Wilfried Rohm wilfried.rohm@schule.at

SRDP Haupttermin 2017, alle Aufgaben aus dem Aufgabenteil B

Hier werden die Lösungen der standardisierten Reifeprüfungsaufgaben 2017 (Haupttermin) für den Teil B an den Höheren Technischen Lehranstalten Österreichs unter Verwendung von Mathcad-Prime vorgeführt. Diese Aufgaben wurden zentral vom Bundesministerium für Bildung gestellt.
Bezüglich der Aufgabenstellungen siehe auch: https://www.srdp.at/downloads/

Es wird (fast überall) bei den vorgestellten Lösungen über die gestellte Aufgabenstellung hinausgegangen. Dies deswegen, um der Bedeutung dieser Aufgaben für den Einsatz im Unterricht besser gerecht zu werden.
In vielen Fällen werden mehrere Lösungswege aufgezeigt (teils auch unter Verwendung verschiedener Methoden von Mathcad)

AUFGABE: "Leistungsdiagnostik im Sport" (Cluster 1, 2, 3, 4, 5)

Aufgabe 6 (Teil B)

Leistungsdiagnostik im Sport

Bei höherer Belastung benötigt der Körper mehr Sauerstoff und produziert als „Abfallprodukt" Laktat.

Ab einer gewissen Laktatkonzentration ist das Herz-Kreislauf-System nicht mehr in der Lage, die arbeitenden Muskeln mit genügend Sauerstoff zu versorgen. Diese Laktatkonzentration heißt *anaerobe Schwelle*.

a) Für einen bestimmten Sportler kann die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beim Laufen näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = 0{,}0461 \cdot e^{0{,}29 \cdot x} + 0{,}9$

x ... Geschwindigkeit beim Laufen in Kilometern pro Stunde (km/h)
$f(x)$ ... Laktatkonzentration bei der Geschwindigkeit x in Millimol pro Liter Blut (mmol/L)

Erreicht die Laktatkonzentration die anaerobe Schwelle, so beträgt der Steigungswinkel von f an dieser Stelle 45°.

– Bestimmen Sie die anaerobe Schwelle dieses Sportlers. *[1 Punkt]*

b) Bei einem bestimmten Sportler wird die Herzschlagfrequenz in Abhängigkeit von der Laufgeschwindigkeit bestimmt:

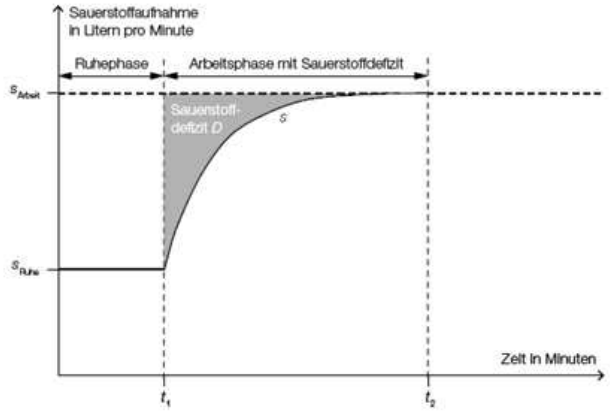
Laufgeschwindigkeit in Kilometern pro Stunde	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5
Herzschlagfrequenz in min^{-1}	140	150	162	168	175	182	190	200

Die Herzschlagfrequenz in Abhängigkeit von der Laufgeschwindigkeit soll mithilfe einer linearen Ausgleichsfunktion beschrieben werden.

– Bestimmen Sie eine Gleichung dieser linearen Ausgleichsfunktion. *[1 Punkt]*

Nur nichtkommerzielle Verwendung

c) Nach Beginn einer körperlichen Belastung beim Sport (Arbeitsphase) passt sich das Atmungssystem nur verzögert dem erhöhten Sauerstoffbedarf an. Erst nach einigen Minuten wird eine ausreichende Versorgung erreicht. Bis dahin kommt es zu einem Sauerstoffdefizit.



– Stellen Sie eine Formel auf, mit der man das Sauerstoffdefizit D (grau markierte Fläche in obiger Skizze) berechnen kann, wenn eine Gleichung der Funktion s bekannt ist.

$D =$ _____ *[1 Punkt]*

– Geben Sie die Einheit von D an. *[1 Punkt]*

d) Das Absinken der Sauerstoffaufnahme nach Beendigung einer körperlichen Belastung beim Sport kann mit der folgenden Differenzialgleichung beschrieben werden:

$\frac{dy}{dt} = -1{,}386 \cdot (y - 0{,}3)$

t ... Zeit nach Beendigung der körperlichen Belastung in Minuten (min)

$y(t)$ ... Sauerstoffaufnahme zur Zeit t in Litern pro Minute (L/min)

– Lösen Sie diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. *[1 Punkt]*

LÖSUNG: Aufgabe "Leistungsdiagnostik im Sport"

Aufgabenteil a)

$$f(x) := 0.0461 \cdot e^{0.29 \cdot x} + 0.9$$

Bestimmung der anaeroben Schwelle des Sportlers: $\tan(45°) = 1$

$$x_{anaerob} := \frac{d}{dx} f(x) = 1 \xrightarrow[float,3]{solve,x} 14.9$$

Bei einer Geschwindigkeit von 14.9 km/h wird die anerobe Schwelle erreicht

$f(x_{anaerob}) = 4.37$ Bei 4.37 mmol/L ist die anaerobe Schwelle des Sportlers

Aufgabenteil b)

Dieser Aufgabenteil soll hier auf zwei Arten vorgeführt werden, die sich in erster Linie durch das Verwenden von Einheiten bzw. keinen Einheiten im Berechnungsvorgang unterscheiden. Dadurch kann jeder selbst die Vor- bzw. Nachteile der beiden Methoden erkennen.

Zunächst OHNE die explizite Verwendung von Einheiten:

Nur nichtkommerzielle Verwendung

$$Geschwindigkeit := \begin{bmatrix} 11 \\ 11.5 \\ 12 \\ 12.5 \\ 13 \\ 13.5 \\ 14 \\ 14.5 \end{bmatrix} \qquad Frequenz := \begin{bmatrix} 140 \\ 150 \\ 162 \\ 168 \\ 175 \\ 182 \\ 190 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Eingabe der Werte über den Menüpunkt "Matrix einfügen"

$$\begin{bmatrix} d \\ k \end{bmatrix} := \text{line}\left(Geschwindigkeit, Frequenz\right) = \begin{bmatrix} -37.679 \\ 16.357 \end{bmatrix}$$

$$gerade(x) := k \cdot x + d \qquad d = -37.679 \qquad k = 16.357$$

$$gerade(x) \xrightarrow{float, 3} 16.4 \cdot x - 37.7$$

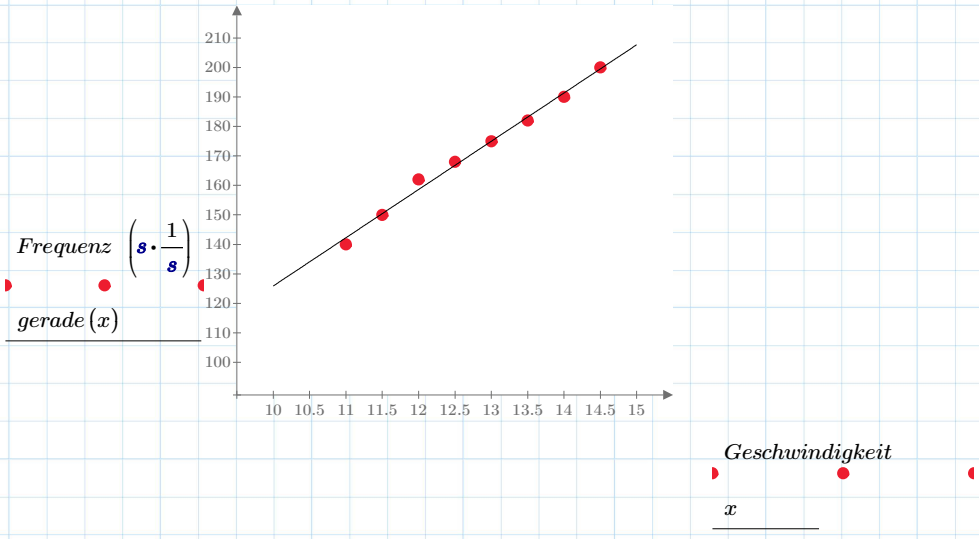
Alternativ können auch vordefinierte Funktionen für Steigung und Achsenabschnitt der Ausgleichsgerade verwendet werden:

$$k := \text{slope}\left(Geschwindigkeit, Frequenz\right) = 16.357$$

Welche Einheiten ???

