Roland Pichler roland.pichler@htl-kapfenberg.ac.at

SRDP 1. Nebentermin 2017, alle Aufgaben aus dem Aufgabenteil B

Hier werden die Lösungen der standardisierten Reifeprüfungsaufgaben 2017 (1. Nebentermin) für den Teil B an den Höheren Technischen Lehranstalten Österreichs unter Verwendung von Mathcad-Prime vorgeführt. Diese Aufgaben wurden zentral vom Bundesministerium für Bildung gestellt.
Bezüglich der Aufgabenstellungen siehe auch: https://www.srdp.at/downloads/

Es wird (fast überall) bei den vorgestellten Lösungen über die gestellte Aufgabenstellung hinausgegangen. Dies deswegen, um der Bedeutung dieser Aufgaben für den Einsatz im Unterricht besser gerecht zu werden.
In vielen Fällen werden mehrere Lösungswege aufgezeigt (teils auch unter Verwendung verschiedener Methoden von Mathcad)

AUFGABE: "Servermotor" (Cluster 1, 2, 3, 4, 5; die Aufgabennummer c) nur in 4, 5)

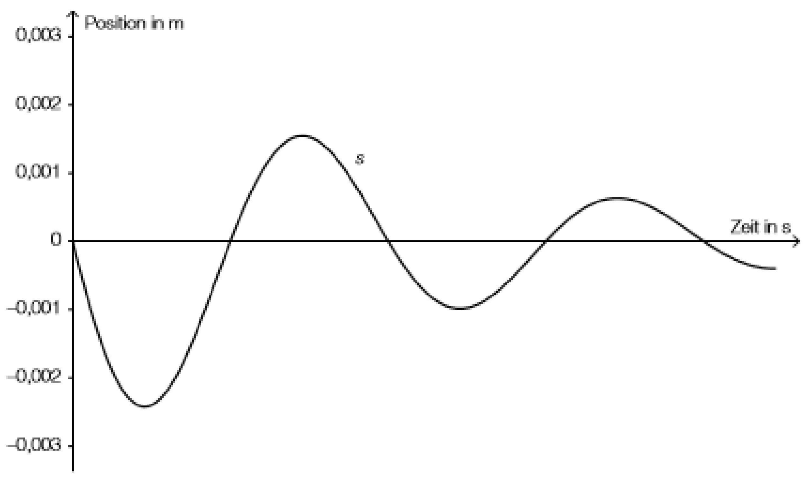
Servomotor

a) Ein Servomotor steuert die Bewegung eines Bauteils. Diese kann näherungsweise durch folgende Funktion s beschrieben werden:

$s(t) = -0{,}003 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)$ mit $t \geq 0$

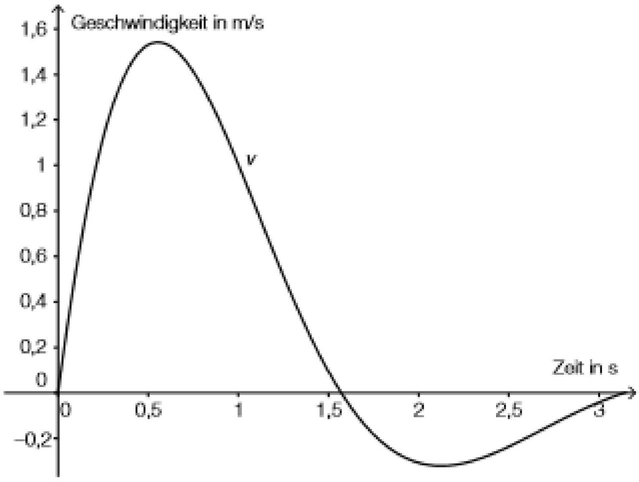
t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... Position des Bauteils bezogen auf die Ausgangslage zum Zeitpunkt t in Metern (m)

Der Graph der Funktion s ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Markieren Sie die Stelle $t = \frac{\pi}{7}$ in der obigen Abbildung. *[1 Punkt]*
– Interpretieren Sie die Stelle $t = \frac{\pi}{7}$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*
– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt dieser Bewegung, zu dem die Geschwindigkeit erstmals null beträgt. *[1 Punkt]*

b) Ein Werkstück wird von einem Servomotor auf einem geradlinigen Förderband vor- und zurückbewegt. Das zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Markieren Sie in der obigen Abbildung das gesamte Zeitintervall, in dem die Beschleunigung negativ ist. *[1 Punkt]*
– Erklären Sie anhand der obigen Abbildung, warum die Position des Werkstücks am Ende der Bewegung nicht der Position am Anfang der Bewegung entspricht. *[1 Punkt]*

c) Der elektrische Widerstand der Stromzuleitung des Servomotors wird bei verschiedenen Temperaturen gemessen. Die Messergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst.

Temperatur in °C	elektrischer Widerstand in Milliohm (mΩ)
7	4,6
19	4,9
28	5,1
36	5,2

Der elektrische Widerstand soll in Abhängigkeit von der Temperatur beschrieben werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. *[1 Punkt]*

Aus der Theorie ist bekannt, dass der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Widerstand und der Temperatur eines Leiters näherungsweise durch $R(T) = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T)$ beschrieben werden kann.

T ... Temperatur in °C
$R(T)$ ... elektrischer Widerstand bei der Temperatur T in mΩ
R_0 ... elektrischer Widerstand bei $T = 0$ °C in mΩ
α ... Temperaturkoeffizient in $\frac{1}{°C}$

– Bestimmen Sie mithilfe der ermittelten Regressionsfunktion den Temperaturkoeffizienten α. *[1 Punkt]*

LÖSUNG: Aufgabe "Servermotor"

Aufgabenteil a)

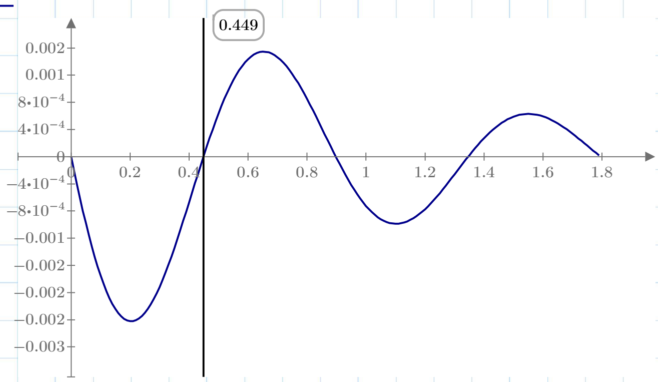
$s(t) := -0.003 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)$

- Zur Markierung bzw. Identifizierung der Stelle $t_0 = \frac{\pi}{7}$ kann man etwa so vorgehen:

  - Man zeichnet den Graphen der Funktion und fügt die vertikale Markierung $t_0 := \frac{\pi}{7} = 0.449$ ein.
  - Aus der Periodendauer $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$ erhält man $T = \frac{2 \cdot \pi}{7}$, daher ist $t_0 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{7}$ und damit die kleinste Nullstelle > 0.

