Wilfried Rohm wrohm@aon.at

Ortskurven: Darstellung und Berechnungen

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik, Ortskurven, Wechselstromparadoxon, Differentialrechnung

- Kurzzusammenfassung

  An einem einfachen und einem komplizierteren Beispiel wird das Zeichnen von Ortskurven in Mathcad vorgeführt. Beim komplizierteren Beispiel (Frequenzgang von C parallel zu R und L) werden ausserdem verschiedene Berechnung (symbolisch UND nummerisch) durchgeführt und auf mögliche Probleme dabei hingewiesen.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Das Gebiet der Ortskurven ist eines jener mathematischen Gebiete, das Schülern des 2.Jahrganges / 3.Jahrganges die Sinnhaftigkeit bzw. Notwendigkeit des Computereinsatzes aufzeigt. Gleichzeitig zeigt es, dass ohne geegnete Interpretation der Computereinsatz nutzlos ist. Schließlich ist auch noch interessant, dass Computeralgebrasysteme generell so ihre liebe Not beim Vereinfachen von komplexen Zahlen haben können, was immer wieder das Eingreifen bzw. entsprechende Algebrakenntnisse des Users erfordert. (siehe den Abschnitt über symbolische Berechnungen beim 2.Beispiel)

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik: Komlexe Zahlen (insbes. elektrotechnische Abteilungen); Allgemeine Elektrotechnik (AET): 2.Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

- Literaturangaben:

  Krikava/Ruhswurm/Seiser: Grundlagen der Elektrotechnik, Band 2, Oldenbourg V.
  Möller/Fricke/Frohne/Vaske: Grundlagen der Elektrotechnik, Teubner Verlag.
  Zastrow,D.: Elektrotechnik (Lehr- und Arbeitsbuch), Vieweg Verlag.

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Ein weiteres Beispiel zum Thema Ortskurven findet man auf dieser Homepage unter "Das Elektrotechnische Paradoxon" (vom selben Autor)

Einführung

Ortskurven zeigen den Verlauf einer komplexen Größe wie z.B. Spannung, Strom, Widerstand oder Leitwert in Abhängigkeit von einem reellen Parameter (Frequenz, Widerstand, Kapazität, Induktivität). Die Ortskurve selbst ist der geometrische Ort aller Endpunkte (Zeigerspitzen) der komplexen Größe, der sich in Abhängigkeit vom reellen veränderlichen Parameter ergibt. Die Ortskurve erlaubt es, Betrag UND Winkel einer komplexen Größe direkt abzulesen.

Ortskurven von Grundschaltungen haben eine einfache Gestalt (Geradentyp, Kreistyp). Aber schon bei einfachen Kombinationen von R, L und C-Komponenten können relativ komplizierte Funktionsverläufe entstehen. In diesen Fällen erscheint es ratsam, neben der Ortskurve die entsprechenden Funktionsverläufe (Betrag, Winkel) getrennt zu betrachten und mit der Ortskurve zu vergleichen.

Näheres siehe Fachliteratur (vgl. Literaturangaben).

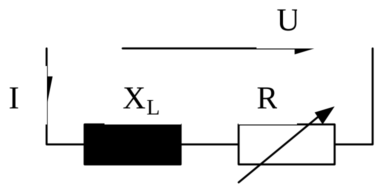
Zur Darstellung von Ortskurven in Mathcad können prinzipiell 2 Methoden verwendet werden:

1) **X-Y-Diagramm**: Parameterdarstellung der Funktion, indem der Realteil und Imaginärteil in Abhängigkeit von der veränderlichen Größe dargestellt wird. **Man achte aber auf gleiche Skalierung der Achsen, da sonst der Phasenwinkel nicht richtig abgelesen werden kann bzw. Kreise zu Ellipsen werden!**

2) **Kreisdiagramm**: dargestellt wird die Funktion mittels Polarkoordinaten (Betrag und Winkel=Argument der komplexen Zahl)

Beispiel 1: Veränderlicher ohm´scher Widerstand in Serie mit Induktivität

$XL := 5 \cdot \Omega$ $U := 25V$



$Z(R) := R + j \cdot XL$ Der komplexe Gesamtwiderstand

$Y(R) := \dfrac{1}{Z(R)}$ Der komplexe Leitwert

$I(R) := \dfrac{U}{Z(R)}$ Der komplexe Strom (proportional zum Leitwert!)