$$d := \text{intercept}\left(Geschwindigkeit, Frequenz\right) = -37.679$$

zeichnerische Darstellung:



Nun soll die gleiche Aufgabe unter konsequenter Verwendung von Einheiten gelöst werden. Dabei ist zu beachten, dass die Standardfunktionen immer die Werte in SI-Einheiten zurückgeben, welche aber in die gewünschten Einheiten (hier km/h und 1/min) umgerechnet werden können:

Nur nichtkommerzielle Verwendung

$Geschwindigkeit$ $\left(\frac{km}{hr}\right)$	$Frequenz$ $\left(\frac{1}{min}\right)$
11	140
11.5	150
12	162
12.5	168
13	175
13.5	182
14	190
14.5	200

Eingabe der Werte (samt Einheiten) über den Menüpunkt "Tabelle einfügen"

$$\begin{bmatrix} d \\ k \end{bmatrix} := \text{line}(Geschwindigkeit, Frequenz) = \begin{bmatrix} -0.628 \ \frac{1}{s} \\ 0.981 \ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Ausgabe in SI-Einheiten

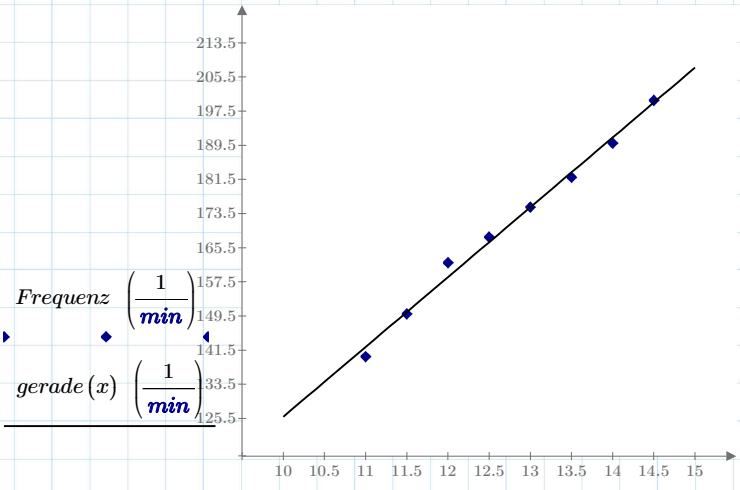
$$d = -37.679 \ \frac{1}{min} \qquad k = 0.981 \ \frac{1}{m} \qquad k = 16.357 \ \frac{\frac{1}{min}}{\frac{km}{hr}}$$

Umrechnung in gewünschte Einheit - vergleiche mit obiger Variante!

$$gerade(x) := k \cdot x + d$$

$$x := 10 \cdot \frac{km}{hr}, 10.1 \cdot \frac{km}{hr} .. 15 \cdot \frac{km}{hr}$$

Die Variable x muß bereichsmäßig mit den entsprechenden Einheiten fixiert werden.



$Geschwindigkeit$ $\left(\frac{km}{hr}\right)$

x $\left(\frac{km}{hr}\right)$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Aufgabenteil c)

$$D = s_{Arbeit} \cdot (t_2 - t_1) - \int_{t_1}^{t_2} s(t)\,\mathrm{d}t$$

Die Einheit von D ist $min \cdot \frac{L}{min} = 1\ L$

Überlegung dazu: D ist eine Fläche im gegebenen Koordinatensystem. Deswegen ergibt sich der Fläche aus: Einheit auf der Abszisse * Einheit auf der Ordinate

Aufgabenteil d)

Die Differentialgleichung $\frac{dy}{dt} = -1.386 \cdot (y - 0.3)$ soll mit der Methode "Trennen der Variablen" gelöst werden:

$$\frac{dy}{dt} = -1.386 \cdot (y - 0.3)$$

$$\frac{dy}{y - 0.3} = -1.386\ dt$$

"Trennen der Variablen", um getrennt links und rechts integrieren zu können

$$\int \frac{1}{y - 0.3}\,\mathrm{d}y \rightarrow \ln(y - 0.3) \qquad \int -1.386\,\mathrm{d}t \rightarrow -1.386 \cdot t$$

$$\ln(y - 0.3) = -1.386 \cdot t + C_1 \xrightarrow{solve,\,y} e^{C_1 - 1.386 \cdot t} + 0.3$$

Die Gleichung nach y auflösen und die Integrationskonstante berücksichtigen

$$y = C \cdot e^{-1.386 \cdot t} + 0.3$$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

AUFGABE: "Prismen und Linsen" (Cluster 1, 2, 3, 4, 5)

Aufgabe 8 (Teil B)

Prismen und Linsen

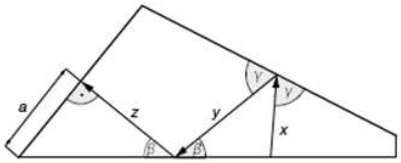
Der Verlauf eines Lichtstrahls durch ein Glasprisma wird als *Strahlengang* bezeichnet.

a) In einem Spezialglas beträgt die Lichtgeschwindigkeit 205 337 300 m/s.

In einem aus diesem Glas gefertigten Prisma beträgt die Länge des Strahlengangs 5 cm.

– Berechnen Sie, wie viele Sekunden es dauert, bis ein Lichtstrahl dieses Prisma durchquert hat. *[1 Punkt]*

b) Ein Strahlengang durch ein Glasprisma einer Filmkamera kann folgendermaßen dargestellt werden:



Hinweis: Die Skizze ist nicht maßstabgetreu!

$a = 0{,}50$ cm
$x = 0{,}55$ cm
$\beta = 40°$
$\gamma = 68°$

– Berechnen Sie die Länge $x + y + z$ des Strahlengangs. *[3 Punkte]*

c) Bei der Abbildung eines Gegenstands mithilfe einer Sammellinse gelten folgende Beziehungen:

$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ und $b = \frac{g \cdot f}{g - f}$

B ... Höhe des Bildes
G ... Höhe des Gegenstands
b ... Abstand des Bildes von der Linse
g ... Abstand des Gegenstands von der Linse
f ... Brennweite der Linse

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

Wenn $g = 3 \cdot f$ gilt, dann ist B größer als G.	☐
Wenn $g = 3 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist B kleiner als G.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist B größer als G.	☐

d) Ein Unternehmen fertigt Linsen aus Glas für industrielle Anwendungen. Die Dicke spezieller Linsen (gemessen in der Linsenmitte) erweist sich als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ:

$\mu = 12{,}000$ mm
$\sigma = 0{,}060$ mm

– Berechnen Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem die Dicke einer zufällig ausgewählten Linse mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt. *[1 Punkt]*

Eine Linse erreicht Präzisionsqualität, wenn die Abweichung vom Erwartungswert nicht mehr als ±0,040 mm beträgt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Linse Präzisionsqualität hat. *[1 Punkt]*

Nur nichtkommerzielle Verwendung

LÖSUNG: Aufgabe "Prismen und Linsen"

Teilaufgabe a)

