Wilfried Rohm

Lineare Differentialgleichung 2.Ordnung - Beispiel Autofeder

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Numerisches Lösen einer linearen Differentialgleichung 2.Ordnung am Beispiel einer "Autofeder" - Unterscheidung der Lösungsfälle "aperiodische Lösung", "aperiodischer Grenzfall" und "Schwingfall"; Lösungsverhalten unter Berücksichtiugung von Störfunktionen.

- Kurzzusammenfassung

  Die Lösung der homogenen und inhomogenen Linearen Differentialgleichung 2.Ordnung erfolgt in diesem File lediglich numerisch mit den Möglichkeiten, welche Mathcad für "Gewöhnliche Differentialgleichungen" bietet: Die Funktion `Gdglösen` bzw. `Odesolve`.

  Das Ziel dieses Artikels ist jedoch ein anderes:
  Es soll an einem praktischen, anschaulichen Beispiel ("Autofeder") das Lösungsverhalten veranschaulicht werden (ohne den "Ballast" einer analytischen Lösung).
  Ausgehend von den Lösungsfällen der homogenen Gleichung (Aperiodischer Fall, aperiodischer Grenzfall, Schwingungsfall) wird das Verhalten des Systems auch beim Anlegen von praxisrelavanten Störfunktionen untersucht. Dabei werden auch Anleitungen zu entsprechenden Animationen gegeben.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Der vorliegende File ist in erster Linie als Demonstrationsfile gedacht, der die Lösungen der Schwingungsgleichung veranschaulichen soll.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 4./ 5.Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 15

- Literaturangaben:

  Alle aktuellen Lehrbücher, Thema "Schwingungsgleichungen"

Aufgabenstellung:
Annahme: Die Gewichtskraft bei einem Auto betrage 3000 N pro Rad, Die Feder wird beim Fahren über Hindernis um 5 cm verformt.

Als Anfangsbedingungen wird daher angenommen: y(0)=5 y'(0) =0

Die Differentialgleichung der Feder lautet:

$$m \cdot \frac{d^2}{dx^2}x(t) + b \cdot \left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + k \cdot x(t) = 0 \quad \text{bzw} \quad m \cdot \frac{d^2}{dx^2}x(t) + b \cdot \left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + k \cdot x(t) = x_{stör}(t)$$

Dabei bedeutet: m ... Masse in kg
b ... Widerstandskoeffizient (Dämpfungkskonstante) in kg/s
k .... Federkonstante in N/m bzw. kg/s^2

Aus der Angabe werden die benötigten Größen berechnet: Dabei werden das Hooke´sche Gesetz (F = k·x) und die Formel für die Gewichtskraft (G=m·g) verwendet.

$F = k \cdot x$ $\quad k := \frac{3000}{0.05} \frac{N}{m}$ $\quad k = 6 \times 10^4 \frac{kg}{s^2}$

$G = m \cdot g$ $\quad m := \frac{3000}{10}$ $\quad m = 300$ kg

Eigenkreisfrequenz ω_0 bzw. Periode der Eigenschwingung : $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad T_s := \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\quad T_s = 0.444$ s

Fall 1: Keine Stoßdämpfer, keine Reibung (theoretisch ungedämpft) $b := 0 \frac{kg}{s}$

Vorgabe

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t) + b \cdot \frac{d}{dt}x(t) + (k \cdot x(t)) = 0$$ Zu lösende Differentialgleichung

$x(0) = 0.05$ $\quad x'(0) = 0$ Anfangsbedingung

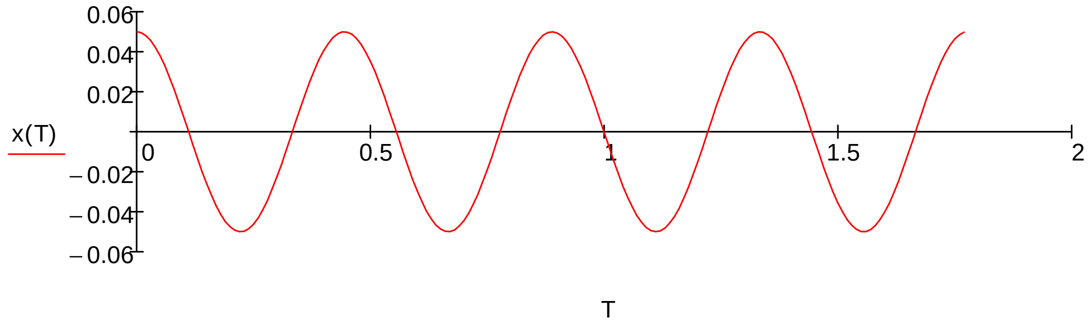
$x := \text{Gdglösen}(t, 10, 1000)$

Hinweis: Mit rechter Taste auf **gdglösen** bzw. **odesolve** die nummerische Berchnungsmethode auf ein adaptives Verfahren einstellen, weil sonst grobe Ungenauigkeiten passieren können!! Oder den 3.Parameter auf einen hohen Wert (z.B. 1000) setzen!

