Wilfried Rohm, HTL Saalfelden

Zur Beispielsübersicht

Ausgleichsfunktionen / Interpolation / Approximation

Führen Sie zunächst eine Begriffsklärung der obigen Begriffe durch und nennen Sie Anwendungsmöglichkeiten bzw. Aufgabengebiete.

Konkret soll anschließend folgendes Problem gelöst werden:
Eine Glühlampe stellt einen nichtlinearen Widerstand dar, d.h. ihr Widerstand ist *keine* Konstante, sondern noch vom durchflossenen Strom abhängig. Daher ist das Ohm´sche Gesetz nicht anwendbar, die Spannungs-Strom-Kennlinie U=f(I) einer Glühlampe verläuft somit nicht geradlinig, lässt sich aber annähernd durch eine kubische Funktion der Form

$$U = a \cdot I + b \cdot I^3$$

beschreiben.
Aus den nachfolgenden Daten einer Messreihe sollen die Unbekannten a und b möglichst gut ermittelt werden:

I (in A)	U (in V)
0,2	48
0,3	103
0,4	174
0,5	291
0,6	448

Warum lösen Sie dieses Problem diese Problem mit Hilfe einer Ausgleichsfunktion – Erklären Sie das Prinzip, nach dem Sie vorgehen wollen.

1) Lösen Sie das Problem durch exakte Vorgangsweise (symbolische Rechnung) **und** unter Zuhilfenahme numerischer Funktionen mit Mathcad.

2) Stellen Sie die Messdaten und die ermittelte „passende“ Funktion in einem Diagramm dar.

3) Vergleiche Sie diese Lösung mit jener, die man erzielt, wenn durch die gegebenen Punkte ein Interpolationspolynom gelegt wird. *Erklären Sie den Unterschied bzw. interpretieren Sie das Ergebnis!*

Begriffsklärung

Ausgleichsfunktion : Der Name "Ausgleich" bezieht sich darauf, dass durch die zu bestimmende Funktion der Versuch gemacht wird, die auf Grund von Messfehlern oder aus sonstigen Gründen von einer angenommenen Idealfunktion abweichende "Messpunkte" "auszugleichen". Das geschieht üblicher Weise nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate.

Interpolation / Interpolationsfunktion: Die gegebenen Punkte werden als "exakt" angesehen und es wird eine Funktion gesucht, die durch diese Punkte geht und die Berechnung von Zwischenwerten erlaubt.

Approximation: Allgemein betrachtet soll eine Approximationsfunktion eine andere Funktion annähern. Hierfür gibt es mehrere Möglichkeiten:
a) Taylorapproximation
b) Fourierapproximation
c) Approximation durch Ausgleichsfunktionen (vgl. oben)

Es wird eine Ausgleichsfunktion hier zur Lösung des Problems gewählt, weil die einzelnen Messpunkte der Messreihe mit entsprechenden Fehlern behaftet sind.
gesucht ist die Kennlinie eines nichtlinearen Widerstandes (Glühlampe)
näherungsweise kann angenommen werden: $U=f(I)=a*I^3 + b*I$ (Begründung erfolgt später)

1) Rein symbolische Rechnung

$$f(I,a,b) := a\cdot I^3 + b\cdot I$$

gesucht: optimales a,b

Fehlerfunktion

$$\text{Fehlquadrat}(a,b) := \sum_k \left(U_k - f(I_k,a,b)\right)^2$$

bzw.

$$\text{Fehlquadrat}(a,b) := \sum_k \left[U_k - \left[a\cdot (I_k)^3 + b\cdot I_k\right]\right]^2$$

Gesuchte Funktion:

Gleichungssystem: beide partiellen Ableitungen = 0 setzen:
dFehlquadrat(a,b)/da = 0 dFehlquadrat(a,b)/db=0

Meßwerte:

$$\frac{d}{da}\text{Fehlquadrat}(a,b) \rightarrow \sum_k \left[-2\cdot\left[U_k - a\cdot (I_k)^3 - b\cdot I_k\right]\cdot (I_k)^3\right]$$

$$\frac{d}{db}\text{Fehlquadrat}(a,b) \rightarrow \sum_k \left[-2\cdot\left[U_k - a\cdot (I_k)^3 - b\cdot I_k\right]\cdot I_k\right]$$

Dies ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$2\cdot\sum_k \left[\left[U_k - a\cdot (I_k)^3 - b\cdot I_k\right]\cdot\left[-(I_k)^3\right]\right] = 0 \quad \text{------->} \quad a\cdot\sum_k (I_k)^6 + b\cdot\sum_k (I_k)^4 = \sum_k \left[U_k\cdot (I_k)^3\right]$$

$$2\cdot\sum_k \left[\left[U_k - a\cdot (I_k)^3 - b\cdot I_k\right]\cdot (-I_k)\right] = 0 \quad \text{------->} \quad a\cdot\sum_k (I_k)^4 + b\cdot\sum_k (I_k)^2 = \sum_k (U_k\cdot I_k)$$