$c := 205337300 \ \frac{m}{s}$ $l := 5 \ cm$

Aus $s = v \cdot t$ folgt: $t = \frac{s}{v}$ $t_0 := \frac{l}{c} = 0 \ s$ Dies ist die gesuchte Zeit

Teilaufgabe b)

$a := 0.5 \ cm$ $x := 0.55 \ cm$ $\beta := 40°$ $\gamma := 68°$

Die Seite z kann aus einem rechtwinkeligen Dreieck ermittelt werden:

$z := \tan(\beta) = \frac{a}{z} \xrightarrow{solve, z} \frac{0.5 \cdot cm}{\tan(40.0 \cdot deg)}$ $z = 0.596 \ cm$

Die Seite y wird mit dem Sinussatz ermittelt:

$y := \frac{x}{\sin(\beta)} = \frac{y}{\sin(180° - \beta - (180° - 2\,\gamma))} \xrightarrow{solve, y} \frac{0.55 \cdot cm \cdot \sin(96.0 \cdot deg)}{\sin(40.0 \cdot deg)}$

$y = 0.851 \ cm$

$x + y + z = 1.997 \ cm$ Die Länge des Strahlenganges beträgt somit etwa 2 cm

Teilaufgabe c)

Zur Lösung dieser MC-Aufgabe wird in den rechten und anschließend in den linken Ausdruck der angegebene Wert für g eingegeben.

$\mathbf{clear}(f, b)$

Hinweis: Mit "clear" werden die weiter oben definierten Größen für f und b gelöscht, was sonst die neue Verwendung im Folgenden für symbolische Rechnungen verunmöglichen würde. Wäre natürlich bei einem "neuen" Dokument nicht erforderlich.

$b = \frac{g \cdot f}{g - f} \xrightarrow{substitute, g = 3\,f} b = \frac{3 \cdot f}{2}$

$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \xrightarrow[substitute, b = \frac{3\,f}{2}]{substitute, g = 3\,f} \frac{B}{G} = \frac{1}{2}$

Daraus folgt: Keine der beiden angegebenen Folgerungen ("B größer als G" und "B=G") kann richtig sein.

Nur nichtkommerzielle Verwendung

$$b = \frac{g \cdot f}{g - f} \xrightarrow{substitute,\, g = 2\ f} b = 2 \cdot f$$

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \xrightarrow[substitute,\, b = 2\ f]{substitute,\, g = 2\ f} \frac{B}{G} = 1$$

Daraus folgt: Richtig ist die Folgerung B=G

Teilaufgabe d) Anmerkung: Alle Angaben und Ergebnisse beziehen sich auf mm. Es wird ohne Einheiten gerechnet, weil die Funktionen *dnorm* und *pnorm* mit Einheiten bei der Angabe von μ und σ nicht funktionieren!

$\mu := 12$ $\sigma := 0.06$

Variante 1: $x_{un} := \mu - \text{qnorm}(0.95, 0, 1) \cdot \sigma = 11.901$

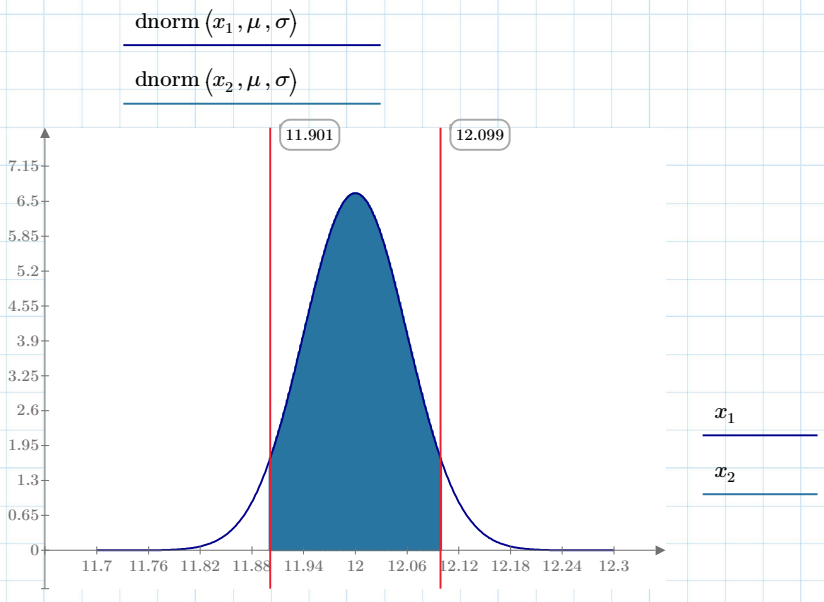
$x_{ob} := \mu + \text{qnorm}(0.95, 0, 1) \cdot \sigma = 12.099$

Variante 2: $x_{un} := \text{qnorm}(0.05, \mu, \sigma) = 11.901$

$x_{ob} := \text{qnorm}(0.95, \mu, \sigma) = 12.099$

Grafische Veranschaulichung: Der schraffierte Bereich hat eine Fläche von 0.90, die roten Linien markieren die Grenzen des gesuchten 90%-Zufallsstreubereiches

$$x_2 := x_{un}, x_{un} + \frac{x_{ob} - x_{un}}{100} .. x_{ob}$$



- Ermittlung der Wahrscheinlichkeit für Präzisionsqualität:

$abweichung := 0.04$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

$$p_{präzision} := \text{pnorm}(\mu + abweichung, \mu, \sigma) - \text{pnorm}(\mu - abweichung, \mu, \sigma) = 0.495$$

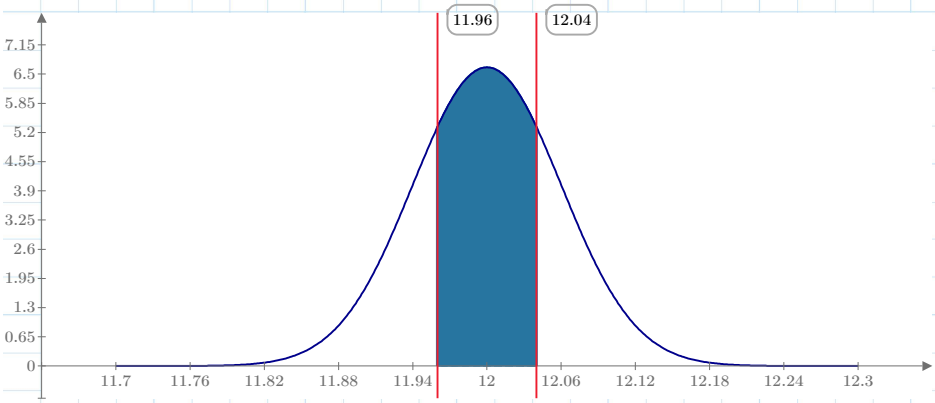
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt damit rund 50%.

Grafische Veranschaulichung: Der schraffierte Bereich umfasst eine Fläche von 0.495 und gibt damit die Wahrscheinlichkeit für die Präzisionsqualität anschaulich an.

$$x_2 := \mu - abweichung, \mu - abweichung + \frac{2 \cdot abweichung}{100} .. \mu + abweichung$$

$\text{dnorm}(x_1, \mu, \sigma)$

$\text{dnorm}(x_2, \mu, \sigma)$



x_1

x_2

Nur nichtkommerzielle Verwendung

AUFGABE: "Sinkende Kugeln" (Cluster 2, 3, 4, 5)

Aufgabe 9 (Teil B)

Sinkende Kugeln

Die Sinkgeschwindigkeit einer in einer Flüssigkeit sinkenden Metallkugel kann durch eine Funktion v beschrieben werden:

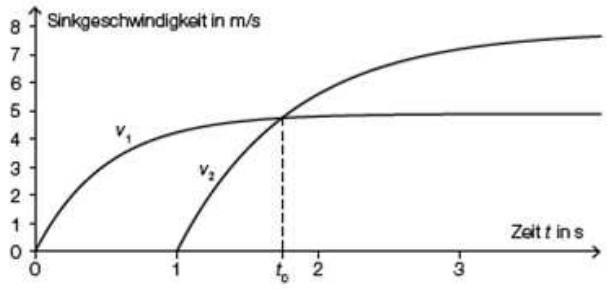
$v(t) = g \cdot \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit ab Beginn des Sinkens in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)
τ ... Zeitkonstante in s mit $\tau > 0$
g ... Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s^2)

a) – Begründen Sie mathematisch, warum die Sinkgeschwindigkeit ständig zunimmt. *[1 Punkt]*

b) Eine Kugel K_2 beginnt 1 Sekunde nach einer Kugel K_1 zu sinken.