Hinweis zur Lösungsmethode:
Mathcad hat (seltsamer Weise) keine symbolischen Berechnungen zur Lösung von Differentialgleichungen vorgesehen.
Allerdings enthält Mathcad viele leistungsstarke Funktionen zur nummerischen Lösung (auch komplizierterer und auch partiell Diffrerentialgleichungen.
Gewöhnliche Differentialgleichungen können mit Hilfe des Lösungsblockes
vorgabe-Gdglösen bzw. **given-odesolve**
gelöst werden.
Zu beachten: Die Ableitungen können in der Gleichung mit Apostroph (**STRG-F7**) oder dem Ableitungsoperator eingegeben werden, Nebenbedingungen **müssen** mit dem Apostroph (**STRG-F7**) eingegeben werden.

$T := 0, 0.01 .. 4 \cdot T_s$

Hinweis: In den anderen, folgenden Fällen wurde der obige Lösungsblock jeweils hinunterkopiert und in einer Region "versteckt", um eine bessere Übersicht beim Ändern der Parameter zu erhalten!



Wir erhalten (wie in diesem reibungslosen Fall zu erwarten wäre) eine ungedämpfte Schwingung

Fall 2: Aperiodischer Grenzfall: b ist aus der charakteristischen Gleichung auszurechnen

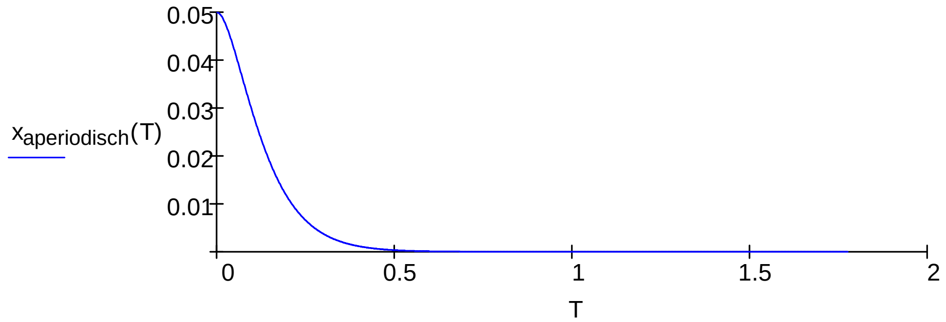
Den Konstruktuer einer Feder interessiert bei der Dimensionierung der Feder der aperiodische Grenzfall, weil er die schnell Rückkehr in den Ruhezustand ohne Überschwingen erlaubt. (das ist im Bereioch der Elektrotechnik insbesondere bei Meßinstrumenten [Drehspulinstrumenten] von Bedeutung)
Die Berechnung des Dämpfungswertes b erfolgt aus der charakteristischen Gleichung

$$m \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + k = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot m} \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot m}$$

Also $b := \mathrm{wurzel}\left[\left(b^2 - 4k \cdot m\right), b\right]$ $b = 8485.28$

