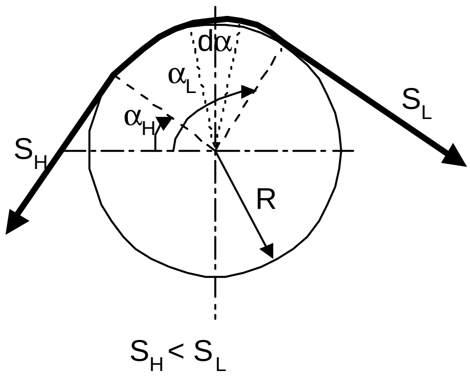
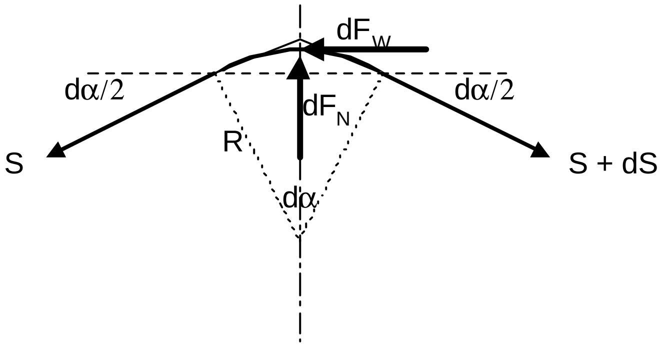
EULER-EYTELWEINsche Umschlingungsreibung

Die Differenzialgleichung ist sehr einfach und wird des Öfteren als Übungsaufgabe verwendet. Die Herleitung ist jedoch relativ selten in der Literatur zu finden. Da sie jedoch interessante Einblicke in die Denkweise zum Erstellen von Differenzialgleichungen gibt, wird die Herleitung ausführlich beschrieben.

Zur Herleitung der entsprechenden Differenzialgleichung dient folgende Skizze.





Ein Seil wird um einen kreisförmigen Poller geschlungen. Der Kontaktwinkel zwischen Poller und Seil ist $\alpha = \alpha_L - \alpha_H$ (ist **immer** im **Bogenmaß** anzugeben). Die Indizes H und L weisen dabei auf Halte - bzw. Lastseite hin. Da zwischen Seil und Poller Reibung herrscht, ist es klar, dass im Gleichgewicht eine am rechten Ende ziehende Last S_L größer als eine am linken Ende haltende Kraft S_H sein muss.

Zur quantitativen Analyse wird berechnet, wie S_L, S_H und die Reibungskräfte zusammenhängen. Dazu betrachtet man ein kleines Stück des Seils an der Stelle α , welches durch die Länge $R d\alpha$ gekennzeichnet ist und untersucht das statische Gleichgewicht an diesem Seilstück.

Rechts liegt ein ein wenig mehr Kraft (S + dS) an als an der linken Seite (S). Das Seil würde sich nach rechts bewegen, wenn nicht der Reibungswiderstand dF_W dieser Bewegung entgegenwirken würde.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen erhält man daher:

a) $\sum_x F = 0$ Summe aller Kräfte in x-Richtung ist 0 $-S\cdot\cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right) + (S + dS)\cdot\cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right) - dF_W = 0$

b) $\sum_x F = 0$ Summe aller Kräfte in y-Richtung ist 0 $-S\cdot\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) - (S + dS)\cdot\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) + dF_N = 0$

Der Zusammenhang zwischen dF_N und dF_W ist durch das *Coulomb´* sche Reibungsgesetz gegeben: $dF_W = \mu\cdot dF_N$ mit μ als Reibungskoeffizient.

Da $d\alpha$ sehr klein ist, darf man die trigonometrischen Ausdrücke $\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \sim \frac{d\alpha}{2}$ und $\cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \sim 1$ setzen (in Potenzreihen entwickeln und nach dem ersten Glied abbrechen.

Aus a) erhält man: $dS = dF_W = \mu\cdot dF_N$

In b) einsetzen $-S\cdot\frac{d\alpha}{2} - (S + dS)\cdot\frac{d\alpha}{2} + dF_N = 0$ liefert $dF_N - S\cdot d\alpha$ (unter Berücksichtigung, dass $dS\cdot d\alpha \sim 0$ gesetzt werden kann, da beide Größen << 1 sind). Ersetzen von dF_N durch $\frac{dS}{\mu}$ ergibt die Differenzialgleichung: $\frac{dS}{S} = \mu\cdot d\alpha$

Für α = 0 erhält man S(0) = S_H

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot d\alpha \qquad \int \frac{1}{S}\, dS = \mu \cdot \int 1\, d\alpha \text{ auflösen}, S \;\rightarrow \exp(\mu \cdot \alpha) \qquad S = C \cdot e^{\mu \cdot \alpha} \;\left|\begin{array}{l}\text{ersetzen}, \mu = 0 \\ \text{ersetzen}, S = S_H\end{array}\right. \rightarrow S_H = C$$

Man erhält: $S(\alpha) = S_H \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$, wobei $\alpha = \alpha_L - \alpha_H$ der "Auflagewinkel" ist. S(α) bedeutet dabei S_L, wenn α einen bestimmten Umschlingungswinkel annimmt.

Ein zweiter Lösungsweg ergibt sich, wenn man S von S_H bis S_L und α von α_H bis α_L integriert

$$\int_{S_H}^{S_L} \frac{1}{S}\, dS = \mu \cdot \int_{\alpha_H}^{\alpha_L} 1\, d\alpha \text{ auflösen}, S_L \;\rightarrow \exp(\mu \cdot \alpha_L - \mu \cdot \alpha_H) \cdot S_H$$

Die Gleichung $S(\alpha) = S_H \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$ wird in der Literatur sehr oft in der Form $S_L = S_H \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$ geschrieben. Daraus lässt sich nach Bedarf auch die Größe der Haltekraft berechnen.

Will man eine Last L durch eine Kraft F hochziehen (mit geringer Geschwindigkeit), so kann man auch diese Gleichung $S(\alpha) = S_H \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$ verwenden. Man muss nur beachten, dass die Gleitreibungszahl μ verwendet wird und anstatt S_H die Last L eingesetzt wird. (S(α) = F)