In der nachstehenden Grafik sind die Sinkgeschwindigkeit v_1 der Kugel K_1 und die Sinkgeschwindigkeit v_2 der Kugel K_2 dargestellt. Die Zeitkonstante der Sinkgeschwindigkeit v_2 beträgt $\tau_2 = 0{,}8$ s.



– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion v_2 für $t \geq 1$. *[1 Punkt]*

Zum Zeitpunkt t_0 ist die Beschleunigung der Kugel K_2 größer als die Beschleunigung der Kugel K_1.

– Beschreiben Sie, wie man dies in der obigen Grafik erkennen kann. *[1 Punkt]*

c) Die Sinkgeschwindigkeit einer bestimmten Kugel kann durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = g \cdot 0{,}25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}25}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit ab Beginn des Sinkens in s
$v(t)$ ... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

– Berechnen Sie denjenigen Weg, den die Kugel in der ersten Sekunde zurücklegt. *[1 Punkt]*

Im Zeitintervall $[0; t_1]$ legt die Kugel einen Weg von 8 m zurück.

– Bestimmen Sie die Zeit t_1. *[1 Punkt]*

Nur nichtkommerzielle Verwendung

LÖSUNG: Aufgabe "Sinkende Kugeln"

Aufgabenteil a)

Für die Ableitung der Funktion $v(t) := g \cdot \tau \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$ gilt:

$$v'(t) \rightarrow g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- g ist die Erdbeschleunigung, also positiv.
- Der Ausdruck $e^{-\frac{t}{\tau}}$ ist ebenfalls immer positiv.
- Wenn aber die Ableitung der Funktion immer positiv ist, muß die Steigung der Tangente an jeden Punkt der Funktion immer positiv sein - das bedeutet aber, dass die Funktion steigend ist, also nimmt die Sinkgeschwindigkeit immer zu!

Aufgabenteil b)

$$v_2(t) = g \cdot \tau_2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-1}{\tau_2}}\right) = g \cdot 0.8 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-1}{0.8}}\right)$$

Begründung: Die Funktion $v_2(t)$ entsteht aus der gegebenen Funktion v(t) durch Verschiebung der Funktion um 1 nach rechts und durch Einsetzen des gegebenen Wertes für τ.

Zum Zeitpunkt t_0 ist die Beschleunigung der Kugel K_2 ist größer als jene der Kugel K_1, weil:

- Für die Beschleunigung gilt (aus der Physik) $a(t) = v'(t)$.
- Die 1.Ableitung einer Funktion entspricht der Steigung der Tangente
- Die Steigung der Tangente ist für die Funktion $v_2(t)$ im Punkt t_0 größer als für die Funktion $v_1(t)$

Aufgabenteil c)

$$v(t) := 9.81 \cdot 0.25 \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{0.25}}\right)$$

Anmerkung: Es wurde zur Vereinfachung gleich in die Angabe der gegebene Wert für die Erdbeschleunigung g eingesetzt

Da die Geschwindigkeitsfunktion die Ableitung der Funktion des Weges nach der Zeit entspricht, gilt "umgekehrt":

$$s(t_1) := \int_0^{t_1} v(t)\,dt \qquad s(1) \xrightarrow{float,3} 1.85$$

Der zurückgelegte Weg nach 1 Sekunde beträgt daher 1.85 m

Um die Zeit t zu ermitteln, in der 8 m zurückgelegt werden, setzen wir eine entsprechende Gleichung an und versuchen sie zu lösen.

$$s(t_1) = 8 \xrightarrow[float,3]{solve,t_1} 3.51$$

Dieses Ergebnis sagt aus, dass nach ca. 3.5 s acht Meter zurückgelegt wurden.

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Längere Anmerkung: Die Lösung dieser Gleichung soll im Folgenden noch kritisch durchleuchtet werden. Wie noch demonstriert wird, liegt hier eine transzendente Gleichung vor. Derartige Gleichungen sind NICHT symbolisch lösbar. Mathcad verwendet hier die Lambertsche W-Funktion, um die Lösung der Gleichung trotzdem symbolisch darstellen zu können. Die Lambertsche W-Funktion ist als Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ definiert. Sie hat zwei "Funktionsäste", welche mit den 2 Lösungen korrespondiert, welche eine entsprechende Gleichung bei nummerischer Lösung besitzt (Näheres dazu: siehe WIKIPEDIA unter dem Stichwort *Lambertsche W-Funktion*).
Zunächst wird gezeigt, dass man 2 nummerische Lösungen der obigen Gleichung tatsächlich erhalten kann:

Da gilt: $s(t_1) \xrightarrow{float,3} 2.45 \cdot t_1 + 0.613 \cdot e^{-4.0 \cdot t_1} - 0.613$
ist die transzendente Gleichung $2.45 \cdot t_1 + 0.613 \cdot e^{-4.0 \cdot t_1} - 0.613 = 8$
nach t_1 aufzulösen.

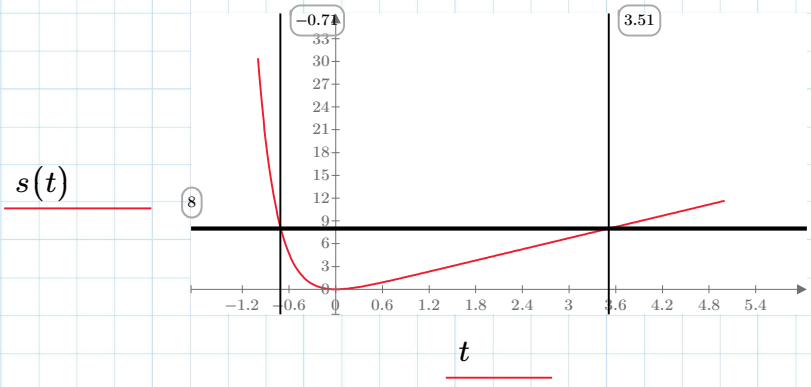
$$2.4525 \cdot t_1 + 0.613125 \cdot e^{-4.0 \cdot t_1} - 0.613125 = 8 \xrightarrow[float,3]{solve,t_1} 3.51$$

Wir erhalten also die gleiche Lösung wie oben - bei nummerischer Angabe wählt Mathcad wie oben jenen Zweig der LambertW-Funktion aus, der eine positive Lösung (für t_1) liefert. Beide Lösungen erhalten wir bei Verwendung unterschiedlicher Startwerte bei der nummerischen Lösung mit Hilfe des Lösungsblockes:

Gleichung schreiben | Startwerte
$t_1 := 1$
$s(t_1) = 8$
find $(t_1) = 3.512$

Gleichung schreiben | Startwerte
$t_1 := -1$
$s(t_1) = 8$
find $(t_1) = -0.706$

Wir zeigen nun grafisch die 2 Lösungen der Gleichung. Dazu stellen wir die Funktion s(t) dar und untersuchen, für welche t diese den Wert 8 ergibt. Wir ignorieren dazu aber die Vorgabe aus der Angabe, dass $t \geq 0$ zu gelten hat.



Nur nichtkommerzielle Verwendung

Man sieht, dass beide nummerisch ermittelten Werte die Gleichung $s(t) = 8$ erfüllen!