$T := \frac{2 \cdot \pi}{7}$ $\quad t := 0, 0.01 .. 2 \cdot T$ Vorgabe des "Zeichenbereichs" für t

$s(t)$



t

- Nach $\frac{\pi}{7}$ Sekunden befindet sich das Bauteil erstmals wieder in der Ausgangslage.

- Die Geschwindigkeit erhält man durch $v(t) := \frac{d}{dt} s(t)$, Lösung der Gleichung $v(t) = 0$ liefert eine Lösung.

$\text{clear}(t)$ Durch $\text{clear}(t)$ erkennt das Programm, dass t als Variable betrachtet werden muss.

$$v(t)=0 \rightarrow -0.021\cdot\cos(7\cdot t)\cdot e^{-t}+0.003\cdot\sin(7\cdot t)\cdot e^{-t}=0 \xrightarrow{solve,t} 2.89692217053...$$

Diese Lösung $t=2.896...$ ist jedoch nicht der Zeitpunkt (t > 0), zu dem die Geschwindigkeit erstmals 0 beträgt. Dies erkennt man, wenn man den Graph der Geschwindigkeitsfunktion zeichnet.
Will man alle Lösungen der zugrundliegenden trigonometrischen Gleichung darstellen, gelingt das mit dem Schlüsselwort "fully".

$$v(t)=0 \xrightarrow[fully]{solve,t} \begin{array}{l} \text{if } \_n\in\mathbb{Z}\wedge(\_z=0.33857845095224745563\vee\_z=2.7675339161765558854\vee\_z=- \\ \quad 6.2831853071795864769\cdot\_n+2.0\cdot\text{atan}(\_z) \\ \text{else} \\ \quad undefined \end{array}$$

Diese Darstellung ist jedoch auch nicht zielführend.

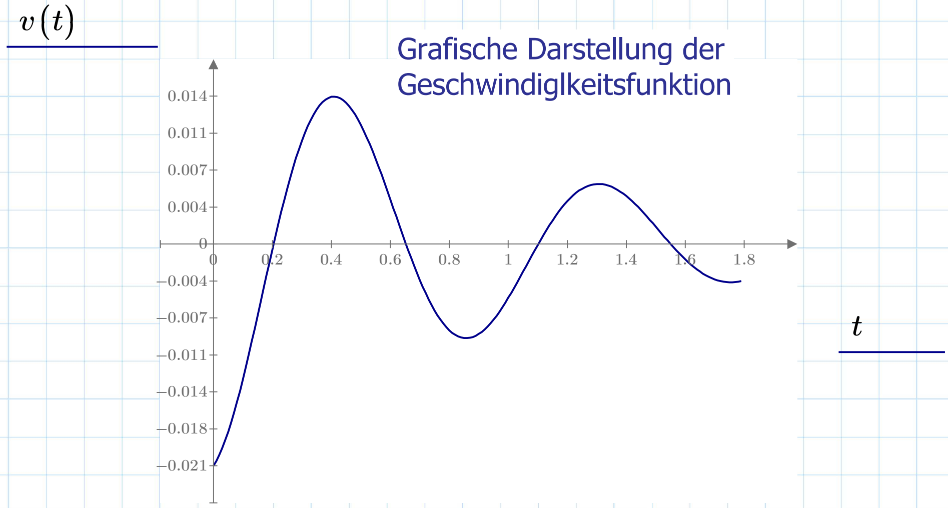
Eine dritte Möglichkeit liefert die numerische Lösung der Gleichung, wobei man das Berechnungsintervall selbst wählen kann. In diesm Fall erkannt man aus dem Graph ein mnögliches Berechnungsintervall, z. B. $[\,0.1\mid 0.3\,]$.
Der Mathcad Prime Befehl lautet: $\mathbf{root}(v(t),t,0.1,0.3)$.

$$\mathbf{root}(v(t),t,0.1,0.3)=0.204$$

Damit lautet die Lösung:
Nach ca. 0,201 Sekunden ist die Geschwindiglkeit erstmals 0

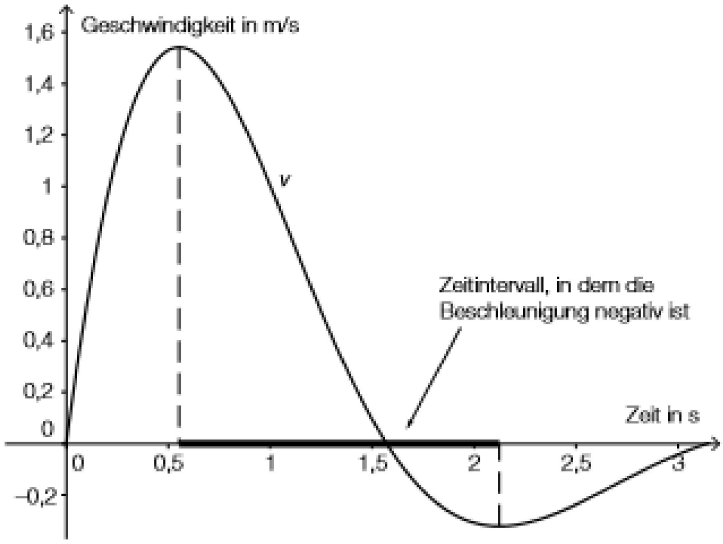
$$t:=0,0.01..2\cdot T$$

Grafische Darstellung der Geschwindiglkeitsfunktion



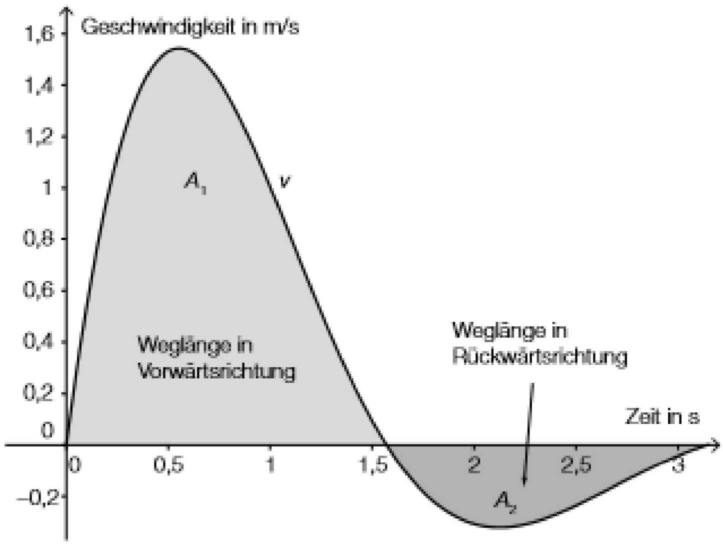
Aufgabenteil b)

b)