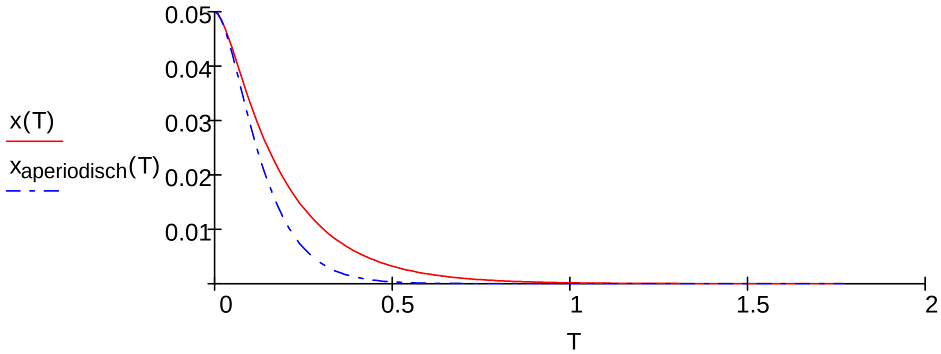
Berechnung



Fall 3: Stärkere Dämpfung der Feder

$b := 12000$

Berechnung

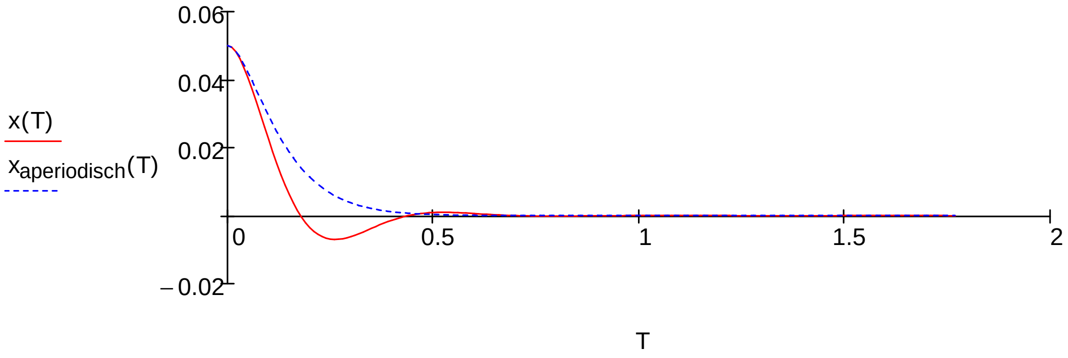


In der Grafik erfolgt ein Vergleich mit dem aperiodischen Grenzfall:
Die stärkere Dämpfung der Feder verlängert die Zeit bis zur Rückkehr in den "Ruhezustand"

Fall 4 : Stoßdämpfer beschädigt

$b := 4500$

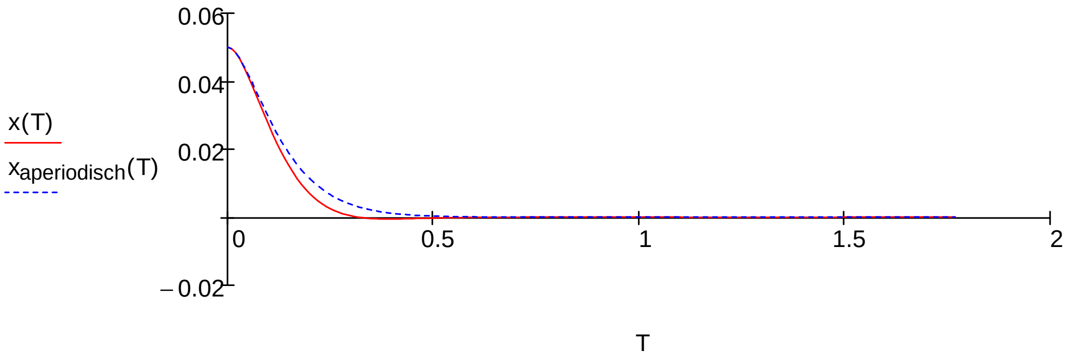
Berechnung



Es erfolgt wieder ein Vergleich mit dem aperiodischen Grenzfall. Der "Techniker" orientiert sich bei der Konstruktion von Federn (z.B. bei der Dämpfung eines Drehspulinstrumentes) manchmal gerne am Fall der "ganz leichten Schwingung" statt dem aperiodischen Grenzfall, weil der Übergang in den "Ruhezustand" zwar (kaum merklich) schwingend, aber schneller erfolgt als im apertiodischen Grenzfall. Dies sieht man gut, wenn man oben beispielsweise b=7000 kg/s setzt.

$b := 7000$

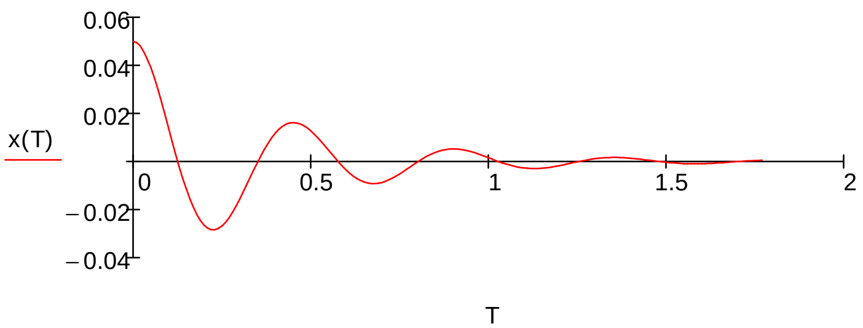
Berechnung



Fall 5: Kein Stoßdämpfer mehr bzw. kaputt , praktisch nur mehr Federreibung

$b := 1500$

Berechnung



Das Bild zeigt sehr schwache Dämpfung

Fall 6: Einwirkung einer konstanten Kraft F (z.B. Niederdrücken)

