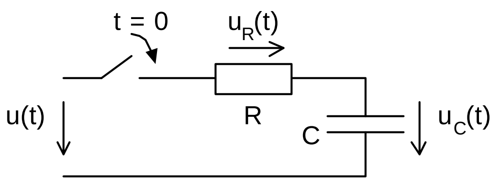
RC Glied

An einem RC Glied mit R, C liegt eingangsseitig die Spannung u(t) an. Zum Zeitpunkt t = 0 s wird der Schalter geschlossen. Der Kondensator ist anfangs ungeladen, so dass gilz: $u_C(0) = 0$.

Die Differenzialgleichung für die Kondensatorspannung ist aufzustellen und daraus der zeitliche Verlauf von $u_C(t)$ zu ermitteln.



Die Differenzialgleichung erhält man aus der 2. KIRCHHOFF´schen Regel

Für $t \geq 0 \cdot s$ ergibt sich: $\mathbf{u_R(t) + u_C(t) = u(t)}$

$u_R(t) = R \cdot i(t)$ (Ohmsches Gesetz)

daraus erhält man $u_R(t) = R \cdot \frac{d}{dt} q(t)$ wobei q(t) die Ladung bedeutet.

mit $q(t) = C \cdot u_C(t)$ ergibt sich: $u_R(t) = R \cdot \frac{d}{dt}\left(C\, u_c(t)\right) = R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} u_c(t)$

Eingesetzt in die 2. KIRCHHOFF Regel erhält man die Differenzialgleichung: $R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) = u(t)$ oder kurz

$\tau \cdot u'_C + u_C = u$ mit $\tau = R \cdot C$

Zuerst wird die homogene Lösung bestimmt:

$\tau \cdot u'_C + u_C = 0$ man erhält: $\int \frac{1}{u_C}\, du_C = -\frac{1}{\tau} \cdot \int 1\, dt \rightarrow \ln(u_C) = \frac{-1}{\tau} \cdot t$

$$\ln(u_C) = \frac{-1}{\tau} \cdot t + \ln(K) \;\Big|\; \begin{matrix} \text{auflösen}, u_C \\ \text{entwickeln} \end{matrix} \rightarrow \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{\tau} \cdot t\right)} \cdot K$$

$\boxed{u_C(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}}$ Das ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL

Die gesamte Lösung hängt nun von der Art von u(t) ab.

1. Fall: $u(t) = u_0 = \text{konstant}$

2. Fall $u(t) = k \cdot t$

3. Fall $u(t) = u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

1. Fall: $u(t) = u_0 = \text{konstant}$

Wir wählen den Ansatz: $u_p = a$ u_p ist eine partikuläre Lösung

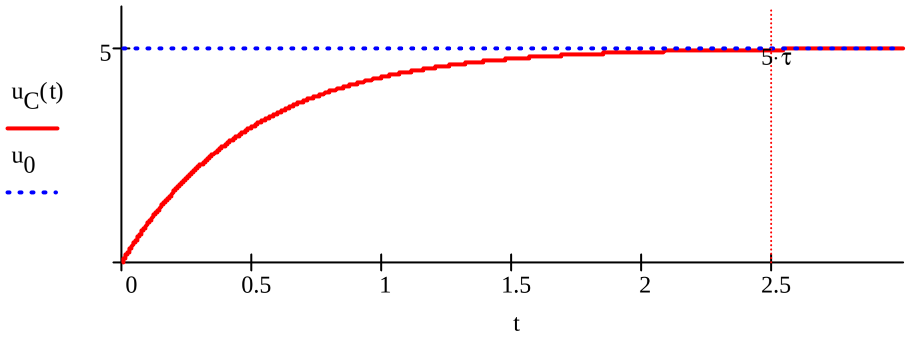
einsetzen in DGL liefert: $\tau \cdot \frac{d}{dt} a + a = u_0 \rightarrow a = u_0$

Anfangsbedingung: $u_C(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + u_0 \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, u_C(t) = 0 \\ \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{auflösen}, K \end{array} \right. \rightarrow -u_0$

Damit lautet die gesamte Lösung: $u_C(t) = -u_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + u_0 \text{ sammeln}, u_0 \rightarrow u_C(t) = \left(-\exp\left(\frac{-1}{\tau} \cdot t\right) + 1\right) \cdot u_0$

Graphische Darsellung für spezielle Werte: $R := 10 \cdot k\Omega$ $C := 50\mu F$ $u_0 := 5 \cdot V$ $\tau := R \cdot C$ $\tau = 0.5\,s$

$u_C(t) := \left(-\exp\left(\frac{-1}{\tau} \cdot t\right) + 1\right) \cdot u_0$ $t := 0 \cdot s, 0.001 \cdot s .. 6 \cdot \tau$