Da der Flächeninhalt oberhalb der Zeitachse (= Weglänge in Vorwärtsrichtung) deutlich größer ist als jener unterhalb der Zeitachse (= Weglänge in Rückwärtsrichtung), befindet sich das Werkstück am Ende der Bewegung nicht wieder in der Ausgangsposition.

oder:



$A_1 > A_2$

Aufgabenteil c)

$m\Omega := 10^{-3}\ \Omega$

$Temperatur$ (K)	$Widerstand$ $(m\Omega)$
7	4.6
19	4.9
28	5.1
36	5.2

Eingabe der Werte über den Menüpunkt "Tabelle einfügen"

$$\begin{bmatrix} d \\ k \end{bmatrix} := \mathrm{line}(Temperatur, Widerstand)$$

$$d = 4.48\ m\Omega \qquad k = 0.0211\ \frac{m\Omega}{K}$$

$$gerade(x) := k \cdot x + d \qquad d = 4.476\ m\Omega \qquad k = 0.021\ \frac{m\Omega}{K}$$

Alternativ können auch vordefinierte Funktionen für Steigung und Achsenabschnitt der Ausgleichsgerade verwendet werden:

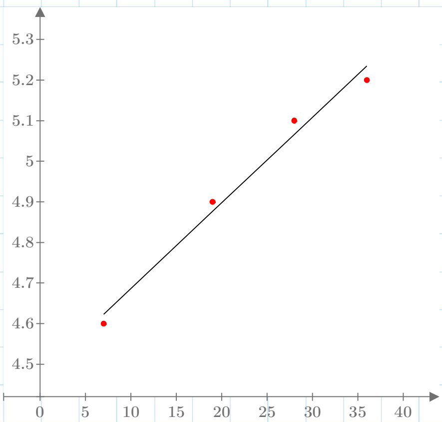
$$k := \mathrm{slope}(Temperatur, Widerstand) = 0.0211\ \frac{m\Omega}{K}$$

$$d := \mathrm{intercept}(Temperatur, Widerstand) = 4.48\ m\Omega$$

zeichnerische Darstellung:

$gerade(Temperatur)\ (m\Omega)$

$Widerstand\ (m\Omega)$



$Temperatur\ (K)$

Nun soll die gleiche Aufgabe unter Verwendung der "Methode der kleinsten Quadrate" gelöst werden.

$N := \text{length}(Temperatur) = 4 \qquad i := 0 .. N-1$

$f(x,k,d) := k \cdot x + d$

Definition der Art der Ausgleichskurve.
In diesm Fall ist eine lineare Ausgleichsfunktion gewünscht

$anp(k,d) := \sum_i \left(Widerstand_i - \left(f\left(Temperatur_i, k, d\right)\right)\right)^2 \rightarrow (d + 7 \cdot k \cdot K + -0.0046 \cdot \Omega)^2 + (d + 19 \cdot k$

$anp_k(k,d) := \frac{d}{dk} anp(k,d) \rightarrow 14 \cdot K \cdot (d + 7 \cdot k \cdot K + -0.0046 \cdot \Omega) + 38 \cdot K \cdot (d + 19 \cdot k \cdot K + -0.0049 \cdot \Omega)$

$anp_d(k,d) := \frac{d}{dd} anp(k,d) \rightarrow 8 \cdot d + 180 \cdot k \cdot K + -0.0092 \cdot \Omega + -0.0098 \cdot \Omega + -0.0102 \cdot \Omega + -0.0104 \cdot$

Schätzwerte

$k := 0.1 \frac{m\Omega}{K} \qquad d := 4\ m\Omega$

Nebenbedingungen

$anp_k(k,d) = 0$

$anp_d(k,d) = 0$

Gleichungslöser

$\mathbf{L} := \mathbf{find}(k, \mathbf{d}) = \begin{bmatrix} 0.021075 \\ 4.475806 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m\Omega}{K} \\ m\Omega \end{bmatrix}$

Lösung des Normalengleichungssystems

$k := \mathbf{L}_0 = 0.021 \frac{m\Omega}{K} \qquad d := \mathbf{L}_1 = 4.476\ m\Omega$

$\mathbf{clear}(T)$

$R(T) = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T) \xrightarrow{expand} R(T) = R_0 + \alpha \cdot R_0 \cdot T$

$R_0 := d$

$\alpha \cdot R_0 = k \xrightarrow[\ ]{solve, \alpha \atop float, 2} \frac{0.0047}{K}$

AUFGABE: "Sport und Gesundheit" (Cluster 1, 2, 3, 4)

Sport und Gesundheit

a) Die Höhe eines Golfballs über dem horizontalen Boden in Abhängigkeit von der Zeit seit dem Abschlag kann näherungsweise durch eine Funktion h beschrieben werden:

$$h(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

t ... Zeit seit dem Abschlag in s
$h(t)$ ... Höhe des Golfballs über dem Boden zur Zeit t in m
v_0 ... Abschlaggeschwindigkeit in m/s
α ... Abschlagwinkel
g ... Erdbeschleunigung in m/s² (konstant)

– Zeigen Sie, dass der Golfball zur Zeit $t = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$ die maximale Höhe über dem Boden erreicht. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie für $v_0 = 60$ m/s, $\alpha = 30°$ und $g = 9{,}81$ m/s² denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Golfball wieder auf dem Boden aufkommt. *[1 Punkt]*

Die Schlagweite w (in m) kann mithilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$w = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

– Argumentieren Sie ausgehend von dieser Formel, dass bei konstanter Abschlaggeschwindigkeit v_0 die Schlagweite maximal ist, wenn $\alpha = 45°$ beträgt. *[1 Punkt]*
– Geben Sie an, wie sich die Schlagweite bei konstantem Abschlagwinkel α verändert, wenn man die Abschlaggeschwindigkeit v_0 verdreifacht. *[1 Punkt]*

b) Die *Vitalkapazität* ist eine Kenngröße für die Funktion der Lunge.