Koeffizientenmatrix K

$$K := \begin{bmatrix} \sum_k (I_k)^6 & \sum_k (I_k)^4 \\ \sum_k (I_k)^4 & \sum_k (I_k)^2 \end{bmatrix}$$

Ergebnisvektor:

$$E := \begin{bmatrix} \sum_k \left[U_k\cdot (I_k)^3\right] \\ \sum_k (U_k\cdot I_k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := K^{-1}\cdot E \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{vereinfachen} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\sum_k (I_k)^2\cdot\sum_k \left[U_k\cdot (I_k)^3\right] - \sum_k (I_k)^4\cdot\sum_k (U_k\cdot I_k)}{\sum_k (I_k)^6\cdot\sum_k (I_k)^2 - \left[\sum_k (I_k)^4\right]^2} \\ -\dfrac{\left[\sum_k (I_k)^4\cdot\sum_k \left[U_k\cdot (I_k)^3\right] - \sum_k (I_k)^6\cdot\sum_k (U_k\cdot I_k)\right]}{\sum_k (I_k)^6\cdot\sum_k (I_k)^2 - \left[\sum_k (I_k)^4\right]^2} \end{bmatrix}$$

Gleichungssystem von oben mit den speziellen Werten

$k := 0..4 \qquad I_k := \qquad U_k :=$

I_k	U_k
0.2	48
0.3	103
0.4	174
0.5	291
0.6	448

Koeffizientenmatrix K

$$K := \begin{bmatrix} \sum_k (I_k)^6 & \sum_k (I_k)^4 \\ \sum_k (I_k)^4 & \sum_k (I_k)^2 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0.067 & 0.227 \\ 0.227 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Ergebnisvektor:

$$E := \begin{bmatrix} \sum_k \left[U_k \cdot (I_k)^3 \right] \\ \sum_k (U_k \cdot I_k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := K^{-1} \cdot E \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.539 \times 10^3 \\ 193.907 \end{pmatrix}$$

Numerische Lösung über die Funktion "minfehl"

$$\mathrm{Fehlquadrat}(a,b) := \sum_k \left(U_k - f(I_k, a, b)\right)^2$$

Gauß-Prinzip !!!!
Fehlerquadrate sollen minimal werden .

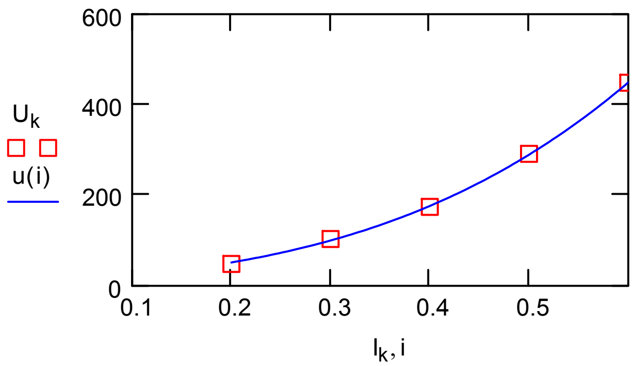
$a := 1 \qquad b := 1$ Anfangswerte für den Lösungsblock

Vorgabe
$\mathrm{Fehlquadrat}(a,b) = 0$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \mathrm{Minfehl}(a,b) \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.539 \times 10^3 \\ 193.907 \end{pmatrix}$$

$u(i) := a \cdot i^3 + b \cdot i$ Das ist die gesuchte Ausgleichsfunktion aqls spezielles kubisches Polynom

$$i := \min(I), \min(I) + \frac{\max(I) - \min(I)}{100} .. \max(I)$$



$$I = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad u(I) = \begin{pmatrix} 51.09 \\ 99.715 \\ 176.035 \\ 289.282 \\ 448.688 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 48 \\ 103 \\ 174 \\ 291 \\ 448 \end{pmatrix}$$

Vergleich zwischen den Ausgangswerten und den Werten der Ausgleichsfunktion

3) Bestimmmung des Interpolationspolynoms - Vergleich:

$p := p \quad q := q \quad r := r \quad s := s \quad t := t$

Interpolationsfunktion : durch die 5 punkte wird eine Polynomfunktion 4.Grades gelegt!