$F := 1200 \; N \qquad b := 5000 \; \frac{kg}{s}$

Vorgabe

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t) + b \cdot \frac{d}{dt}x(t) + (k \cdot x(t)) = F$$

Hier liegt nun eine inhomogene Gleichung mit konstanter Störfunktion vor

$x(0) = 0 \qquad x'(0) = 0$

$x := \text{Gdglösen}(t, 10)$

Wieder wird (zum Vergleich) der aperiodische Grenzfall berechnet und gezeichnet (in Region "versteckt")

Berechnung des aperiodischen Grenzfalles

$$m \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + k = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot m} \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot m}$$

$b := \text{wurzel}\left[\left(b^2 - 4k \cdot m\right), b\right] \qquad b = 8485.28$

$b_{aperiodisch} := b$

Vorgabe

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t) + b \cdot \frac{d}{dt}x(t) + (k \cdot x(t)) = F$$

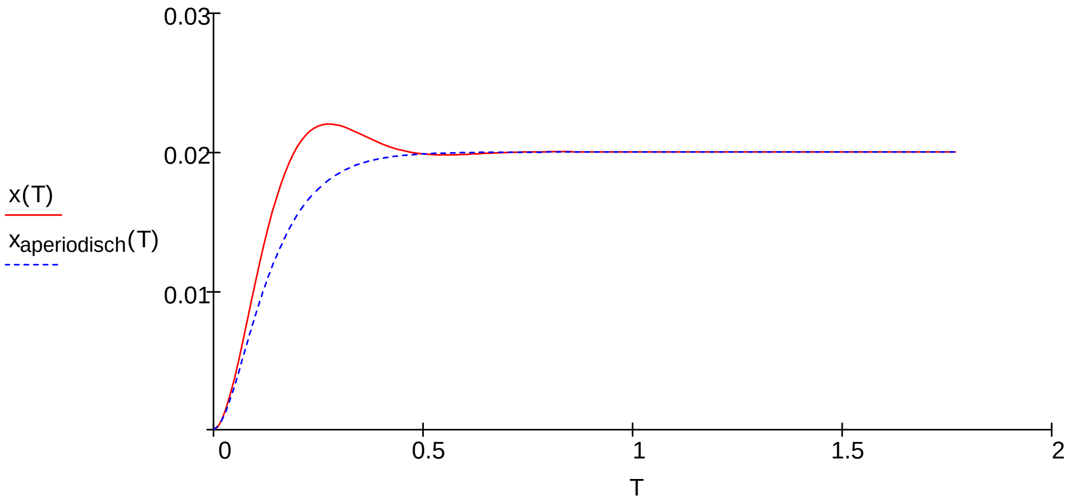
$x(0) = 0 \qquad x'(0) = 0$

$x_{aperiodisch} := \text{Gdglösen}(t, 2, 100)$

Berechnung des aperiodischen Grenzfalles

$T := 0, 0.01 .. 4 \cdot T_s$

Konstante Funktion als Störfunktion - Vergleich mit der Lösung beim aperiodischen Grenzfall

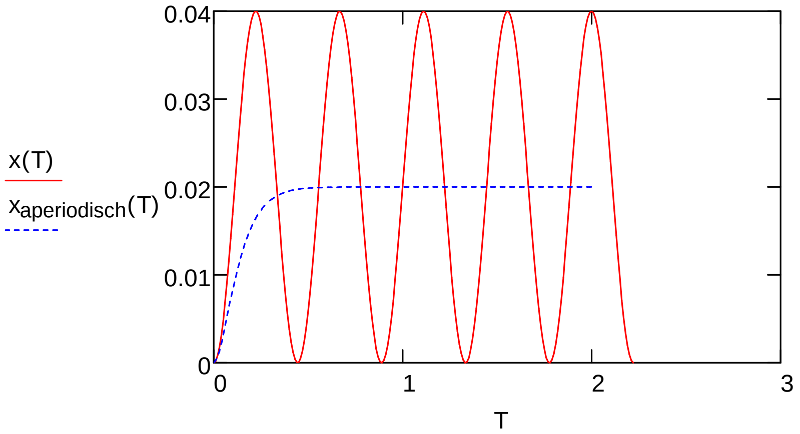


Erstellen einer Animation für unterschiedliche Dämpfung : Erklärung in Region

Es soll das Lösungsverhalten für unterschiedliche Dämpfungskonstante b (von 0 kg/s bis 18.000 kg/s mit einer Schrittweite von 150 kg/s in einer Animation demonstriert werden.