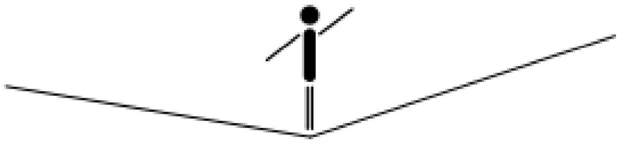
Ein sportmedizinisches Institut berechnet den Sollwert der Vitalkapazität eines erwachsenen Mannes mithilfe folgender Formel:

$$V_m = (27{,}63 - 0{,}112 \cdot x) \cdot y$$

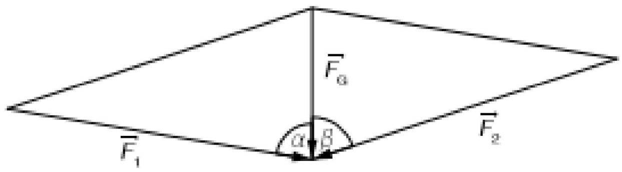
V_m ... Sollwert der Vitalkapazität in cm³
x ... Alter in Jahren
y ... Körpergröße in cm

– Ermitteln Sie, um wie viel Liter der Sollwert der Vitalkapazität eines 180 cm großen erwachsenen Mannes in einem Zeitraum von 10 Jahren sinkt. *[2 Punkte]*

c) *Slacklinen* ist eine Trendsportart, bei der man auf einem gespannten Gurtband, der sogenannten *Slackline*, balanciert.
Eine Slackline wird über einen See gespannt. Ein sportlicher Badegast versucht, über die Slackline den See zu queren, ohne dabei ins Wasser zu fallen.



Das zugehörige Kräfteparallelogramm ist nachfolgend dargestellt:



$\vec{F}_G$ ... Gewichtskraft der Person auf dem Seil
$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ... Seilkräfte

Im Folgenden wird für Kräfte die Schreibweise $|\vec{F}| = F$ verwendet.

– Berechnen Sie F_2 für $F_G = 588{,}6$ Newton, $\alpha = 82°$ und $\beta = 75°$. *[1 Punkt]*

LÖSUNG: Aufgabe "Sport und Gesundheit"

Aufgabenteil a) $\text{clear}(t, s)$

$$h(t) := v_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$h'(t) := \frac{d}{dt} h(t) \rightarrow v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t$$

Den Zeitpunkt, wann der Golfball die maximale Höhe erreicht, berechnet man über $h'(t) = 0$

Die erste Ableitung $h'(t)$ kann man auch über den Ableitungsoperator x' (Tastenkürzel: "Strg ä) aus dem Menü "Operatoren und Symbole" bilden.

$$h'(t) = 0 \xrightarrow{solve, t} \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$$

$$h''\left(\frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}\right) \rightarrow -g$$

Da g positiv ist (Erdbeschleunigung), ist der Nachweis erfolgt

$v_0 := 60 \frac{m}{s}$ $\alpha := 30°$

$h(t) := v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$h(t) = 0 \xrightarrow{solve, t} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{120 \cdot m \cdot \sin(30 \cdot deg)}{g \cdot s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.118 \end{bmatrix} s$

Die zweite Lösung t = 6.118 s ist der gesuchte Wert.

Die Wurfweite ist umso größer, je größer der Wert $sin(2 \cdot \alpha)$ ist; dieser ist am größten, nämlich 1, wenn $2 \cdot \alpha = 90°$. Das heißt: $\alpha = 45°$

Wenn man v_0 verdreifacht, so verneunfacht sich die Wurfweite wegen des quadratischen Zusammenhangs $w \sim {v_0}^2$.

Aufgabenteil b)

$V_m(x, y) := (27.36\ cm^2 - 0.112\ cm^2 \cdot x) \cdot y$

Diese Aufgabe lässt sich in Mathcad Prime auch mit Einheiten lösen.
Dafür definiert man in der Angabe die richtigen Einheiten, x ist dimensionslos, y hat die Einheit cm, daher müssen die Zahlenwerte in der Klammer die Einheit cm² haben, da V_m die Einheit cm³ hat.

$y_{180} := 180\ cm$

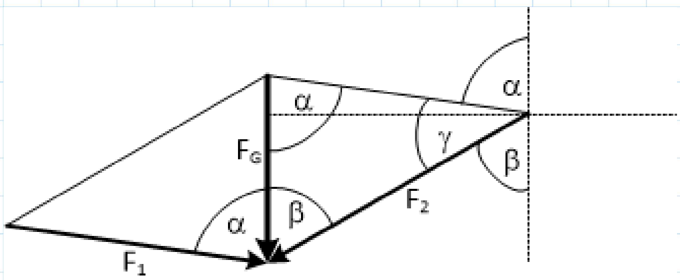
$V_m(x+10, y_{180}) - V_m(x, y_{180}) \xrightarrow{simplify} -201.6 \cdot cm \cdot cm^2 = -0.202\ L$

Aufgabenteil c)

$F_G := 588.6\ N$ $\alpha := 82°$ $\beta := 75°$

$\gamma := 180° - \alpha - \beta = 23\ deg$

Aus der nebenstehenden Skizze kann man folgenden Zusammenhang erkennen:



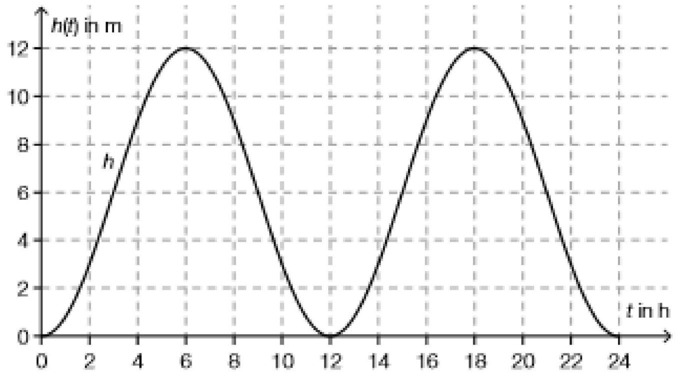
$\frac{F_2}{\sin(\alpha)} = \frac{F_G}{\sin(\gamma)} \xrightarrow{solve, F_2} \frac{588.6 \cdot N \cdot \sin(82.0 \cdot deg)}{\sin(22.999999999999993 \cdot deg)} = 1492\ N$

AUFGABE: "Ebbe und Flut" (Cluster 2, 3, 4, 5)

Ebbe und Flut

Ebbe und Flut beeinflussen die Höhe des Meeresspiegels.

a) Der tiefste Wasserstand wird als Niedrigwasser bezeichnet. Die zeitliche Abhängigkeit der Höhe des Wasserstands über diesem Wert kann näherungsweise durch eine Funktion h mit $h(t) = A + B \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Stunden und $B > 0$.



– Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und B ab. *[1 Punkt]*

– Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω. *[1 Punkt]*
– Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ. *[1 Punkt]*

b) Die Wassertiefe in einem Hafenbecken kann näherungsweise durch die folgende Funktion H beschrieben werden:

$H(t) = 6 + 1{,}8 \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$

t ... Zeit nach Mitternacht in h
$H(t)$ ... Wassertiefe zur Zeit t in m

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 6 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie die Wassertiefe um 8:20 Uhr morgens. *[1 Punkt]*
– Geben Sie an, welche Zeitpunkte im gegebenen Sachzusammenhang durch die Lösungen der Gleichung $H'(t) = 0$ berechnet werden. *[1 Punkt]*

LÖSUNG: Aufgabe "Ebbe und Flut"

Aufgabenteil a)

$A := 6$ $B := 6$

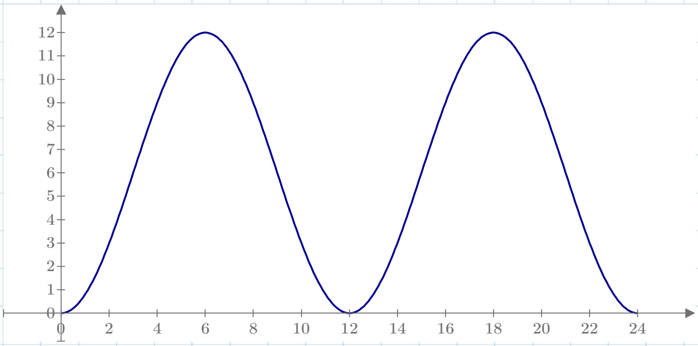
$T := 12$ $\omega := \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow \frac{\pi}{6}$

$t_0 := 3$ $\varphi := -t_0 \cdot \omega \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Zur Kontrolle wird nun $h(t) := A + B \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ graphisch in [0 | 24] dargestellt

$t := 0, 0.1 .. 24$

$h(t)$



t

Aufgabenteil b)

$H(t) := 6\ m + 1.8\ m \cdot \cos(0.507 \cdot t)$ $\quad T := \dfrac{2 \cdot \pi}{0.507} = 12.393$ $\quad b := 12.393\ \ a := 0$

- Die Zahl 6 gibt die mittlere Wassertiefe in einem Tafenbecken an.

Dies kann man zeigen, indem man den arithmetischen Mittelwert mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung berechnet, wobei über die Periode von H(t) integriert wird: $\dfrac{1}{b-a} \cdot \displaystyle\int_a^b H(t)\,\mathrm{d}t = 6\ m$

- Zuerst wird 8:20 in Stunden umgerechnet, nämlich:

$hms := \text{“8:20:00”}$ Definieren der Zeichenfolge der Uhrzeit 8:20

$Dauer := hhmmss(hms) = 8.333\ hr$ Umrechnen der Uhrzeit "8 Stunden 20 Minuten 0 Sekunden" in eine Uhrzeit im Dezimalformat.

$H\left(\dfrac{Dauer}{hr}\right) = 5.157\ m$ Die Standardeinheit ist "Sekunde", daher muss im Argument durh "hr" dividiert werden.

- Durch $H'(t) = 0$ werden die Extremstellen (Zeitpunkte nach Mitternacht) berechnet, in denen die Wassertiefe maximal bzw. minimal ist.

AUFGABE: "Bügeleisen" (Cluster 1, 3)

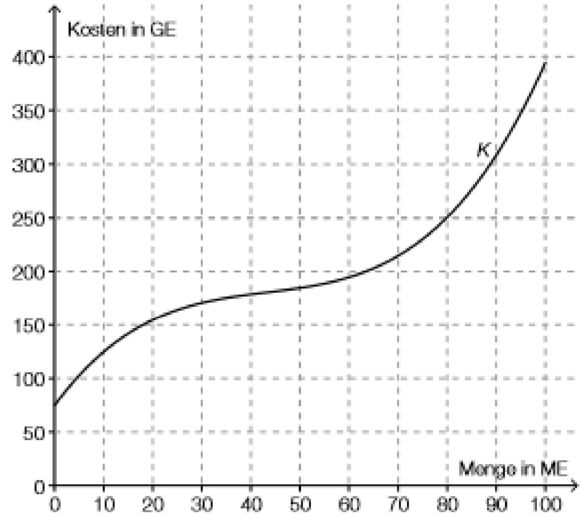
Bügeleisen

Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.

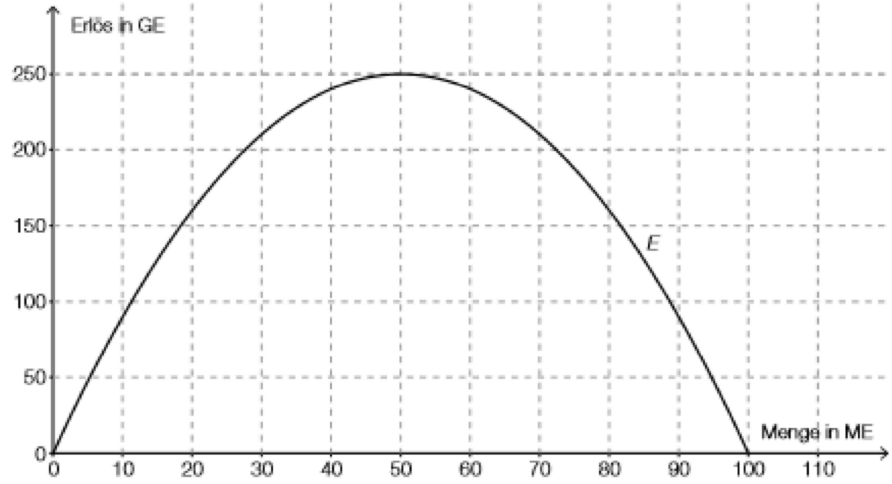


Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist. *[1 Punkt]*

b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind. *[1 Punkt]*
– Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind. *[1 Punkt]*

c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss. *[1 Punkt]*
– Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird. *[1 Punkt]*

LÖSUNG: Aufgabe "Bügeleisen"

Aufgabenteil a)

- Im Intervall [0 | ca. 45] ist der Kostenverlauf degressiv.

