Wilfried Rohm wrohm@aon.at

Berechnung des Volumens von Hühnereiern

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Integralrechnung, Splinefunktionen, Simpson-Regel

- Kurzzusammenfassung

  Ausgehend von den Maßen eines zufällig ausgewählten Eies soll mit verschiedenen Verfahren das Volumen des Eies berechnet werden. Die Ergebnisse werden anschließend verglichen und die praktische Brauchbarkeit der verwendeten Verfahren diskutiert (Vergleich mit dem Volumen, das nach dem archimedischen Prinzip durch Eintauchen des Eies in Wasser ermittelt wurde)

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Es handelt sich hier um ein Beispiel einer sogenannten Projektarbeit, die der Autor seit vielen Jahren statt einer der 4 lehrplanmäßig vorgesehenen Schularbeiten durchführt. Das hier angeführte Ergebnis stammt (mit leichten Veränderungen und Ergänzungen durch den Autor) von einem einzelnen Schüler (Thomas Fritzenwanker, 1997).

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 3. oder 4.Jahrgang, alle Abteilungen

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

- Anmerkungen bzw. Sonstiges

  In der Aufgabe tritt bei niedrigeren Versionen als 2001 bei der Auflösung des nichtlinearen Gleichungssystems ein "Mathcad-Problem" auf, das ich bis jetzt nicht befriedigend lösen konnte.

Aufgabenstellung

Ein typisches Problem der angewandten Mathematik ist die Volumsbestimmung von Körpern, die NICHT durch eine bestimmte Funktion gegeben sind (analog zum Flächenproblem). Als Beispiel dient uns ein Hühnerei. Es sollen verschiedene Methoden gefunden werden, dieses Volumen zu bestimmen. Außerdem sollen die Methoden auf ihre praktische Brauchbarkeit hin untersucht und verglichen werden.

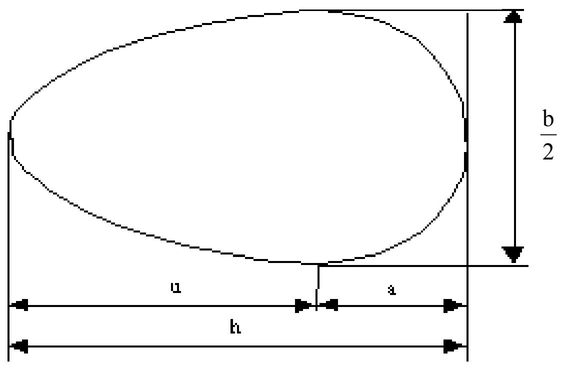
Annahme: Sozusagen am Fließband soll möglichst genau ***und*** *möglichst einfach das Volumen der nacheinander kommenden Eier bestimmt werden.*

Verwendete Verfahren

1. Berechnung des Volumens mit zwei Teilfunktionen: Parabel und Ellipse
2. Berechnung des Volumens mit zwei Teilfunktionen: Ellipse und Ellipse
3. Berechnung des Volumens mit Hilfe von Spline-Interpolationsfunktionen
4. Berechnung des Volumens mit Hilfe der Simpson-Regel

Arbeitsschritte der Berechnung

1. Eingabe (Maße) des zu berechnenden Eies
2. Erstellung der einzelnen Teilfunktionen
3. Berechnung des Schnittpunktes der Teilfunktionen (Parabel-Ellipse und Ellipse-Ellipse)
4. Graphische Darstellung der Gesamtfunktion
5. Berechnung des Volumens mittels zusammengestückelter Teilfunktionen zu einer Gesamtfunktion
6. Berechnung des Volumens mittels Spline-Interpolationsfunktion
7. Berechnung des Volumens mittels Simpson-Regel
8. Gegenüberstellung und Vergleich mit dem "wahren" Wert
9. Auswertung und Stellungnahme



1.)Maße des zu berechnenden Eies

h ... Länge des Eies
b ... Dicke des Eies,
a ... Abstand von der dicksten Stelle des Eies zur flacheren Spitze
u ... Abstand von der dicksten Stelle des Eies zur zweiten Spitze des Eies (wird nicht gemessen)
Vgem ... gemessenes Volumen des Eies (Eintauchen in Wasser)