Im Folgenden noch die rein symbolische Vorgangsweise, spezielle Werte werden erst zum Schluß eingesetzt:

$$v(t) := g \cdot \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$s(t_1) := \int_0^{t_1} v(t)\,dt \qquad s(t_1) \rightarrow g \cdot \tau \cdot t_1 + g \cdot \tau^2 \cdot \left(e^{-\frac{t_1}{\tau}} - 1\right)$$

Nun die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$t_1 := s(t_1) = s_0 \xrightarrow{solve,\, t_1} \tau + \tau \cdot LambertW\left(-e^{-\left(\frac{1}{\tau} \cdot \left(\tau + \frac{\frac{1}{g}}{\tau} \cdot s_0\right)\right)}\right) + \frac{s_0}{g \cdot \tau}$$

$$t_1 \xrightarrow{\begin{array}{l} substitute,\, \tau = 0.25 \\ substitute,\, s_0 = 8 \\ substitute,\, g = 9.81 \\ float,\, 3 \end{array}} 3.51$$

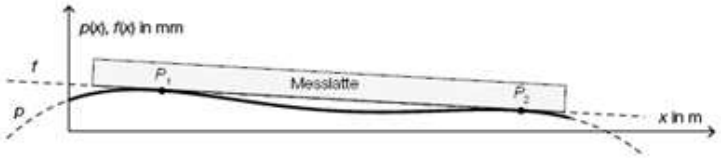
Das ist die gleiche Lösung wie oben. Wie sehen an diesem Beispiel ein wenig, wie Mathcad intern derartige Gleichungen bearbeitet bzw. löst.

Nur nichtkommerzielle Verwendung

AUFGABE: "Bodenunebenheiten" (Cluster 1, 4, 5)

Bodenunebenheiten

Um Unebenheiten eines Bodens festzustellen, wird eine Messlatte verwendet.



Das Profil des Bodens kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion p beschrieben werden, die Unterkante der Messlatte kann durch den Graphen einer linearen Funktion f beschrieben werden.

a) Die Messlatte berührt den Boden in den Punkten $P_1 = (x_1|p(x_1))$ und $P_2 = (x_2|p(x_2))$. Die Steigung der linearen Funktion f ist k.

Eine der folgenden Aussagen stimmt nicht mit der obigen Abbildung überein.

– Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

$k = \frac{p(x_2) - p(x_1)}{x_2 - x_1}$	☐
$p'(x_1) = 0$	☐
$p'(x_2) = k$	☐
$p'(x_1) = p'(x_2)$	☐
$f(x_1) = p(x_1)$	☐

b) – Begründen Sie, warum der Grad der in der obigen Abbildung dargestellten Polynomfunktion p größer oder gleich 4 sein muss. *[1 Punkt]*

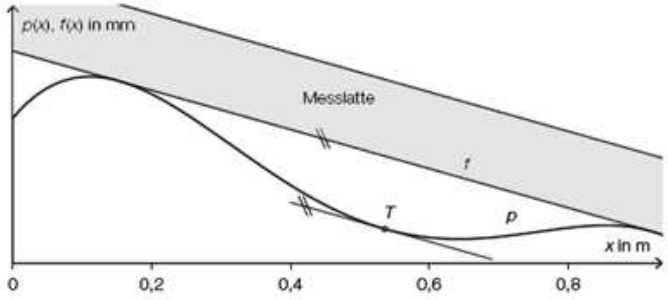
c) Der Graph der Polynomfunktion p mit $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ verläuft durch die folgenden 5 Punkte:

$A = (0|1{,}8)$, $B = (0{,}25|2{,}1)$, $C = (0{,}5|0{,}4)$, $D = (0{,}75|0{,}7)$, $E = (1|0{,}5)$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$ ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion p auf. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion p. *[1 Punkt]*

d) Um die Unebenheit eines anderen Bodens zu ermitteln, soll der Punkt T bestimmt werden. Im Punkt T ist die Tangente an den Graphen von p parallel zur Geraden f (siehe nachstehende Skizze).



Nur nichtkommerzielle Verwendung

Es gilt:

$p(x) = -70{,}000 \cdot x^4 + 150{,}000 \cdot x^3 - 100{,}000 \cdot x^2 + 17{,}000 \cdot x + 3{,}000$
$f(x) = -4{,}046 \cdot x + 4{,}378$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$, $f(x)$ ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

– Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die x-Koordinate des Punktes T berechnet werden kann. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes T. *[1 Punkt]*

LÖSUNG: Aufgabe "Bodenunebenheiten"

Teilaufgabe a)

$k = \frac{p(x_2) - p(x_1)}{x_2 - x_1}$ Das ist die Steigung der linearen Funktion f - richtig.

$p'(x_1) = 0$ Das würde bedeuten, dass die Polynomfunktion f im Punkt P1 eine waagrechte Tangente besitzt - das stimmt eindeutig NICHT mit der Skizze überein! Daher ist das die nichtzutreffende Aussage.

$p'(x_1) = p'(x_2) = k$ Die Messlatte und damit die lineare Funktion f sind sowohl im Punkt P1 als auch im Punkt P2 tangential zur Polynomfunktion p - richtig.

$f(x_1) = p(x_1)$ Die Funktionen f und p haben den Punkt P1 gemeinsam - richtig.

Teilaufgabe b)

Einige mögliche Antworten sind:

- Die Funktion p besitzt mindestens 2 Wendepunkte
- Die Funktion p besitzt mindestens 3 lokale Extremwerte
- Die Funktion p hat mit einer geeignet gewählten Gerade 4 Schnittpunkte.

Die angeführten Punkte erfordern jeweils eine Polynomfunktion vom $Grad \geq 4$

Teilaufgabe c) $\mathbf{clear}(a,b,c,d,e)$ Oben verwendete Variablen löschen

$p(x,a,b,c,d,e) := a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

Durch Einsetzen der Punkte wird das Gleichungssystem aufgestellt und gelöst:

$$[a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e] := \begin{bmatrix} p(0,a,b,c,d,e) = 1.8 \\ p(0.25,a,b,c,d,e) = 2.1 \\ p(0.5,a,b,c,d,e) = 0.4 \\ p(0.75,a,b,c,d,e) = 0.7 \\ p(1,a,b,c,d,e) = 0.5 \end{bmatrix} \xrightarrow[float,3]{solve,a,b,c,d,e} [-69.3\ \ 147.0\ \ -95.7\ \ 17.0\ \ 1.8]$$

Die Lösung lautet also:

$a = -69.3$ $b = 147$ $c = -95.7$ $d = 17$ $e = 1.8$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Wichtige Anmerkung: Zwar wird in der obigen Definition der Funktion p(x,...) das angegebene "e" durch die interne "Automatik" als Variable im Gegensatz zur Konstante e=2.718... erkannt. Jedoch führt diese "Automatik" beim solve-Befehl zu einer Falschinterpretation (ohne Warnung) und e wird als die Konstante e betrachtet, was zu einer falschen Lösung des Gleichungssystems führt. Man muß daher die Variable e beim solve-Befehl anklicken und mit dem Menüpunkt **Rechnen/Stil/ Beschriftungen/** als **Variable** deklarieren!

Die Lösung des Gleichungssystems kann auch nummerisch mit Hilfe des "Lösungs-blockes" erfolgen

Startwerte
$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 1 \quad d := 1 \quad e := 1$

Nebenbedingungen
$p(0, a, b, c, d, e) = 1.8$
$p(0.25, a, b, c, d, e) = 2.1$
$p(0.5, a, b, c, d, e) = 0.4$
$p(0.75, a, b, c, d, e) = 0.7$
$p(1, a, b, c, d, e) = 0.5$

Gleichungslöser
$$\mathbf{find}(a, b, c, d, \mathbf{e}) = \begin{bmatrix} -69.333 \\ 146.667 \\ -95.667 \\ 17.033 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

Weitere Anmerkung: Wie im Folgenden gezeigt gelingt die Lösung auch dann, wenn die Funktion p(x) ohne die Angabe der Variablen erfolgt. Allerdings nur bei Vernwendung des solve-Operators - nummerisch wird (aus mir unbekannten Gründen) keine Lösung gemäß dieser Variante gefunden.
"e" muß jedenfalls wieder wie oben beschrieben als Variable deklariert werden.