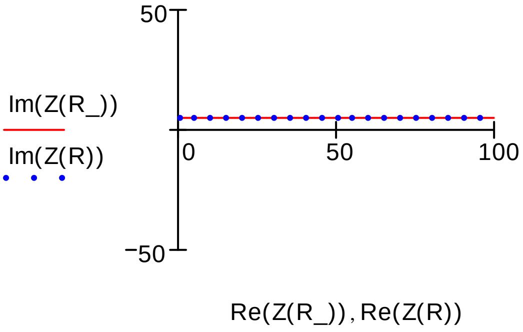
Tabellarische Darstellung der interessierenden Werte in Abhängigkeit von R

$R := 0\Omega, 5\Omega .. 100\Omega$

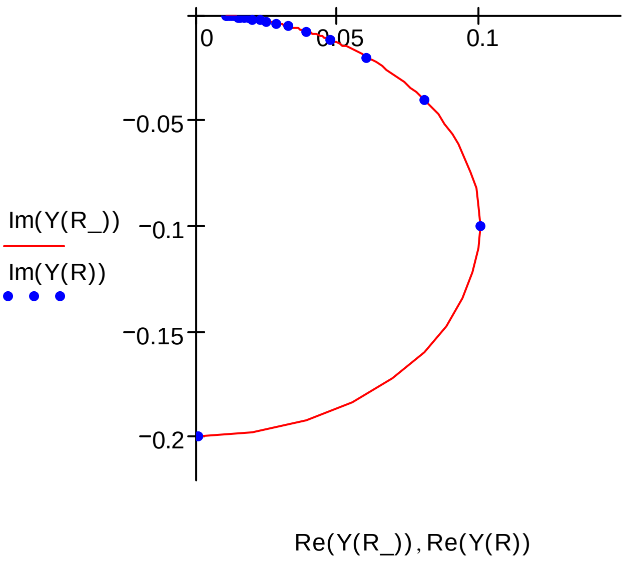
R =	Re(Z(R)) =	Im(Z(R)) =	|Z(R)| =	I(R) =	Re(I(R)) =	Im(I(R)) =
0 Ω	0 Ω	5 Ω	5 Ω	-5i A	0 A	-5 A
5	5	5	7.071	2.5-2.5i	2.5	-2.5
10	10	5	11.18	2-1i	2	-1
15	15	5	15.811	1.5-0.5i	1.5	-0.5
20	20	5	20.616	1.176-0.294i	1.176	-0.294
25	25	5	25.495	0.962-0.192i	0.962	-0.192
30	30	5	30.414	0.811-0.135i	0.811	-0.135
35	35	5	35.355	0.7-0.1i	0.7	-0.1
40	40	5	40.311	0.615-0.077i	0.615	-0.077
45	45	5	45.277	0.549-0.061i	0.549	-0.061
50	50	5	50.249	0.495-0.05i	0.495	-0.05
55	55	5	55.227	0.451-0.041i	0.451	-0.041
60	60	5	60.208	0.414-0.034i	0.414	-0.034
65	65	5	65.192	0.382-0.029i	0.382	-0.029
70	70	5	70.178	0.355-0.025i	0.355	-0.025
75	75	5	75.166	0.332-0.022i	0.332	-0.022

Für die zeichnerische Darstellung wählt man sinnvoller Weise eine feinere Unterteilung. Um aber auch obige Punkte einzeln in der Ortskurve darstellen zu können, wählen wir eine zweite Laufvaraible **R_.**
In der Zeichnung stellen wir die Kurve in Abhängigkeit von R_ als "Linien", die Kurve in Abhängigkeit von R hingegen als "Punkte" dar.