Berechnung und Animationsanleitung

Animation : Konstante Funktion als Störfunktion



$b = 0 \ \frac{kg}{s}$

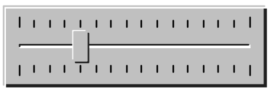
$b_{aperiodisch} = 8485 \ \frac{kg}{s}$

Fall 7: Erzwungene Schwingung durch Rütteln:

Das "Rütteln" soll hier eine sinsuförmige Störfunktion simulieren und könnte z.B. auf einem Prüfstand erfolgen

Zum Beispiel für f=2 Hz und F_max=1200 N mit den Anfangsbedingungen x(0)=0 und x'(0) = 0

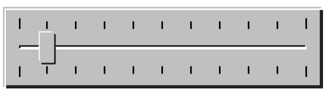
$b :=$



$b = 4024 \ \frac{kg}{s}$

$F := 1200$ N

$f :=$



$f = 1$ Hz

$f := 2.251$

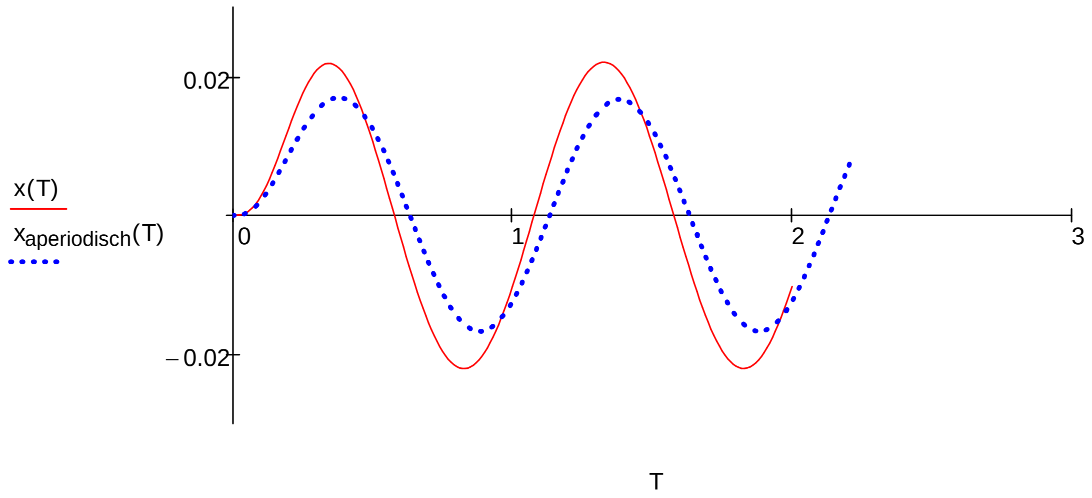
Zum Vergleich: $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$ $f_0 := \frac{\omega_0}{2\pi}$ $f_0 = 2.251$

In diesem Fall ist die Frequenz der Störfunktion (Erregerfrequenz f) gleich der Eigenfrequenz f_0

Berechnungen

Sinusschwingung als Störfunktion

$T := 0, 0.01 .. 5 \cdot T_S$



Erstellen einer Animation für unterschiedliche Dämpfung : Erklärung in Region

Es soll das Lösungsverhalten für unterschiedliche Dämpfungskonstante b (von 0 kg/s bis 27.000 kg/s mit einer Schrittweite von 150 kg/s in einer Animation demonstriert werden.

