T) := (r + R) \cdot \cos(T)$ $\quad my(T) := (R + r) \cdot \sin(T)$ Der Mittelpunkt des blauen Kreises

$k2x(T,t) := mx(t) + r \cdot \cos(T)$ $\quad k2y(T,t) := my(t) + r \cdot \sin(T)$ Der kleine (blaue) Kreis

$$ezx(t) := (R + r) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos\left(\frac{r + R}{r} \cdot t\right)$$

$$ezy(t) := (R + r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\frac{r + R}{r} \cdot t\right)$$

Die Epizykloide

$g_x(i) := mx(b) + i(ezx(b) - mx(b))$ $\quad g_y(i) := my(b) + i(ezy(b) - my(b))$ Verbindungslinie Kreismittelpunkt - Epizykloide

$T := 0, 0.01 .. 2 \cdot \pi$

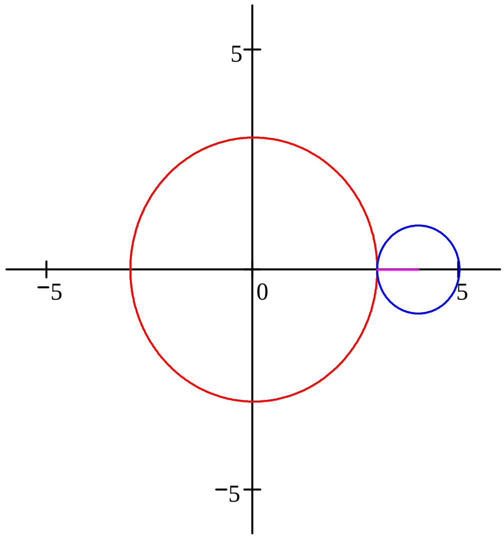
$t := 0, 0.01 .. b$

$i := 0 .. 1$

Variation der Parameter (wie oben bei der Zykloide)

Nun kann eine Animation mit FRAME von 0 bis 100 erstellt werden.

$b = 0$



Die Darstellung der Epizykloide als Ganzes (mit optionaler Variation der Parameter) erfolgt folgendermaßen:

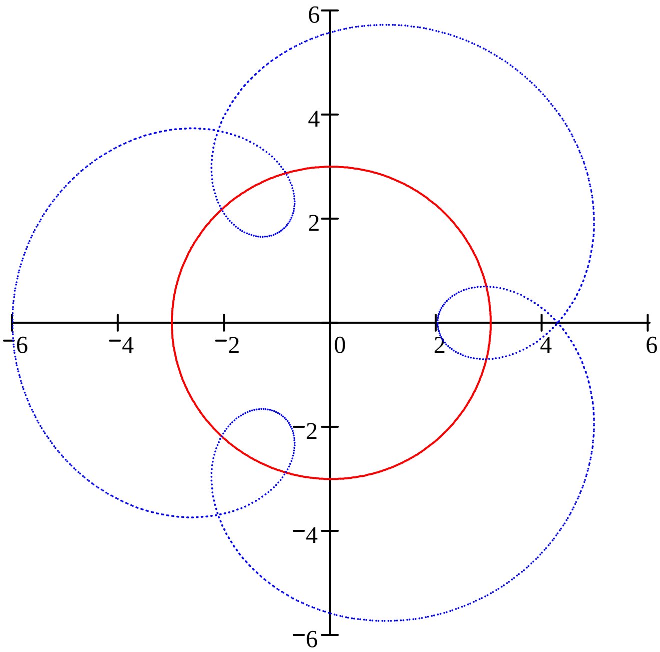
$b := 2\pi$ $\quad T := 0, 0.01 .. 2 \cdot \pi$ $\quad a := 2$ $\quad R := 3$ $\quad r := 1$

$t := 0, 0.01 .. b$

$k1x(T) := R \cdot \cos(T)$ $\quad k1y(T) := R \cdot \sin(T)$ $\quad$ Der grosse (rote) Kreis

$$ezx(t) := (R + r) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos\left(\frac{r + R}{r} \cdot t\right)$$ Die Epizykloide

$$ezy(t) := (R + r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\frac{r + R}{r} \cdot t\right)$$