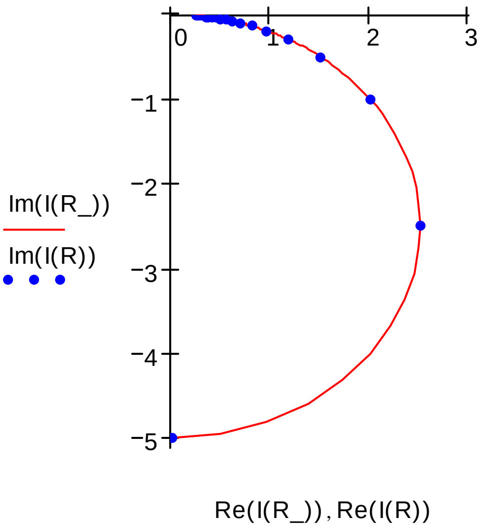
R_ := 0Ω , 0.5Ω .. 100Ω



Die Ortskurve des komplexen Widerstandes

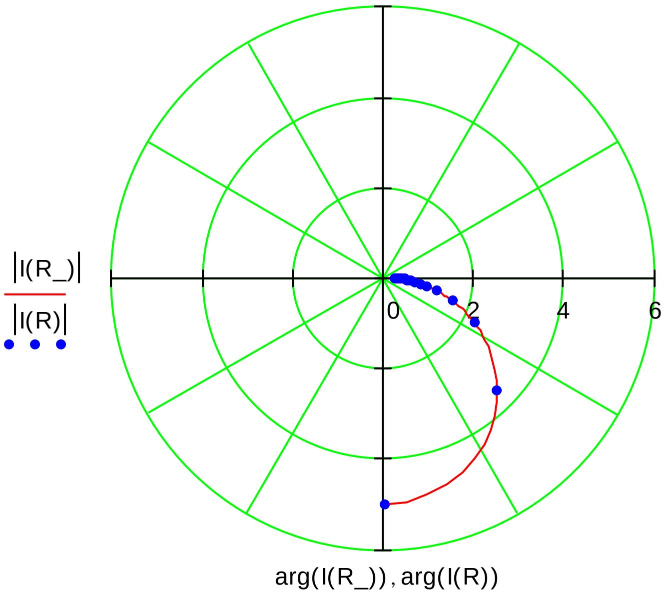


Die Ortskurve des komplexen Leitwertes



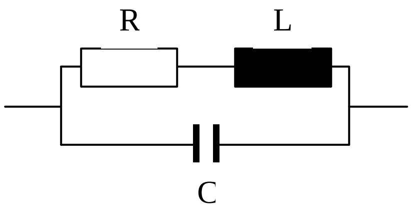
Die Ortskurve des komplexen Stromes hat dieselbe Form wie die Ortskurve des komplexen Leitwertes, da der Strom direkt proportional zum Leitwert ist (Proportionalitätsfaktor ist U)

Am Beispiel der Stromortskurve zeigen wir, wie die gleiche Ortskurve im Kreisdiagramm aussieht (das Kreisdiagramm kann natürlich auch unterschiedlich formatiert werden):



Beispiel 2: Ortskurve und Frequenzgang für einen Zweipol (C parallel zu (R+L))

Wir definieren konkrete Werte:



$L := 0.1 \cdot H$ $C := 32 \cdot 10^{-6} \cdot F$ $R := 20 \cdot \Omega$

$\omega(f) := 2 \cdot \pi \cdot f$

$f := 1 \cdot Hz .. 200 \cdot Hz$ $f_2 := 10 \cdot Hz, 20 \cdot Hz .. 210 \cdot Hz$ (f_2 für einzelne Punkte der Ortskurve)

$Z1(f) := R + j \cdot \omega(f) \cdot L$ $Z2(f) := \dfrac{-j}{\omega(f) \cdot C}$

$Z(f) := \dfrac{Z1(f) \cdot Z2(f)}{Z1(f) + Z2(f)}$ Definition des Gesamtwiderstandes (Parallelschaltung)

Weitere zu zeichnende Funktionen:

$Y(f) := \dfrac{1}{Z(f)}$ $Z_{Betrag}(f) := |Z(f)|$ $\Phi_Z(f) := \arg(Z(f))$

Symbolische und nummerische Berechnung einiger interessanter Größen (Region öffnen!)