Die Krümmung κ einer Funktion an einer Stelle x wird folgendermaßen berechnet:
$\kappa(x) = \dfrac{y''(x)}{\sqrt{\left(1+y'(x)^2\right)^3}}$. Da der Radikand der Wurzel immer positiv ist, hängt das Vorzeichen der Krümmung vom Vorzeichen von $y''(x)$ ab. Daher genügt es, zur Feststellung ob ein degressives Wachstum vorliegt, das Intervall in dem $y''(x) < 0$ zu ermitteln.

$$K(x) := 0.001 \cdot x^3 - 0.13 \cdot x^2 + 6.2 \cdot x + 75$$

$$K''(x) < 0 \xrightarrow{\substack{solve\,,x \\ float\,,3 \\ assume\,,x \geq 0}} 0.0 \leq x < 43.3$$

Mit Hilfe von Mathcad kann man diie Ungleichung $K''(x) < 0$ lösen, siehe nebenstehende Berechnung.

Aufgabenteil b)

- Die Durchnittskostenfunktion ist geben durch: $K_{quer}(x) := \frac{K(x)}{x}$.

  Zur Berechnung der minimalen Stückkosten setzt man $K_{quer}'(x) = 0$

$$K_{quer}'(x) = 0 \xrightarrow{simplify} 0.002 \cdot x - \frac{75.0}{x^2} - 0.13 = 0 \xrightarrow[float,3]{solve,x} \begin{bmatrix} 72.2 \\ -3.6 + 22.5i \\ -3.6 - 22.5i \end{bmatrix}$$

Die reelle Lösung $x_m := 72.2$ ist die gesuchte Produktionsmenge.
Zur Überprüfung, ob ein Minimum vorliegt, bildet man $K''(x_m) = 0.173$.
Da $K''(x_m) > 0$ liegt für x_m ein Minimum vor.

- Die Grenzkostenfunktion ist mit $K'(x)$ gegeben.

  Es ist zu zeigen, dass $K'(x_m) = K_{quer}'(x_m) \rightarrow 0$

Der Vergleichsoperator ▯=▯ liefert 1, wenn die Aussage wahr ist, sonst 0.
In diesem Fall kommt 0 heraus, da aufgrund der Rundung die beiden Werte nicht gleich sind.

$K'(x_m) = 3.067 \quad K_{quer}(x_m) = 3.066$

Die beiden Werte sind bis auf 2 Nachkommastellen gleich, daher kann man davon ausgehen, dass die Aussage richtig ist.

Aufgabenteil c)

$\mathrm{clear}(a, b)$

$E(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x$

- a muss negativ sein, da die Parabel nach unten offen.

- Bestimmung der Funktionsgleichung für $E(x)$

$$[a \;\; b] := \begin{bmatrix} E(50) = 250 \\ E(100) = 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2500 \cdot a + 50 \cdot b = 250 \\ 10000 \cdot a + 100 \cdot b = 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{solve, a, b} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 10 \end{bmatrix}$$

$$E(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x \rightarrow 10 \cdot x - \frac{x^2}{10}$$

- Berechnung der Produktionsmenge für einen Gewinn von 50 GE

$$G(x) := E(x) - K(x) \rightarrow 10 \cdot x + -6.2 \cdot x + -0.001 \cdot x^3 + 0.13 \cdot x^2 - \frac{x^2}{10} - 75$$

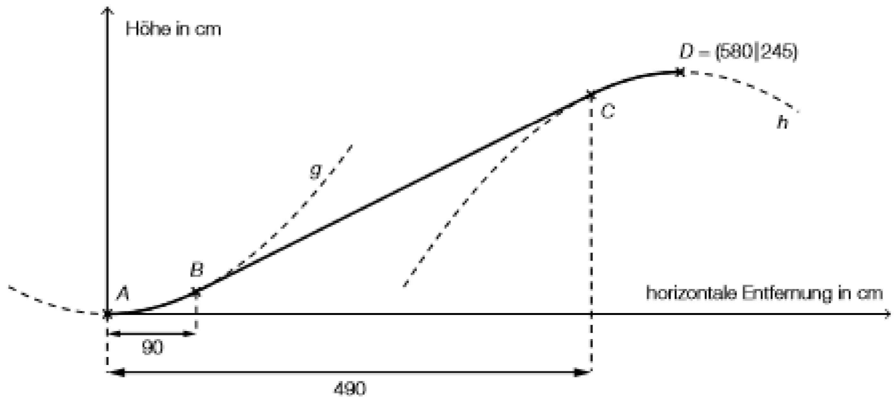
$$G(x) = 50 \xrightarrow{solve, x} \begin{bmatrix} 34.179735137482175327 \\ 58.420505975890971449 \\ -62.600241113373146775 \end{bmatrix}$$

Bei Produktionsmengen von ca $x_1 = 34.18$ und $x_2 = 58.42$ liegen 50 GE Gewinn vor.

AUFGABE: "Rolltreppen" (Cluster 1, 5)

Rolltreppen

a) Die nachstehende Abbildung zeigt den schematischen Verlauf einer Rolltreppe. Dieser Verlauf setzt sich aus 2 Parabelstücken (Graphen der Funktionen g und h) zwischen den Punkten A und B bzw. C und D sowie einem geradlinig verlaufenden Stück zwischen den Punkten B und C zusammen. Die Übergänge in den Punkten B und C erfolgen knickfrei (das bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben).



Für die Funktion g gilt:

$$g(x) = \frac{1}{360} \cdot x^2$$

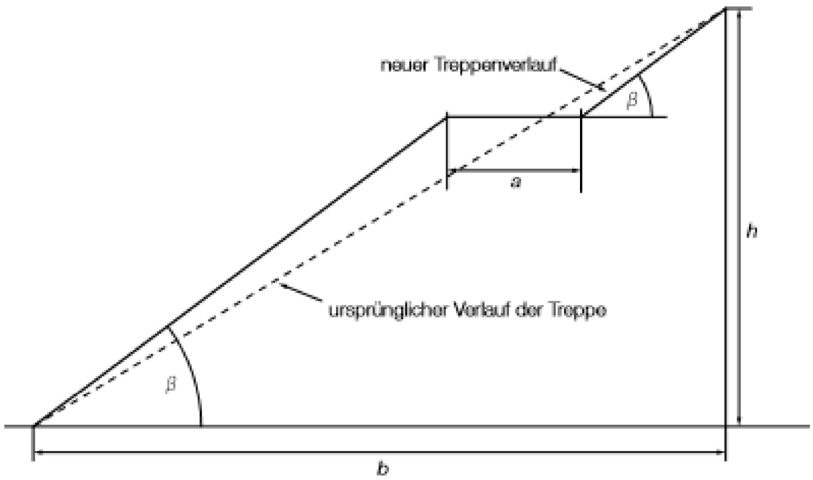
x ... horizontale Entfernung von der Einstiegsstelle in cm
$g(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

– Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion g im Punkt B eine Steigung von 50 % aufweist. *[1 Punkt]*

Bei der Ausstiegsstelle (Punkt D) verläuft die Rolltreppe waagrecht.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ermittelt werden können. *[2 Punkte]*

b) Parallel zu einer Rolltreppe verläuft eine Treppe.
Bei der Erneuerung der Treppe soll ein Treppenabsatz eingebaut werden (siehe nachstehende Abbildung).