Berechnung und Animationsanleitung

$T := 0, 0.01 .. 5 \cdot T_S$

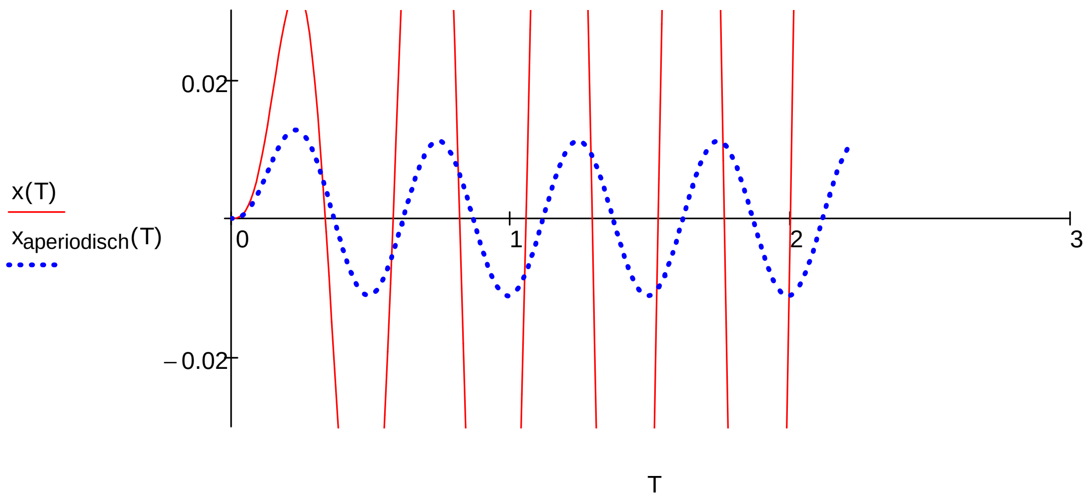
Animation : Sinusschwingung als Störfunktion

$b = 0 \quad \frac{kg}{s}$

$b_{aperiodisch} = 8485 \quad \frac{kg}{s}$

Erregerfrequenz :

$f = 2$ Hz



Die Animation liefert für einen exemplarischen Wert der Erregerfrequenz (hier voreingesetllt f=2Hz) die Ergebnisse für unterschiedliche Dämpfungskonstante b. Man sieht schön den Einfluß auf Amplitude und Phasenlage

Erstellen einer Animation für unterschiedliche Errgerfrequenzen : Erklärung in Region

Es soll das Lösungsverhalten für unterschiedliche Erregerfrequenzen f (von 0.2 Hz bis 5.2 Hz) in einer Animation demonstriert werden.

Berechnung und Animationsanleitung

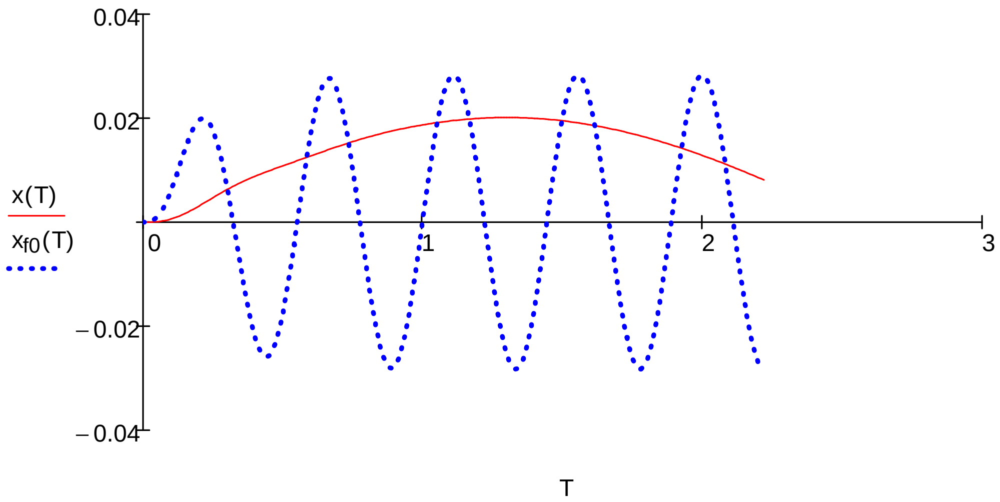
$T := 0, 0.01 .. 5 \cdot T_s$

Animation : Sinusschwingung als Störfunktion

$b = 3000 \ \frac{kg}{s}$

Erregerfrequenz : $f = 0.2$ Hz

Eigenfrequenz: $f_0 = 2.251$ Hz



Die Animation liefert für einen exemplarischen Wert der Dämpfung (hier voreingesetllt b= 3000 kg/s) die Ergebnisse für unterschiedliche Erregerfrequenzen f . Man sieht schön den Einfluß auf Amplitude und Phasenlage (speziell im Vergleich mit der Lösungskurve für den Fall f = f0)