$h := 5.8 \cdot cm$ $\quad b := \frac{4.55}{2} \cdot cm$ $\quad a := 2.3cm$ $\quad u := h - a \quad u = 3.5\,cm$

$$Vgem := \left(\frac{6.05cm - 0.3cm}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2.3cm \qquad Vgem = 59.725\,cm^3$$

2.)Erstellen der einzelnen Teilfunktionen

$$\left(\frac{x-u}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad y(x)_{ef} = b \cdot \frac{\sqrt{-x^2 + 2 \cdot x \cdot u - u^2 + a^2}}{a}$$ Ellipse für die flache Spitze des Eies

$$\left(\frac{x-u}{u}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad y(x)_{es} = b \cdot \frac{\sqrt{\left(-x^2 + 2 \cdot x \cdot u\right)}}{u}$$ Ellipse für die zweite (spitzere) Spitze des Eies

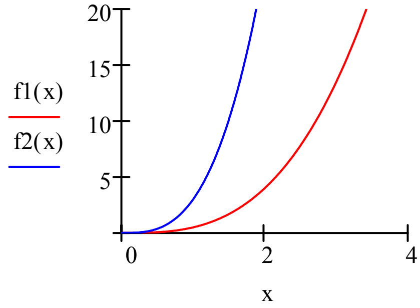
$$y(x)_p = \sqrt[3]{x} \cdot c$$ Parabel für die zweite (spitzere) Spitze des Eies

3.)Berechnung des Schnittpunktes von Parabel und Ellipse

Zur Berechnung des Schnittpunktes s zwischen Parabel und Ellipse müssen zwei Gleichungen aufgestellt werden. Die Parabelfunktion $F[x]=x^3c$ beinhaltet eine Konstante c, die die Öffnung der Parabel angibt.

$c1 := 0.5 \quad c2 := 3 \qquad x := -0, 0.01 .. 4$

$f1(x) := x^3 \cdot c1 \quad f2(x) := x^3 \cdot c2$



Vergleich von "c1" und "c2"

Die erste Gleichung berechnet den Punkt in dem der Y-Werte $Y_p = Y_{ef}$ ist.

$$y(x)_{ef} = y(x)_p \qquad b \cdot \frac{\sqrt{-x^2 + 2 \cdot x \cdot u - u^2 + a^2}}{a} = \sqrt[3]{x} \cdot c$$

Die zweite Gleichung berücksichtigt, daß der Übergang von der Parabel in eine Ellipse ohne Sprung erfolgen soll (das heißt, dass die Steigungen die selben sein müssen).

$$\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)_{ef} = \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)_p \qquad \frac{d}{dx} b \cdot \frac{\sqrt{-x^2 + 2 \cdot x \cdot u - u^2 + a^2}}{a} = \frac{d}{dx} \sqrt[3]{x} \cdot c$$

Dieses nichtlineare Gleichungsystem mit zwei Variablen (x,c) wird mit der Funktion "SUCHEN" aufgelöst.

$x := \frac{h}{2} \qquad c := 1\text{cm}^{\frac{2}{3}}$ **Vorsicht: Die Konstante c muß die "richtige" Einheit haben!!**

Vorgabe

$$b \cdot \frac{\sqrt{-x^2 + 2 \cdot x \cdot u - u^2 + a^2}}{a} = \sqrt[3]{x} \cdot c$$

$$\frac{d}{dx} b \cdot \frac{\sqrt{\left(-x^2 + 2 \cdot x \cdot u - u^2\right) + a^2}}{a} = \frac{d}{dx} \sqrt[3]{x} \cdot c$$

$\begin{pmatrix} x_s \\ c \end{pmatrix} := \text{Suchen}(x, c) \qquad x_s = 2.935\ \text{cm} \qquad c = 0.071\ \text{m}^{0.667}$