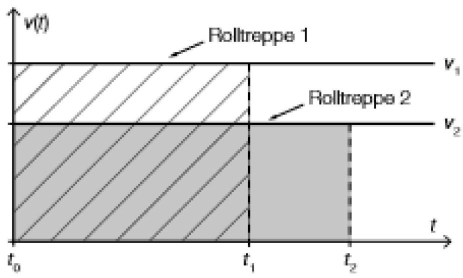
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Steigungswinkels β aus b, h und a.

$\beta =$ ____________________ *[1 Punkt]*

Der Steigungswinkel der ursprünglichen Treppe war kleiner als 45°.

– Erklären Sie, welche Bedingung für a gelten muss, damit auch β kleiner als 45° ist. *[1 Punkt]*

c) Im nachstehenden Diagramm sind die Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen v_1 und v_2 der Stufen zweier Rolltreppen dargestellt.



– Interpretieren Sie, was es im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet, dass die beiden gekennzeichneten Flächeninhalte gleich groß sind. *[1 Punkt]*

LÖSUNG: Aufgabe "Rolltreppen"

Aufgabenteil a)

$\mathbf{clear}(a, b, c)$

$g(x) := \frac{1}{360} \cdot x^2$

$g'(90) = 50\%$

Damit ist gezeigt, dass die an der Stelle B 50% beträgt.

$h(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$\begin{bmatrix} h'(490)=\frac{1}{2} \\ h'(580)=0 \\ h(580)=245 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 980\cdot a+b=\frac{1}{2} \\ 1160\cdot a+b=0 \\ 336400\cdot a+580\cdot b+c=245 \end{bmatrix}$$

Aufgabenteil b)

$tan(\beta)=\frac{h}{b-a}$ daraus: $\beta=atan\left(\frac{h}{b-a}\right)$

Da $\frac{h}{b-a}<1$ sein muss, gilt: $h<b-a$ und daher $a<b-h$

Aufgabenteil c)

- Die Stufen von Rolltreppe 1 legen im Zeitintervall [t0; t1] den gleichen Weg zurück wie die Stufen von Rolltreppe 2 im Zeitintervall [t0; t2].

  Die Beschleunigung ist jeweils 0.

AUFGABE: "Benutzerfreundlichkeit von Websites" (Cluster 4, 5)

Benutzerfreundlichkeit von Websites

a) Ein für die Zeitoptimierung wichtiges Kriterium ist die Anzahl der Buttons, die auf einer Internetseite angeklickt werden können.

Das *Gesetz von Hick* beschreibt die Zeit, die man benötigt, um sich für einen von n Buttons zu entscheiden:

$t(n) = a + b \cdot \log_2(n)$

n ... Anzahl der Buttons
$t(n)$ ... Entscheidungszeit bei n Buttons in Millisekunden (ms)
a, b ... positive Konstanten in ms

– Ermitteln Sie anhand des Gesetzes von Hick, um wie viel sich die Entscheidungszeit vergrößert, wenn man die Anzahl der Buttons n verdoppelt. *[1 Punkt]*

b) Die Anzahl der täglichen Zugriffe auf eine bestimmte Website kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Eine Zufallsstichprobe von 10 Werten wurde erhoben:

9730	9932	8960	10488	9842	10340	10234	9549	9751	10190

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung dieser Zufallsstichprobe. *[1 Punkt]*
– Bestimmen Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Normalverteilung. *[2 Punkte]*

LÖSUNG: Aufgabe "Benutzerfreundlichkeit von Websites"

Aufgabenteil a)

$t(n) := a + b \cdot log(n,2)$

Mit $log(n,2)$ wird der Logarithmus von n zur Basis 2 definiert.

$t(2 \cdot n) \rightarrow a + \frac{b \cdot \ln(2 \cdot n)}{\ln(2)}$

$t(2 \cdot n) = t(n) + t_{Zuwachs} \xrightarrow{solve,\, t_{Zuwachs},\, simplify} b$

Der Zuwachs beträgt b ms

Aufgabenteil a)

$X := [9730\ \ 9932\ \ 8960\ \ 10488\ \ 9842\ \ 10340\ \ 10234\ \ 9549\ \ 9751\ \ 10190]$

Eine einzeilge Matrix erhält man durch "Strg M" (für Erzeugen einer Matrixklammer). Weiterspringen auf das nächste Matixelement mit"Shift Leertaste".

$n := \text{length}(X^{T}) = 10$

$\text{length}(Z)$ greift auf einen Spaltenvektor Z zu, daher muss X transponiert werden (durch "Strg Shift t").

$x_m := \text{mean}(X^{T}) = 9901.6$

$s := \text{Stdev}(X^{T}) = 446.874$

Mit $\text{Stdev}(Z)$ wird die Stichprobenstandardabweichung berechnet.

Aufgabenteil b)

$\alpha := 5\%$

$\mu_u := x_m - \left|\text{qt}\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)\right| \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 9581.926$

$\mu_0 := x_m + \left|\text{qt}\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)\right| \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 10221.274$

$\text{qt}(\text{p},\text{f})$ Übergibt die inverse kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung (Student - t Verteilung) für die Wahrscheinlichkeit p, wobei $\text{f} = n-1$ die Freiheitsgrade angibt.