$\mathbf{clear}(a, b, c, d, e)$

$p(x) := a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

$$\begin{bmatrix} p(0) = 1.8 \\ p(0.25) = 2.1 \\ p(0.5) = 0.4 \\ p(0.75) = 0.7 \\ p(1) = 0.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{solve, a, b, c, d, e \\ float, 3}} \begin{bmatrix} -69.3 & 147.0 & -95.7 & 17.0 & 1.8 \end{bmatrix}$$

richtige Lösung !

Startwerte
$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 1 \quad d := 1 \quad e := 1$

Nebenbedingungen
$p(0) = 1.8$
$p(0.25) = 2.1$
$p(0.5) = 0.4$
$p(0.75) = 0.7$
$p(1) = 0.5$

Gleichungslöser
$\mathbf{find}(a, b, c, d, e) = ?$

Hier wird keine Lösung gefunden !(?)

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Gleichu

Teilaufgabe d) $\mathbf{clear}(x)$ Festlegung für x aufheben

$f(x) := -4.046 \cdot x + 4.378$

$p(x) := -70 \cdot x^4 + 150 \cdot x^3 - 100 \cdot x^2 + 17\ x + 3$

Die gesuchte Gleichung lautet: $p'(x) = -4.046$

$$p'(x) = -4.046 \xrightarrow[float,3]{solve,x} \begin{bmatrix} 0.536 \\ 0.153 \\ 0.919 \end{bmatrix}$$

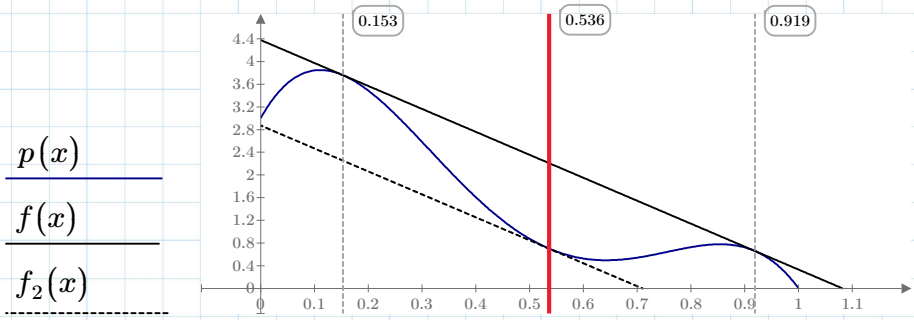
Die Gleichung liefert 3 Lösungen, von denen gemäß der gegebenen Skizze nur der mittlere Wert als Lösung der Problemstellung in Frage kommt:

$x_T := 0.536$

Für eine graphische Darstellung der Lösung wird noch die zu f(x) parallel verschobene Tangente an p(x) im Punkt T ermittelt - diese Tangente wird hier mit $f_2(x)$ bezeichnet:

$p(x_T) = 0.703$ $\qquad p(x_T) = -4.046 \cdot x_T + d \xrightarrow[float,4]{solve,d} 2.872$

$f_2(x) := -4.046 \cdot x + 2.872$



$p(x)$

$f(x)$

$f_2(x)$

x

Nur nichtkommerzielle Verwendung

AUFGABE: "Weinbau" (Cluster 1)

Weinbau

a) Aus nostalgischen Gründen werden in einem kleinen Weingut Trauben der Sorte *Welschriesling* mit einer renovierten Handpresse gepresst.
Der zylinderförmige Korb, in dem die Weintrauben gepresst werden, hat dabei die folgenden Abmessungen:
Höhe $h = 80$ cm, Innenradius $r = 42$ cm.

– Überprüfen Sie nachweislich mithilfe der Volumsformel des Drehzylinders, ob die nachstehenden Aussagen jeweils richtig sind.

Aussage 1: „Wäre die Presse 1,6 m hoch (bei gleichem Durchmesser), so würde sie das doppelte Volumen fassen."
Aussage 2: „Hätte die Presse einen Innenradius von 84 cm (bei gleicher Höhe), so würde sie das doppelte Volumen fassen." *[2 Punkte]*

Der Korb ist zu 95 % mit Trauben gefüllt. Aus diesen Trauben werden 350 Liter Traubenmost gepresst.

– Berechnen Sie den prozentuellen Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Volumen der Trauben. *[1 Punkt]*

b) Weine der Sorten *Zweigelt* und *Grüner Veltliner* werden in Kisten zu 12 Flaschen und Kartons zu 6 Flaschen verkauft. Die Preise pro Flasche sind unabhängig von der Packungsgröße.

1 Kiste *Zweigelt* und 1 Karton *Grüner Veltliner* kosten insgesamt € 47,40.
2 Kisten *Grüner Veltliner* und 1 Karton *Zweigelt* kosten insgesamt € 72.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem der Preis für eine Flasche *Zweigelt* und der Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner* berechnet werden können. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie den Preis für eine Flasche *Zweigelt* und den Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner*. *[1 Punkt]*

c) Der Wein wird mit einem manuellen Reihenfüller in Flaschen abgefüllt. Das Füllvolumen der Flaschen kann dabei als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden. Es liegen 95 % der Füllvolumina in dem um μ symmetrischen Intervall von 995 Millilitern (ml) bis 1015 ml.

– Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Füllvolumens der Flaschen. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ. *[1 Punkt]*

Nur nichtkommerzielle Verwendung

LÖSUNG: Aufgabe "Weinbau"

Aufgabenteil a)

$r := 42\ cm$ $h := 80\ cm$

$\mathbf{clear.sym}(r, h)$ Mit diesem Befehl werden die Variablen r und h für folgende SYMBOLISCHE Berechnungen gelöscht, für nummerische Auswertungen bleiben die Werte erhalten.

$V := r^2 \cdot \pi \cdot h = 443.3\ L$ Das ist das (ursprüngliche) Volumen

Aussage 1: Die Höhe wird verdoppelt

$V_1 = r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot h \rightarrow V_1 = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot r^2$ Also gilt: $V_1 = 2 \cdot V$

Die angeführte Aussage ist richtig

Aussage 2: Der Radius wird verdoppelt

$V_2 = (2 \cdot r)^2 \cdot \pi \cdot h \rightarrow V_2 = 4 \cdot \pi \cdot h \cdot r^2$ Also gilt: $V_2 = 4 \cdot V$

Die angeführte Aussage ist daher falsch.

$V_{Trauben} := 95\% \cdot V$ $V_{Traubenmost} := 350\ L$

$\frac{V_{Traubenmost}}{V_{Trauben}} = 83.101\%$

Hinweis: Für die Angabe des Ergebnisses in Prozent geht man auf die Registerkarte "Mathematische Formatierung"/ Gruppe "Ergebnisse" und wählt die Darstellungsart "Prozent"

Der prozentuelle Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Volumen beträgt daher ca. 83%

Aufgabenteil b) $\mathbf{clear}(x, y)$

Die Variablen x und y wurden weiter oben mit Werten belegt. Dies wird hier aufgehoben (gelöscht), damit im weiteren damit gerechnet werden kann.

$$[x\ \ y] := \begin{bmatrix} 12\ x + 6\ y = 47.40 \\ 24 \cdot y + 6\ x = 72 \end{bmatrix} \xrightarrow[float, 2]{solve, x, y} [2.8\ \ 2.3]$$

Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems:
x ... Preis pro Flasche Zweigelt (€)
y ... Preis pro Flasche Veltliner (€)

Gleichungslöser mit Nebenbedingungen und Startwerte

$x := 1$ $y := 1$

$12 \cdot x + 6\ y = 47.40$

$24\ y + 6\ x = 72$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \mathbf{find}(x, y) = \begin{bmatrix} 2.8 \\ 2.3 \end{bmatrix}$

$x = 2.8$ $y = 2.3$

Variante:
Nummerische Lösung des Gleichungssystems

$x = 2.8$ $y = 2.3$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

Aufgabenteil c) $\text{clear}(x, \mu, \sigma)$

$x_{ob} := 1015$ $x_{un} := 995$ $\mu := \frac{x_{ob} + x_{un}}{2} = 1005$

$\text{qnorm}(0.975, 0, 1) = 1.96$

$x_{ob} = \mu + 1.96 \cdot \sigma \xrightarrow{\text{solve}, \sigma \; \text{float}, 4} 5.102$

Der symmetrische 95%-Zufallsstreubereich um μ ist gegeben - einseitig betrachtet ist daher x_{ob} das 97,5% - Quantil der entsprechenden Normalverteilung, was hier für die Berechnung von σ ausgenützt wird.