Bei diesem interessanten Beispiel sind sowohl die symbolischen als auch die nummerischen Vorgangsweise zur Berechnung der gesuchten Größen mit gewissen Schwierigkeiten verbunden.

Zur symbolischen Berechnung bitte Link anklicken: SYMBOLISCHE BERECHNUNGEN

Nummerische Berechnungen: $TOL := 10^{-3}$

1) Bei welcher Frequenz ist Imaginärteil(Z) = 0 (Resonanzfall)

$h := 70 \cdot Hz$ Wahl der Schätzgröße bzw. Hilfsgröße h sehr kritisch !!!

Vorgabe

$Im(Z(h)) = 0$

$f_{res} := suchen(h)$ $f_{res} = 83.081\,Hz$ Berechnung mit Lösungsblock

$f_{res} := wurzel(Im(Z(h)), h, 50Hz, 100Hz)$ $f_{res} = 83.081\,Hz$ Berechnung mit Wurzelfunktion und Intervallangabe, Schätzgrößen nicht so kritisch

2) Berechnung von Z_max (mit Hilfe der Differentialrechnung)

$h := 83 \cdot Hz$

Vorgabe

$\frac{d}{dh}Z(h) = 0$

$f_{max} := suchen(h)$ $f_{max} = 0.221 - 3.591i \times 10^4\,Hz$ nicht das gesuchte reelle Ergebnis !!!

$f_{max} := wurzel\left(\frac{d}{dh}Z_{Betrag}(h), h, 80Hz, 90Hz\right)$ Fehlermeldung: Konvergenz nicht möglich!?!

$h := 83 \cdot Hz$ Startwert

$f_{max} := wurzel\left(\frac{d}{dh}Z_{Betrag}(h), h\right)$ $f_{max} = 88.646\,Hz$ **Richtige Lösung, aber Wahl des Startwertes bei Lösungssuiche sehr, sehr kritisch (sogar 88 Hz geht nicht!) !!!!**