Das Konfidenzintervall für μ ist gegeben durch [9582 | 10221]

AUFGABE: "Bewegte elektrische Ladungen" (Cluster 2)

Bewegte elektrische Ladungen

a) Bei der Berechnung der Stromstärken in einem Gleichstromnetzwerk erhält man folgende Gleichungen:

$I_1 + I_2 = -I_3$ und $8 \cdot I_1 - 4 \cdot I_2 + 3 = 0$ und $2 - 5 \cdot I_3 + 4 \cdot I_2 = 0$

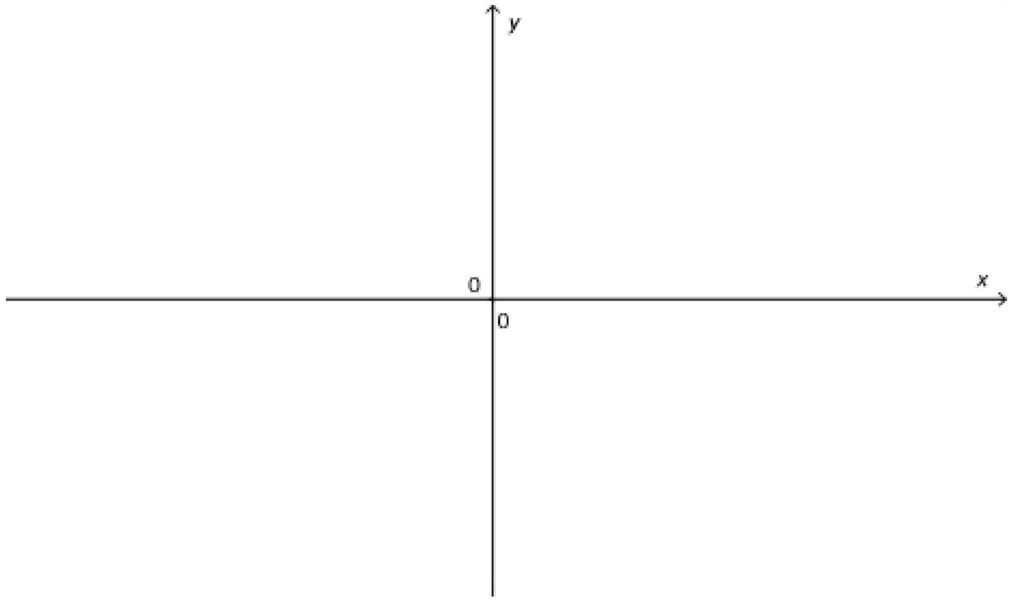
– Übertragen Sie das Gleichungssystem in Matrixschreibweise. *[1 Punkt]*

b) Zwei Wechselströme gleicher Frequenz werden durch die Funktionen i_1 und i_2 beschrieben:

$i_1(t) = 4 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t + 0{,}75)$
$i_2(t) = 3 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t - 0{,}5)$

t ... Zeit in Sekunden
$i_1(t)$, $i_2(t)$ ... Stromstärke zur Zeit t in Ampere

– Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem die beiden Ströme und den Gesamtstrom $i_1 + i_2$ in einem Zeigerdiagramm dar. Wählen Sie eine passende Skalierung der Achsen. *[2 Punkte]*



Zur Berechnung der Amplitude A des Gesamtstroms $i_1 + i_2$ kann der Cosinussatz verwendet werden:

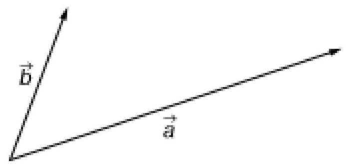
$A = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(\alpha)}$

– Kennzeichnen Sie im von Ihnen erstellten Zeigerdiagramm den in der obigen Formel verwendeten Winkel α. *[1 Punkt]*

c) Eine Definition des Skalarprodukts zweier Vektoren $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$ in $\mathbb{R}^2$ lautet wie folgt:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, wobei φ mit $0° \leq \varphi \leq 180°$ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist

– Veranschaulichen Sie $|\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ in der nachstehenden Skizze. *[1 Punkt]*



– Geben Sie an, für welche Winkel φ das Skalarprodukt zweier Vektoren in $\mathbb{R}^2$ negativ ist. *[1 Punkt]*

d) Auf ein bewegtes Elektron mit der elektrischen Elementarladung e wirkt die sogenannte Lorentz-Kraft $\vec{F}$. Dabei gilt:

$\vec{F} = -e \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

e ... Elementarladung
$\vec{E}$ ... elektrische Feldstärke
$\vec{v}$ ... Geschwindigkeit
$\vec{B}$ ... magnetische Flussdichte

– Zeigen Sie, dass $\vec{F} = 0$ gilt, wenn $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$ ist. *[1 Punkt]*

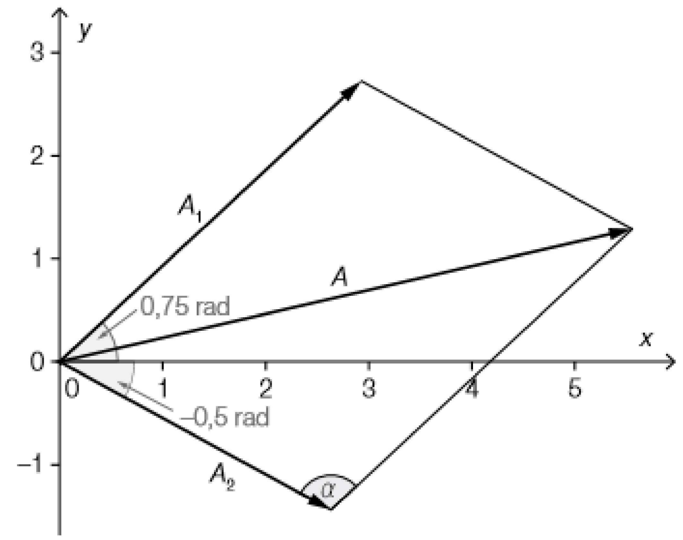
LÖSUNG: Aufgabe "Bewegte elektrische Ladungen"

Aufgabenteil a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

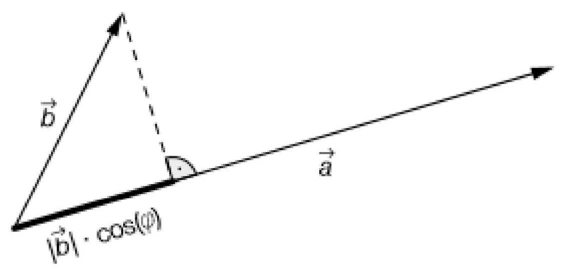
Aufgabenteil b)

Zeigerdiagramm:
($A_1 = 4$ und $A_2 = 3$ sind die Amplituden der Ströme i_1 und i_2, A ist die Amplitude des Gesamtstroms $i_1 + i_2$)



Der gesuchte Winkel α ist im obigen Diagramm eingezeichnet.
Der gesuchte Winkel α kann auch im oberen Eckpunkt des Paralellogramms eingezeichnet werden.

Aufgabenteil c)



- Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist negativ, wenn für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren gilt: α Element aus]90° | 180°]

Aufgabenteil d)

$\vec{F} = -e \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ mit $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{B}$ erhält man $\vec{F} = \vec{0}$