Schätzwerte

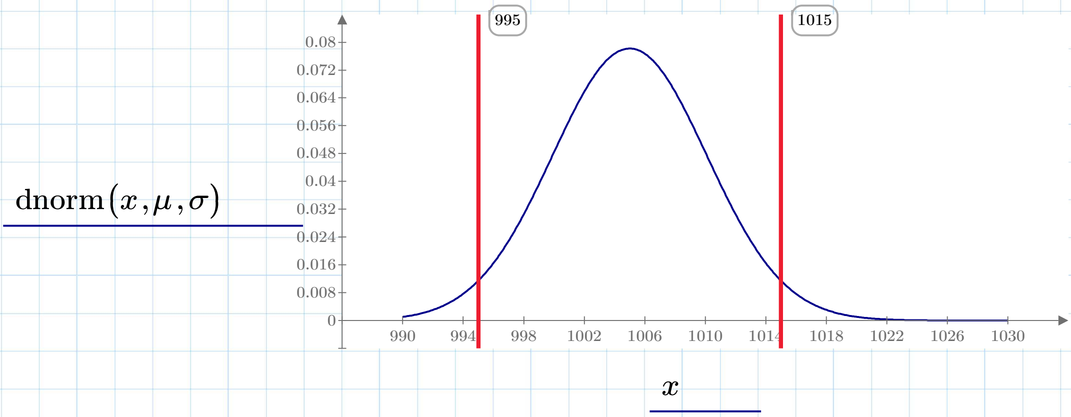
$\sigma := 1$

$x_{ob} = \mu + qnorm(0.975, 0, 1) \cdot \sigma$

$\sigma := \text{find}(\sigma) = 5.102$

Variante: Ermittlung von σ mit Hilfe des Lösungsblockes auf nummerischem Weg.

Graphische Darstellung der ermittelten Normalverteilung mit den gegebenen Grenzen des 95%-Zufallsstreubereiches:



Nur nichtkommerzielle Verwendung

AUFGABE: "Dreieckspannung" (Cluster 2)

Aufgabe 7 (Teil B)

Dreieckspannung

Gegeben ist folgender periodischer dreieckförmiger Spannungsverlauf:

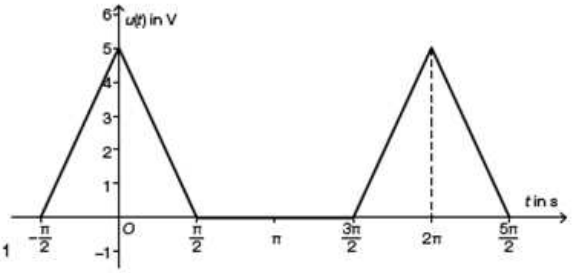
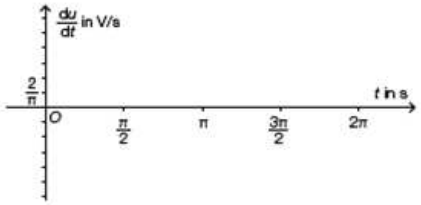


Abbildung 1

a) – Erstellen Sie die Funktionsgleichungen des in Abbildung 1 dargestellten dreieckförmigen Spannungsverlaufs auf geeigneten Teilintervallen des Bereichs $0 \le t \le 2\pi$. *[2 Punkte]*
– Berechnen Sie den Effektivwert des in Abbildung 1 dargestellten dreieckförmigen Spannungsverlaufs. *[1 Punkt]*
– Veranschaulichen Sie die Ableitungsfunktion des in Abbildung 1 dargestellten dreieckförmigen Spannungsverlaufs im Intervall $0 \le t \le 2\pi$ im nachstehenden Diagramm. *[1 Punkt]*



b) Der in Abbildung 1 dargestellte dreieckförmige Spannungsverlauf kann mithilfe einer Fourier-Reihe beschrieben werden.

– Argumentieren Sie anhand der grafischen Darstellung, warum die Fourier-Koeffizienten der Sinusschwingungen 0 sein müssen. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie den Gleichanteil der in obiger Abbildung 1 dargestellten Spannung. *[1 Punkt]*

c) Der in der nachstehenden Abbildung 2 dargestellte rechteckförmige Spannungsverlauf mit Periode 2π hat einen Gleichanteil von 3 Volt (V).

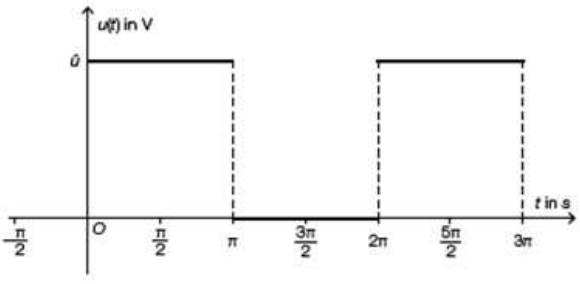


Abbildung 2

– Bestimmen Sie $\hat{u}$. *[1 Punkt]*

Nur nichtkommerzielle Verwendung

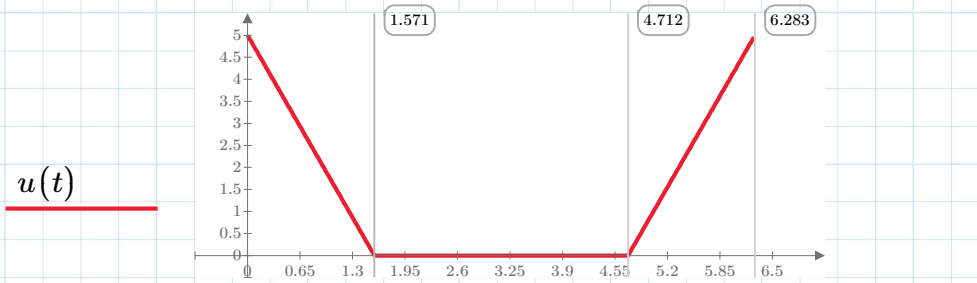
LÖSUNG: Aufgabe "Dreieckspannung"
Aufgabenteil a)

Die Funktion u(t) wird abschnittsweise mit Hilfe der Programmoperatoren definiert:

$$u(t) := \left\| \begin{array}{l} \text{if } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \quad \text{return } 5 - \frac{5}{\frac{\pi}{2}} \cdot t \\ \text{if } \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\,\pi}{2} \\ \quad \text{return } 0 \\ \text{if } \frac{3\,\pi}{2} \le t \le 2\,\pi \\ \quad \text{return } -15 + \frac{5}{\frac{\pi}{2}} \cdot t \end{array} \right.$$

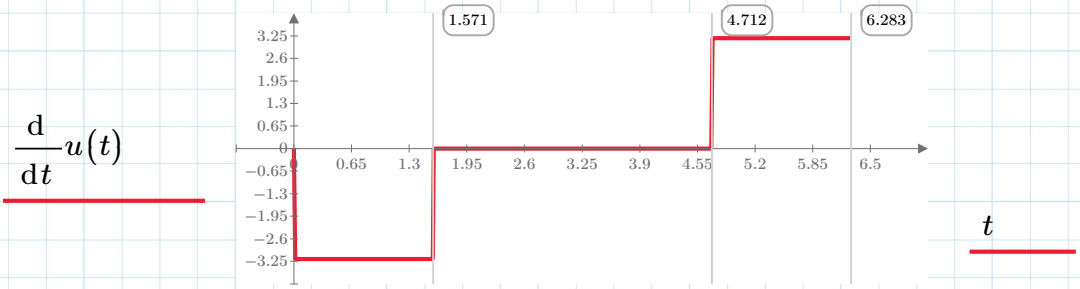
Anstelle des "if"-Operators kann an der 2. und 3.Verzweigungsstelle auch "else if" verwendet werden.
Der Operator "return" kann auch weggelassen werden.