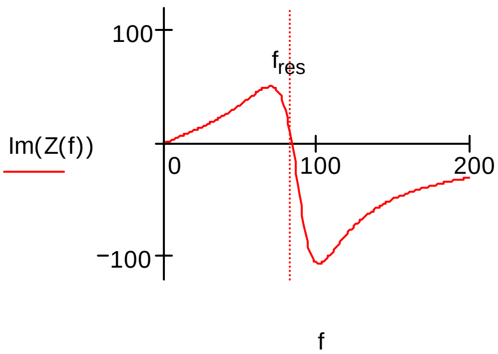
$Z(f_{max}) = 157.331 - 52.891i\,ohm$

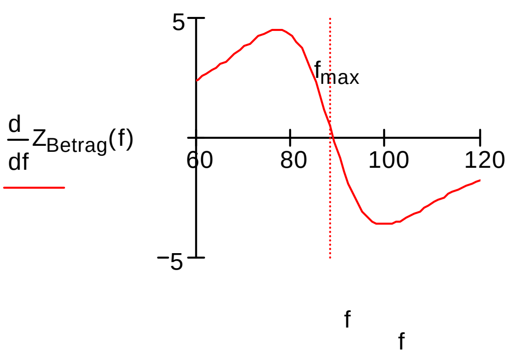
$Z_{Betrag}(f_{max}) = 165.983\,\Omega$

$arg(Z(f_{max})) = -18.581\,Grad$

Lösung:
Zmax = 157.331-j*52.89 = 165.983 |_ -18.583°

Der Grund für die großen Schwierigkeiten beim Auffinden der richtigen Lösung (besonders bei f_max) liegt offensichtlich in der besonderen Form der Funktion und in Problemen, welche der Suchalgorithmus bei derartigen Funktionen hat. Gegebenenfalls empfiehlt es sich, so wie unten eine Skizze zu machen, den gesuchten Wert aus der Zeichnung zu lesen bzw. geeignete Schätzwerte mit Hilfe der Zeichnung zu finden.
Auch die Wahl unterschiedlicher Methoden (und damit unterschiedlicher Algorithmen) kann sinnvoll sein! In diesem Beispiel könnte man dem Problem auch durch symbolische Berechnung ausweichen (siehe LINK)





3) Berechnung von ϕ_max (das ist der maximale Phasenwinkel)

$TOL := 10^{-5}$

Eine engere Toleranz wurde gewählt, sonst sind die Werte der beiden Rechenverfahren unten unterschiedlich. Die Wahl des Startwertes ist hier nicht sonderlich kmritisch!

$h := 30Hz$

Vorgabe

$$\frac{d}{dh}\Phi_Z(h) = 0$$

$f_{\phi\_max} := suchen(h)$

$f_{\phi\_max} = 47.967\,Hz$

$h := 50Hz$

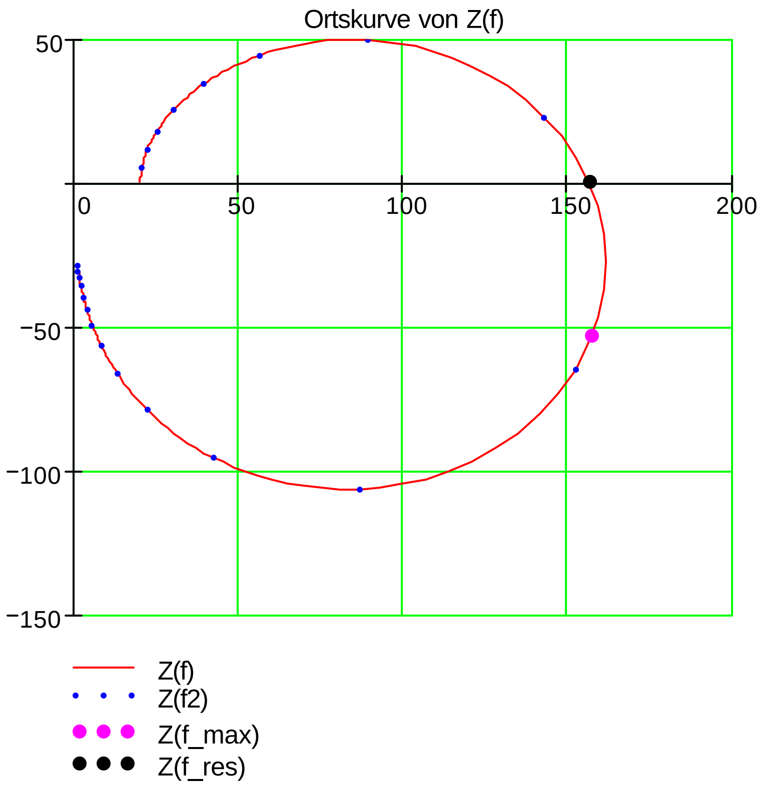
$f_{\phi\_max} := wurzel\left(\frac{d}{dh}\Phi_Z(h), h\right)$