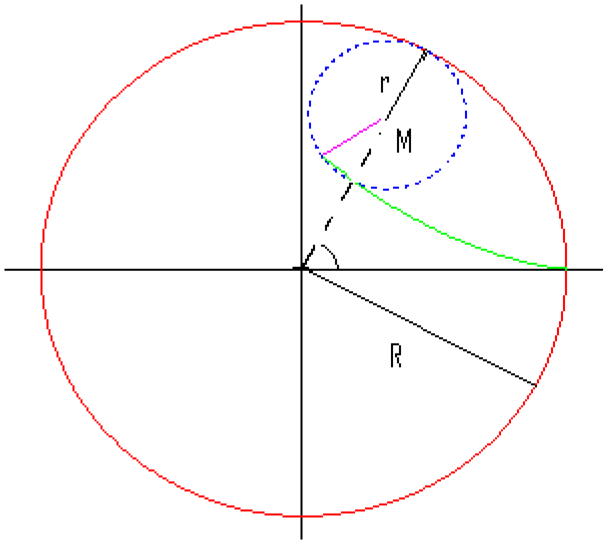


Hypozykloiden :

Die Parameterdarstellung lautet
mit dem Winkelparameter $t = \phi$:
(Herleitung siehe Literatur)

$$x(t) = (R - r) \cdot \cos(t) + r \cdot \cos\left(\frac{R - r}{r} \cdot t\right)$$

$$y(t) = (R - r) \cdot \sin(t) - r \cdot \sin\left(\frac{R - r}{r} \cdot t\right)$$



Sinngemäß gelten die gleichen Bezeichnungen
bzw. analoge Vorgangsweise wie bei Epizykloide.

Erstellung des Animationsmoduls:

$R := 5$ $r := 1.5$ $a := 1.5$

$b := 0 + 0.01 \cdot 2 \cdot \pi \cdot FRAME$

$k1x(T) := R \cdot \cos(T)$ $k1y(T) := R \cdot \sin(T)$ Der große (rote) Kreis

$mx(T) := (R - r) \cdot \cos(T)$ $my(T) := (R - r) \cdot \sin(T)$ Der Mittelpunkt M des blauen Kreises

$k2x(T,t) := mx(t) + r \cdot \cos(T)$ $k2y(T,t) := my(t) + r \cdot \sin(T)$ Der kleine (blaue) Kreis

$$hzx(t) := (R - r) \cdot \cos(t) + a \cdot \cos\left(\frac{R - r}{r} \cdot t\right)$$

$$hzy(t) := (R - r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\frac{R - r}{r} \cdot t\right)$$

Die Hypozykloide

$g_x(i) := mx(b) + i \cdot (hzx(b) - mx(b))$ $g_y(i) := my(b) + i \cdot (hzy(b) - my(b))$ Verbindungslinie Kreismittelpunkt - Epizykloide

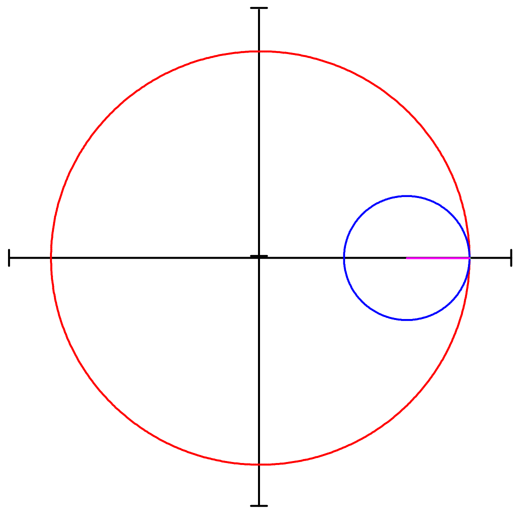
$T := 0, 0.01 .. 2 \cdot \pi$

$t := 0, 0.01 .. b$ Variation der Parameter (wie oben bei der Zykloide / Epizykloide)

$i := 0 .. 1$

Nun kann eine Animation mit FRAME von 0 bis 100 erstellt werden.

b = 0



Die Darstellung der Hypozykloide als Ganzes (mit optionaler Varaition der Parameter) erfolgt folgendermaßen:

$R := 3$ $r := 1$ $a := 1.5$ $b := 2\pi$

$k1x(T) := R \cdot \cos(T)$ $k1y(T) := R \cdot \sin(T)$ Der grosse (rote) Kreis

$hzx(t) := (R - r) \cdot \cos(t) + a \cdot \cos\left(\frac{R-r}{r} \cdot t\right)$ $hzy(t) := (R - r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\frac{R-r}{r} \cdot t\right)$ Die Hypozykloide

$T := 0, 0.01 .. 2 \cdot \pi$

$t := 0, 0.01 .. b$