Arbeitsblatt zu AFFINE ABBILDUNGEN / Computergrafik

Allgemein: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

Spiegelung an der x-Achse / y-Achse $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Punktspiegelung am Ursprung: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Verzerrung nur in x-Richtung: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Verzerrung nur in x UND y- Richtung $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

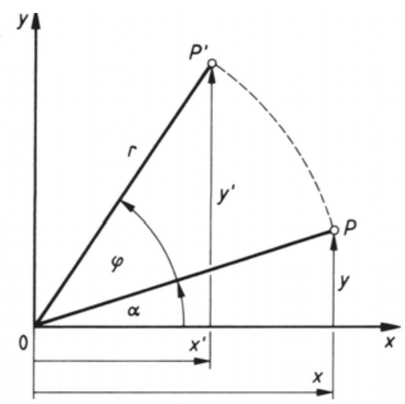
____________________________ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

_______________ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ _______________ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

<u>Drehung um den Koordinaten-Nullpunkt (um Winkel φ)</u>

(Leite die folgende Transformationsformel aus der Skizze her)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Im Prinzip ähnlich verlaufen Abbildungen im Raum, z.B. die Drehung eines Körpers im Raum *allein um die x-Achse*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Wilfried Rohm, HTL Saalfelden, 2002

Lösungen zum Arbeitsblatt AFFINE ABBILDUNGEN

Allgemein: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $x' = a_{11} \cdot x + a_{21} \cdot y$

$y' = a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y$

Spiegelung an der x-Achse / y-Achse $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Punktspiegelung am Ursprung: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Verzerrung nur in x-Richtung: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (Maßstabsänderung nur in x-Richtung)

Verzerrung nur in x UND y- Richtung $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (Maßstabsänderung in x- und y-Richtung)

Scherung in x bzw. y-Richtung $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Spiegelung an der Mediane $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Drehung um $+90^0$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Drehung um den Koordinaten-Nullpunkt (um Winkel φ)

(Leite die Transformationsformel aus der Skizze her)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

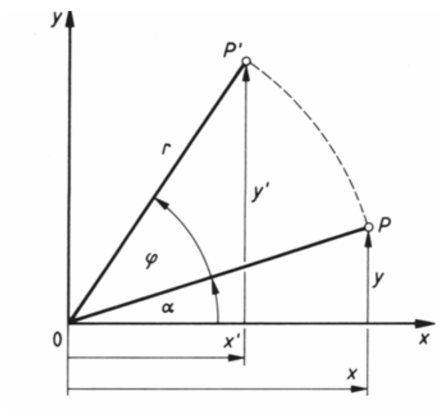
$x' = r\cos(\alpha+\varphi) = r\,[\cos(\alpha)\cos(\varphi) - \sin(\alpha)\sin(\varphi)] =$

$= r\cos(\alpha)\cos(\varphi) - r\sin(\alpha)\sin(\varphi) =$

$= x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi)$

Analog mit y'

Anschließender Vergleich mit der ausgerechneten Matrizengleichung bestätigt die Übereinstimmung



Im Prinzip ähnlich verlaufen Abbildungen im Raum, z.B. die Drehung eines Körpers im Raum *allein um die x-Achse*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Wilfried Rohm, HTL Saalfelden, 2002