$f_{\phi\_max} = 47.968\,Hz$

$\phi\_max := \Phi_Z(f_{\phi\_max})$

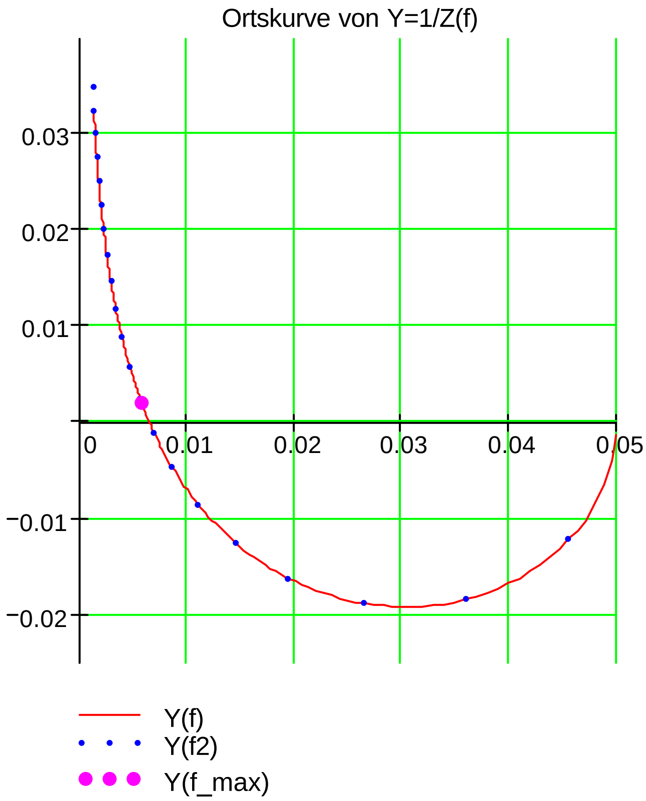
$\phi\_max = 41.219\,Grad$

Zeichnerische Darstellungen



Die Ortskurve beginnt bei f=0 Hz als rein reeller Widerstand (R=20 Ω)

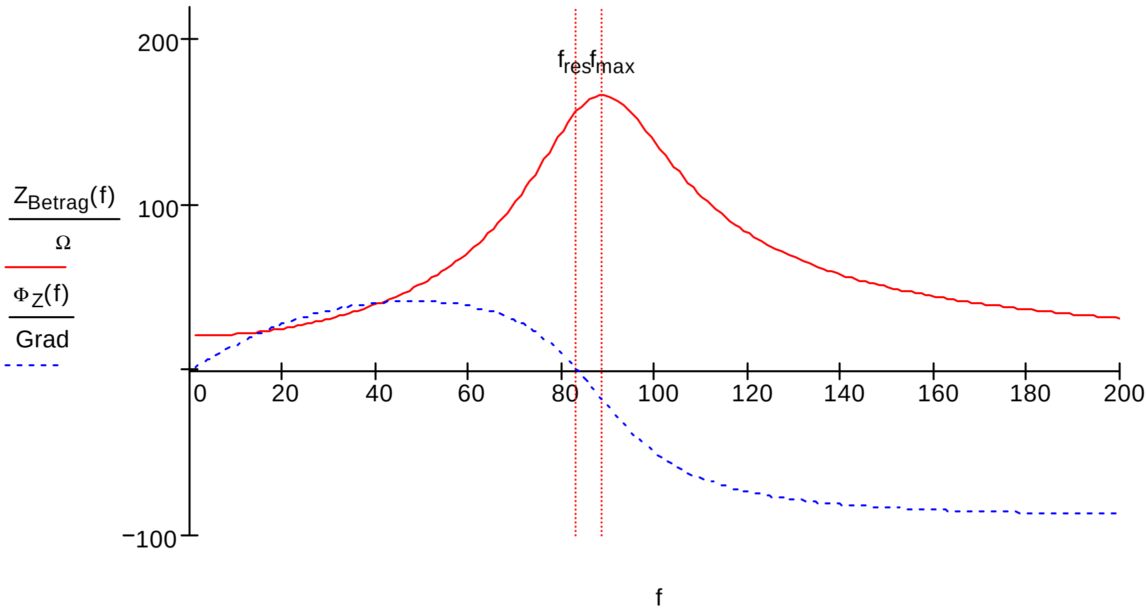
Der Zeigerendpunkt von Z_max wurde als magenta-Punkt eingezeichnet, der Zeigerendpunkt von Z_res als schwarzer Punkt.