Grafische Darstellung



Berechnung des Effektivwertes $u_{eff} := \sqrt{\frac{1}{2\,\pi} \cdot \int_0^{2\,\pi} u(t)^2 \, dt} = 2.041$

Darstellung der Ableitungsfunktion



Nur nichtkommerzielle Verwendung

Aufgabenteil b)

Auch wenn nicht gefragt, werden hier zunächst die Koeffizienten der Fourierreihe rechnerisch ermittelt:

$N := 10$ $T := 2\ \pi$ $\omega_0 := \frac{2\ \pi}{T} = 1$

$n := 1 \ldots N$ Die ersten 11 Koeffizienten werden berechnet

$$a_0 := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t = 2.5$$

$$a_n := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)\,\mathrm{d}t$$

$$a = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.026 \\ 1.013 \\ 0.225 \\ 0 \\ 0.081 \\ 0.113 \\ 0.041 \\ 0 \\ 0.025 \\ 0.041 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Anmerkung:
Das Ergebnisformat wurde auf "dezimal" eingestellt, ansonsten werden wegen der nummerischen Berechnung statt "0" sehr niedrige Zehnerpotenzen angezeigt

Die Fourierkoeffizienten der Sinusschwingungen (das sind die b_n) sind tatsächlich alle gleich 0. Wie man in der Grafik erkennt, ist die zu approximierende Funktion "gerade" (d.h. symmetrisch zur Ordinate). Sie kann daher NUR durch Überlagerung von geraden Funktionen approximiert werden - das sind die Kosinusschwingungen. Die Sinusschwingungen aber stellen UNGERADE Funktionen dar.

Der Gleichanteil ist gleich $\frac{a_0}{2} = 1.25$

Aufgabenteil c)

Es muß gelten: $u_{dach} = 6$

Begründung: Der Gleichanteil kann geometrisch ermittelt werden, weil die gleichen Flächen über die Periode betrachtet ober- bzw. unterhalb des Gleichanteils liegen müssen. Dies ist aber für einen Gleichanteil von $\frac{u_{dach}}{2}$ der Fall.

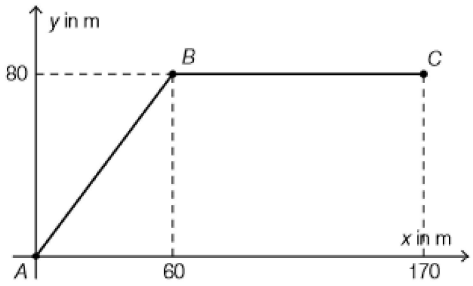
Da nun $\frac{u_{dach}}{2} = 3$ laut Angabe,muß gelten: $u_{dach} = 6$

Nur nichtkommerzielle Verwendung

AUFGABE: "Kräfte" (Cluster 3)

Kräfte

a) Durch eine Kraft $\vec{F}_{Zug} = \begin{pmatrix} 260 \\ 140 \end{pmatrix}$ Newton (N) wird eine Last von A nach B und danach von B nach C gezogen (siehe nachstehende Skizze).



– Berechnen Sie die durch die Kraft $\vec{F}_{Zug}$ an der Last verrichtete Arbeit. *[2 Punkte]*

b) Drei Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 700 \end{pmatrix}$ N, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -100 \\ 700 \\ -400 \end{pmatrix}$ N und $\vec{F}_3$ greifen an einem Körper in einem Punkt an und halten einander das Gleichgewicht, d. h.: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

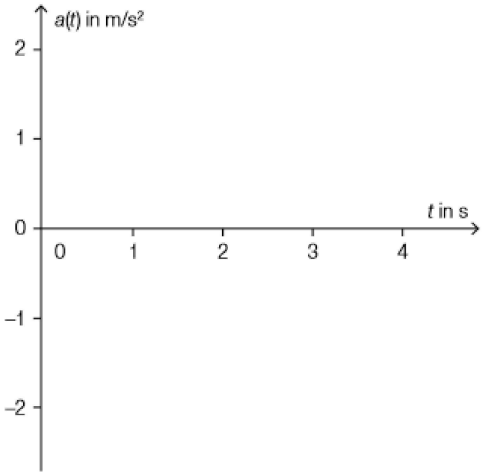
– Berechnen Sie $\vec{F}_3$. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie den Betrag von $\vec{F}_3$. *[1 Punkt]*
– Ermitteln Sie denjenigen Winkel, den $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ einschließen. *[1 Punkt]*

c) Der Geschwindigkeitsverlauf einer durch eine bestimmte Kraft hervorgerufenen Bewegung ist durch die Funktion v gegeben:

$$v(t) = 2 \cdot t - \frac{t^2}{2}$$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)

– Begründen Sie, warum im Zeitintervall $0 \le t \le 4$ gilt: $v(t) \ge 0$ *[1 Punkt]*
– Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem das zugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm für $0 \le t \le 4$. *[1 Punkt]*



Nur nichtkommerzielle Verwendung

LÖSUNG: Aufgabe "Kräfte"

Aufgabenteil a)

Die Kraft F_{Zug} wird mit Einheit "Newton" und die Wegvektoren s_1 und s_2 mit der Einheit "Meter" definiert:

$$F_{Zug} := \begin{bmatrix} 260 \\ 140 \end{bmatrix} N$$

$$OA := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} m \qquad OB := \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix} m \qquad OC := \begin{bmatrix} 170 \\ 80 \end{bmatrix} m$$

Definition der Ortsvektoren der Punkte A, B und C

$$s_1 := OB - OA = \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix} m \qquad s_2 := OC - OB = \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

Die Arbeit ergibt sich aus dem Skalarprodukt "$Kraft \cdot Weg$".

$$W := F_{Zug} \cdot (s_1 + s_2) \qquad W = 55400\ J$$

Aufgabenteil b)

$$F_1 := \begin{bmatrix} 800 \\ 200 \\ 700 \end{bmatrix} N \qquad F_2 := \begin{bmatrix} -100 \\ 700 \\ -400 \end{bmatrix} N \qquad F_3 := \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

$$F_3 := -F_1 - F_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -700 \cdot N \\ -900 \cdot N \\ -300 \cdot N \end{bmatrix}$$

- Berechnung des Vektors F_3

$$|F_3| = 1178.983\ N$$

- Berechnung Betrages des Vektors F_3

$$a := \operatorname{acos}\left(\frac{F_1 \cdot F_2}{|F_1| \cdot |F_2|}\right) = 104.499\ °$$

- Berechnung Winkels zwischen F_1 und F_2

Aufgabenteil c)

$$v(t) := 2 \cdot t - \frac{t^2}{2}$$

Definition der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$

$$v(t) = 0 \xrightarrow{solve,\, t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Der Graph der Funktion v ist eine nach unten offene Parabel mit den Nullstellen $t_1 = 0$ und $t_2 = 4$. Daher sind die Funktionswerte im Zeitintervall $0 \le t \le 4$ positiv.

Nur nichtkommerzielle Verwendung