$$yp(x,p,q,r,s,t) := p \cdot x^4 + q \cdot x^3 + r \cdot x^2 + s \cdot x + t$$

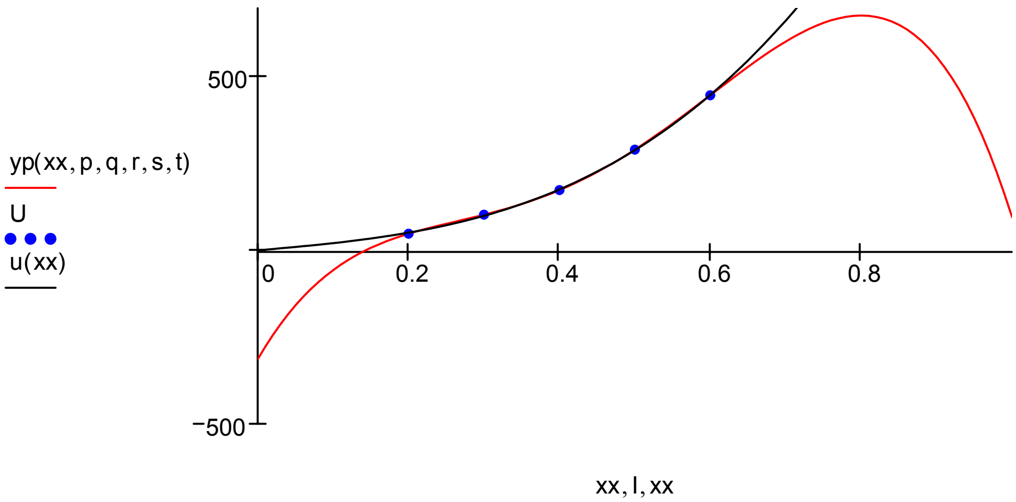
$p := 1 \quad q := 1 \quad r := 1 \quad s := 1 \quad t := 1$

Vorgabe

$$U_0 = yp(I_0, p, q, r, s, t)$$
$$U_1 = yp(I_1, p, q, r, s, t)$$
$$U_2 = yp(I_2, p, q, r, s, t)$$
$$U_3 = yp(I_3, p, q, r, s, t)$$
$$U_4 = yp(I_4, p, q, r, s, t)$$

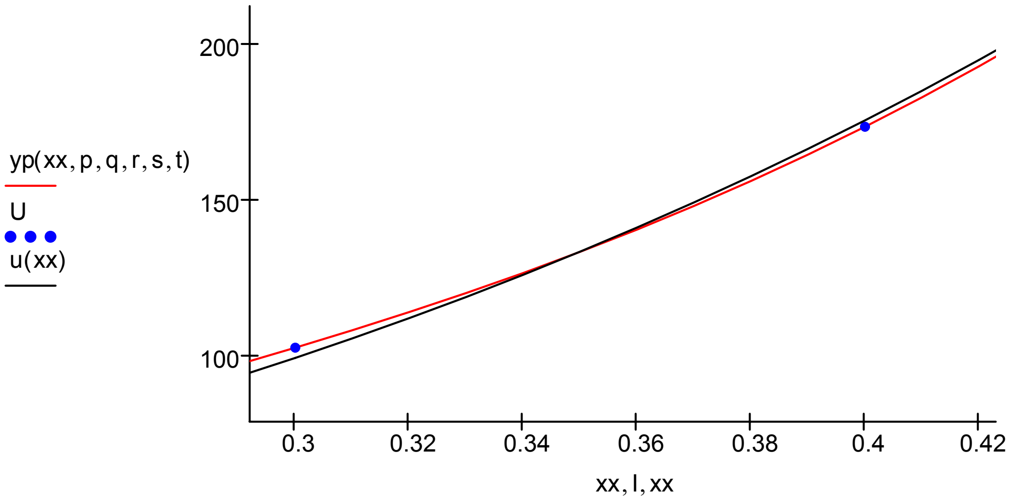
$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} := \text{Suchen}(p, q, r, s, t) \qquad \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \times 10^4 \\ 2.6 \times 10^4 \\ -1.435 \times 10^4 \\ 3.76 \times 10^3 \\ -314 \end{pmatrix}$$

$xx := 0, 0.01 .. 1$



Vergleich und Interpretation:

Interpolationsfunktion und Ausgleichsfunktion zeigen im Bereich der gebenenen Punkte nahezu das gleiche Verhalten. Kleine Unterschiede werden optisch erst deutlich, wenn man die Zeichnung per Zoom im Bereich dieser Punkte vergrößert.



Allerdings kommt es außerhalb dieser Punkte (also bei einer Extrapolation) zu einem "Absturz" der Interpolationskurve. Dies liegt daran, dass die geraden Hochzahlen des interpolationspolynoms NEGATIVE Koeffizienten haben - dadurch gelangen wir sogar in den negativen Bereich!
Dies begründet auch im nachhinein, warum die Wahl der Ausgleichsfunktion auf diese Potenzen "verzichten" kann!

Zur Beispielsübersicht