4.)Zeichnen der Funktionen Parabel+Ellipse und Ellipse+Ellipse

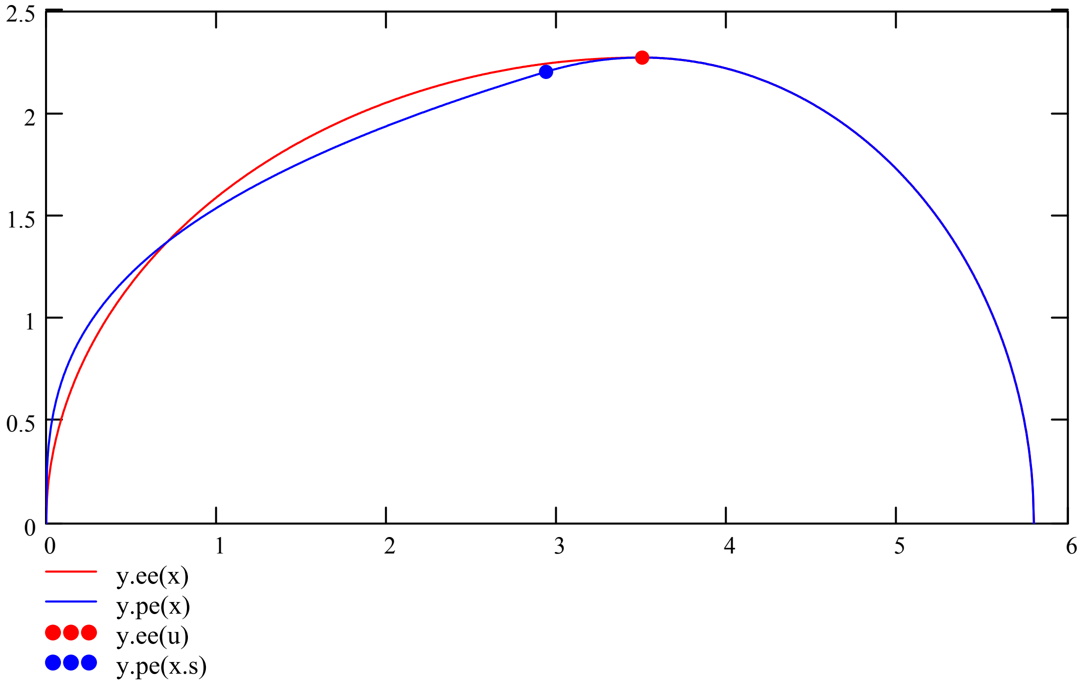
$x := 0\,cm, 0.005\,cm\,..\,h$ x wird als Bereichsvariable definiert

Ellipse + Ellipse

$$y_{ee}(x) := \begin{cases} b \cdot \dfrac{\sqrt{-x^2 + 2 \cdot x \cdot u}}{u} & \text{if } x < u \\ b \cdot \dfrac{\sqrt{-x^2 + 2 \cdot x \cdot u - u^2 + a^2}}{a} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Parabel + Ellipse

$$y_{pe}(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot c & \text{if } x < x_s \\ b \cdot \dfrac{\sqrt{-x^2 + 2 \cdot x \cdot u - u^2 + a^2}}{a} & \text{otherwise} \end{cases}$$



5.)Berechnung des Volumens mit Teilfunktionen:

$$Vee := \int_0^h y_{ee}(x)^2 \cdot \pi \, dx$$ Vee = Volumen mit zwei Ellipsen $\boxed{Vee = 62.871\,cm^3}$

$$Vpe := \int_0^h y_{pe}(x)^2 \cdot \pi \, dx$$ Vpe = Volumen mit Parabel und Ellipse $\boxed{Vpe = 60.839\,cm^3}$

6.)Berechnung des Volumens mit Spline-Interpolationsfunktion:

$i := 0..8$

vy enthält die gemessenen Werte der Eidicke/2 in der jeweiligen Höhe vx

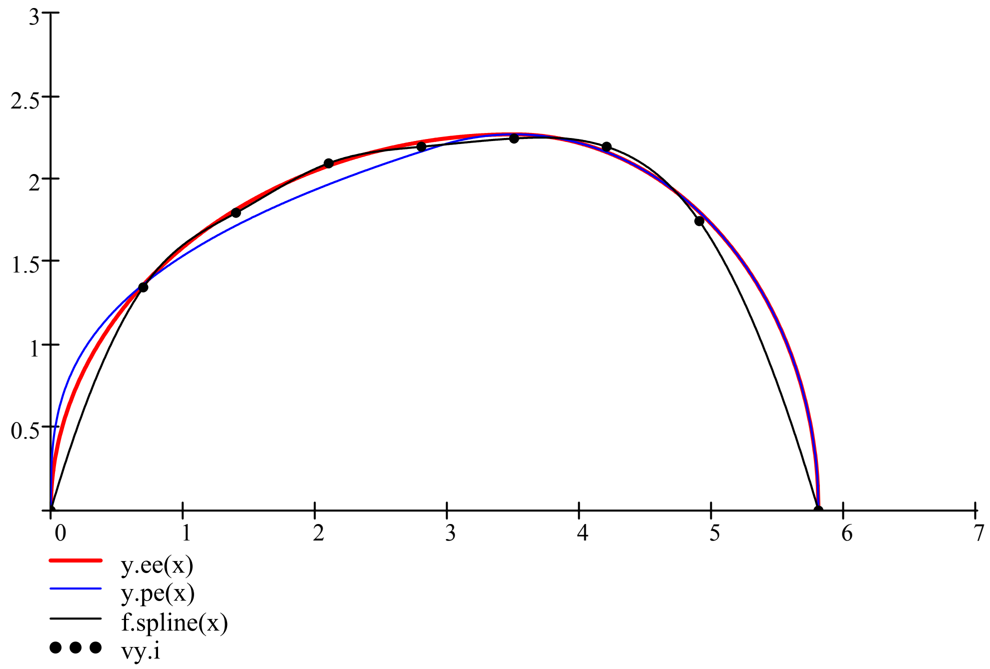
$vx_i :=$	$vy_i :=$
0cm	0cm
0.7cm	1.35cm
1.4cm	1.8cm
2.1cm	2.1cm
2.8cm	2.2cm
3.5cm	2.25cm
4.2cm	2.2cm
4.9cm	1.75cm
5.8cm	0cm

$$vs := \mathrm{pspline}(vx, vy)$$

$$f_{spline}(x) := \mathrm{interp}(vs, vx, vy, x) \cdot \Phi(h - x)$$

$$Vsp := \int_0^h f_{spline}(x)^2 \cdot \pi \, dx \qquad Vsp = 60.714\,cm^3$$

funktion



7.)Berechnung des Volumens mit Simpson-Regel:

Simpson -Regel normal für Flächen mit Funktionswerten y_0 - y_n

$$A = \frac{1}{6} \cdot \Delta x \cdot \left(y_0 + 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 + 2 \cdot y_4 + \dots\dots + 4 \cdot y_{n-1} + y_n\right)$$

Simpson -Regel für Volumen mit Querschnittsflächen A_0 - A_n

$$V = \frac{1}{6} \cdot \Delta x \cdot \left(A_0 + 4 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 4 \cdot A_3 + 2 \cdot A_4 + \dots\dots + 4 \cdot A_n - 1 + A_n\right)$$

Simpson -Regel für Volumen mit den Querschnittsflächen $A_0 = y_0^2\pi$ - $A_n = y_n^2\pi$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \Delta x \cdot \pi \cdot \left[\left(y_0\right)^2 + 4 \cdot \left(y_1\right)^2 + 2 \cdot \left(y_2\right)^2 + 4 \cdot \left(y_3\right)^2 + 2 \cdot \left(y_4\right)^2 + \dots\dots + 4 \cdot \left(y_{n-1}\right)^2 + \left(y_n\right)^2\right]$$

$$V_{simps} := \frac{\left(vx_8 - vx_0\right) \cdot \pi}{6} \cdot \left[\frac{\left(vy_0\right)^2}{4} + \left(vy_1\right)^2 + \frac{\left(vy_2\right)^2}{2} + \left(vy_3\right)^2 + \frac{\left(vy_4\right)^2}{2} + \left(vy_5\right)^2 + \frac{\left(vy_6\right)^2}{2} + \left(vy_7\right)^2 + \frac{\left(vy_8\right)^2}{4}\right]$$

$$V_{simps} = 63.22\,cm^3$$

Vsr = Volumen mit Simpson-Regel

8.) Gegenüberstellung der Fehler der einzelnen Volumsberechnungen:

$Fr(V) := \frac{|V - Vgem|}{Vgem}$ Fr .. relative Fehler

$Fa(V) := (V - Vgem)$ Fr .. absolute Fehler

$Vee = 6.287 \times 10^{-5}\,m^3$ Vee .. Volumen mit zwei Ellipsen

$Vpe = 60.839\,cm^3$ Vpe .. Volumen mit Parabel und Ellipse

$Vsp = 60.714\,cm^3$ Vsp .. Volumen mit Spline - Ausgleichsfunktion

$V_{simps} = 63.22\,cm^3$ Vsr .. Volumen mit Simpson-Regel

$Vgem = 59.725\,cm^3$ Vgem .. Volumen mit Simpson-Regel

GEGENÜBERSTELLUNG

	absolute Fehler	relative Fehler
2 Ellipsen	$Fa(Vee) = 3.1\,cm^3$	$Fr(Vee) = 5.3\,\%$
Parabel+Ellipse	$Fa(Vpe) = 1.1\,cm^3$	$Fr(Vpe) = 1.9\,\%$
Spline-Interpolation	$Fa(Vsp) = 1\,cm^3$	$Fr(Vsp) = 1.657\,\%$
Simpson-Regel	$Fa(V_{simps}) = 3.495\,cm^3$	$Fr(V_{simps}) = 5.853\,\%$

9. Auswertung und Stellungnahme

Der Vergleich der einzelnen Volumina hat gezeigt, daß der Fehler gegenüber dem wahren Volumen für das hier betrachtete Ei zwischen 1,7% und 5,9% liegt. Allerdings muß gesagt werden, daß Eiformen sehr unterschiedlich sein können und daher die einzelnen Verfahren nicht immer gleiche Ergebnisse liefern.

Die größte Abweichung hatte die Berechnung mit der SIMPSON-Regel. Dieser Berechnung liegt das Doppelstreifenprinzip zugrunde. Es werden mehrere Doppelstreifen aneinandergereiht. Diese Art der Berechnung hat bei sehr steilen Funktionen ihre Schwächen. An den Spitzen des Eies ist dies der Fall, darum kommt auch die große Abweichung zustande.

Die kleinste Abweichung weist die Berechnung mit der Spline-Interpolationsfunktion auf. Die gemessenen Punkte werden jeweils mit einer Parabel verbunden, wobei auch die Steigungen in den Schnittpunkten der Parablen berücksichtigt werden. Je mehr Meßpunkte, desto genauer wird die Berechnung. Allerdings ist dieses Verfahren sehr arbeitsintensiv, denn das Ei muß mehrmals vermessen werden, was ein aufwendiges Verfahren erfordert.

Der Eiform sehr nahe kommt offenbar auch die Annahme der Teilfunktionen **Parabel** (am spitzen Ende des Eies) und **Ellipse** (am flacheren Ende des Eies). Der Schnittpunkt der beiden Funktionen muß allerdings (in Abhängigkeit von den speziellen Werten) immer wieder mit einem relativ komplizierten Gleichungssystem neu berechnet werden. Ich habe aber auch spezielle, eher selten vorkommende Eiformen beobachtet und durchgerechnet, bei denen Ellipse+Ellipse besser paßt als Ellipse+Parabel. Interessant ist auch, daß in allen untersuchten Fällen eine quadratische Parabel viel schlechter als eine kubische Parabel paßt.

Vergleicht man den Arbeitsaufwand mit der Genauigkeit des Volumens, so ist die Berechnung durch zwei Ellipsen wahrscheinlich am effizientesten. Es muß nur die Länge und (größte) Breite des Eies ermittelt werden, da sich die beiden Ellipsen an der Stelle der größten Breite treffen. Über Lichtschrankenmessung ist dies kein Problem. Wo sich die breiteste Stelle (im Schnitt) befindet, kann statistisch ermittelt werden. Diese Art der Berechnung wäre für die Bestimmung der Größenklassen der Eier bei industrieller Verarbeitung am besten geeignet, wenn es auch nicht das genaueste Verfahren ist.