2. Fall: $u(t) = k \cdot t$ $\qquad t := t \qquad \tau := \tau \qquad u_C(t) := u_C(t)$

Wir wählen den Ansatz: $u_p = a \cdot t + b$ $\qquad u_p$ ist eine partikuläre Lösung

einsetzen in DGL liefert: $\tau \cdot \frac{d}{dt}(a \cdot t + b) + (a \cdot t + b) = k \cdot t \rightarrow \tau \cdot a + a \cdot t + b = k \cdot t$

Koeffizientenvergleich liefert:

Vorgabe

$\tau \cdot a + b = 0$

$a = k$

$\text{Suchen}(a, b) \rightarrow \begin{pmatrix} k \\ -\tau \cdot k \end{pmatrix}$

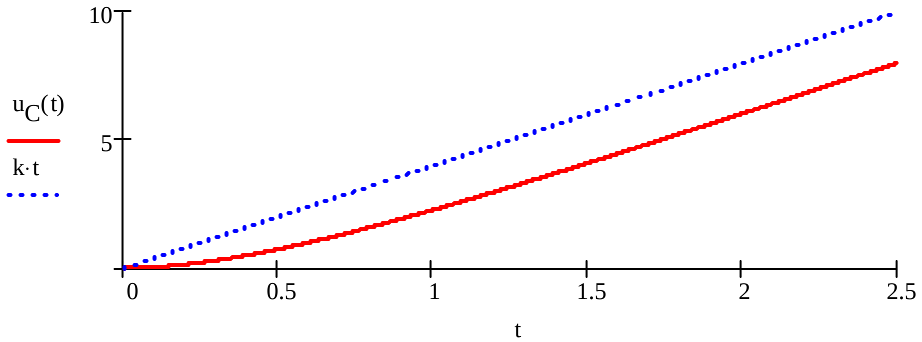
Damit erhält man die partikuläre Lösung: $u_p = k \cdot t - \tau \cdot k$ sammeln, k $\rightarrow u_p = (t - \tau) \cdot k$

Anfangsbedingung: $u_C(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + (t - \tau) \cdot k \;\left|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen}, u_C(t) = 0 \\ \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{auflösen}, K \end{array} \right. \rightarrow \tau \cdot k$

Damit lautet die gesamte Lösung: $u_C(t) = k \cdot \tau \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + (t - \tau) \cdot k$

Graphische Darsellung für spezielle Werte: $R := 10 \cdot k\Omega \qquad C := 50\mu F \qquad k := 4 \cdot \frac{V}{s} \qquad \tau := R \cdot C \qquad \tau = 0.5\,s$

$u_C(t) := k \cdot \tau \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + (t - \tau) \cdot k \qquad t := 0 \cdot s, 0.001 \cdot s .. 6 \cdot \tau$



3. Fall: $u(t) = u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ $t := t$ $\tau := \tau$ $u_C(t) := u_C(t)$ $u_0 := u_0$

Wir wählen den Ansatz: $u_p = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$ u_p ist eine partikuläre Lösung

einsetzen in DGL liefert: $\tau \cdot \frac{d}{dt}(a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)) + (a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)) = u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \;\Big|\; \begin{matrix} \text{sammeln}, \cos(\omega \cdot t) \\ \text{sammeln}, \sin(\omega \cdot t) \end{matrix} \rightarrow (-\tau \cdot$

Koeffizientenvergleich liefert:

Vorgabe

$$-\tau \cdot a \cdot \omega + b = 0$$

$$\tau \cdot b \cdot \omega + a = u_0$$

$$\text{Suchen}(a, b) \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \\ \tau \cdot \dfrac{u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \omega \end{pmatrix}$$