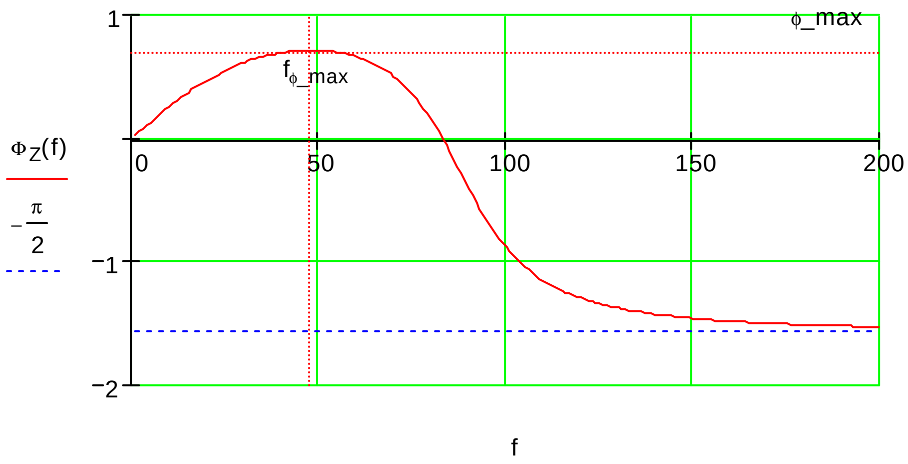
Der magenta eingezeichnete Punkt ist der Zeigerendpunkt zum Kehrwert von Z_max - dort wird der Betrag des Leitwertes nun MINIMAL!

Darstellung von Betrag und Phasenlage in Abhängigkeit von der Frequenz (das entspricht also dem, was aus der Ortskurve "auf einmal" herausgelesen werden kann.
Man beachte: In diesem Diagramm werden verschiedene Achseneinheiten für die beiden Funktionen verwendet!!

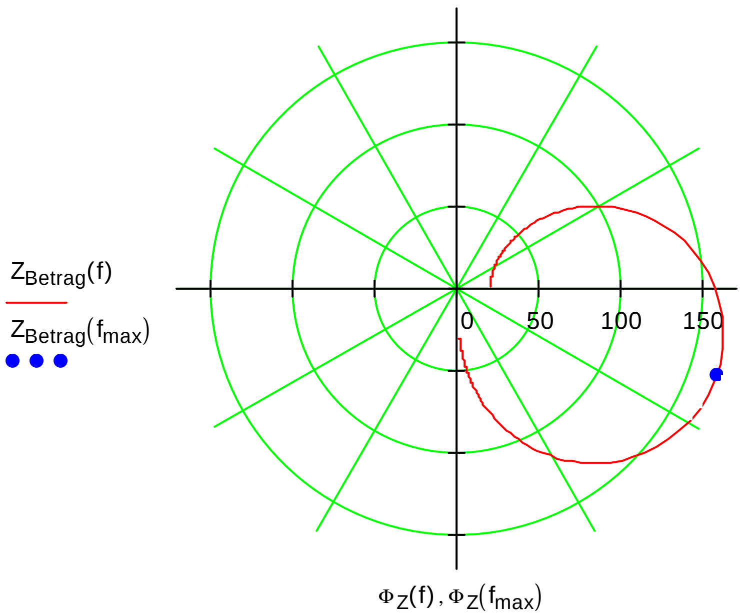
Die Funktionswerte von bei f_max bzw. f_res entsprechen der Zeigerlänge und damit dem Abstand der in der Ortskurve markierten (dicken) Punkte vom Koordiantenursprung.



Darstellung der Phasenlage (allein) in Radiant - mit eingezeichnetem Maximalwert und eingezeichneter Assymptote für f gegen unendlich.



Darstellung der Ortskurve Z(f) mittels Kreisdiagramm (eingezeichnet wird nur Z_max)



Vorteil des Kreisdiagrammes:

Die Darstellung ist automatisch winkeltreu und recht übersichtlich.