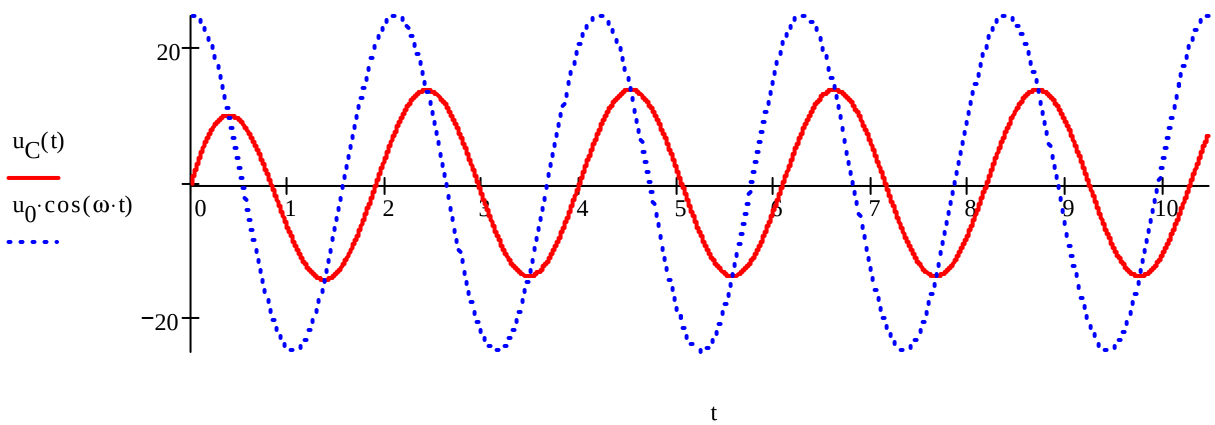
Damit erhält man die partikuläre Lösung: $u_p = \dfrac{u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \tau \cdot \dfrac{u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Anfangsbedingung: $u_C(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + \left(\dfrac{u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \tau \cdot \dfrac{u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \right) \;\Bigg|\; \begin{matrix} \text{ersetzen}, u_C(t) = 0 \\ \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{auflösen}, K \end{matrix} \rightarrow \dfrac{-u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1}$

Damit lautet die gesamte Lösung: $u_C(t) = \dfrac{-u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + \left(\dfrac{u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \tau \cdot \dfrac{u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \right)$

Graphische Darsellung für spezielle Werte: $R := 10 \cdot k\Omega$ $C := 50\mu F$ $\tau := R \cdot C$ $u_0 := 25 \cdot V$ $\omega := 3 \cdot s^{-1}$ $T := \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}$

$$u_C(t) := \dfrac{-u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + \left(\dfrac{u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \tau \cdot \dfrac{u_0}{\tau^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \right) \qquad t := 0 \cdot s, 0.001 \cdot s .. 5T$$



Um die Form $A\cdot\sin(\omega\cdot t + \phi)$ zu erhalten, verwenden wir die bekannten ZUsammenhänge: $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\phi = \mathrm{atan}\left(\frac{a}{b}\right)$

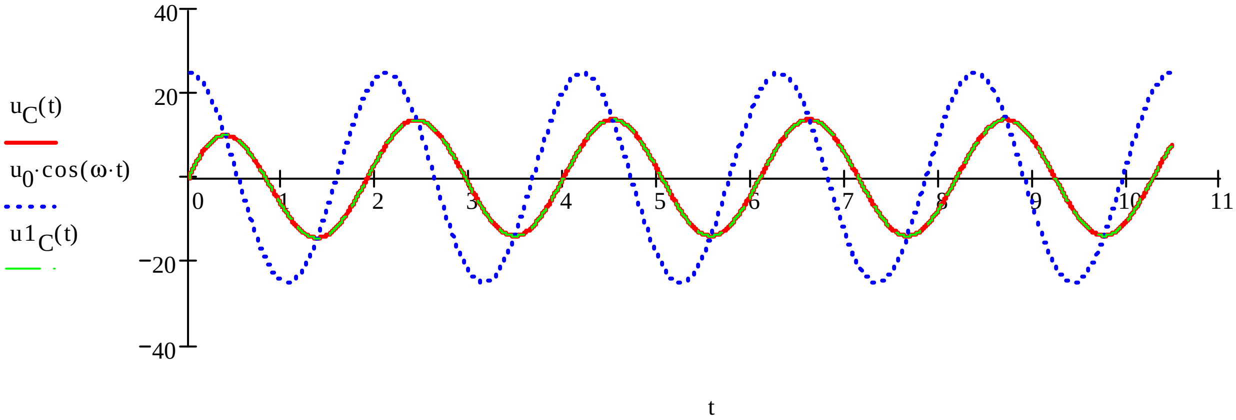
$$A := \sqrt{\left(\frac{u_0}{\tau^2\cdot\omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\tau\cdot\frac{u_0}{\tau^2\cdot\omega^2 + 1}\cdot\omega\right)^2}$$

$A = 13.868\,\mathrm{V}$

$$\phi := \mathrm{atan}\left(\frac{\frac{u_0}{\tau^2\cdot\omega^2+1}}{\tau\cdot\frac{u_0}{\tau^2\cdot\omega^2 + 1}\cdot\omega}\right)$$

$\phi = 0.588$

$$u1_C(t) := \frac{-u_0}{\tau^2\cdot\omega^2 + 1}\cdot e^{\frac{-t}{\tau}} + A\cdot\sin(\omega\cdot t + \phi)$$



zurück zu den allgemeinen Grundlagen

$$\cdot a\cdot\omega + b)\cdot\sin(\omega\cdot t) + (\tau\cdot b\cdot\omega + a)\cdot\cos(\omega\cdot t) = u_0\cdot\cos(\omega\cdot t)$$