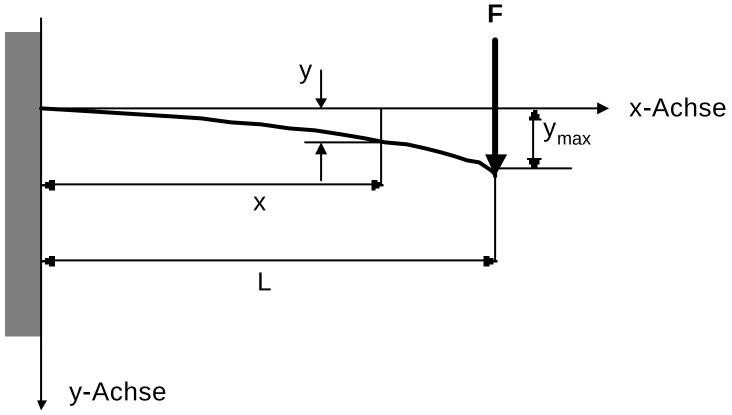
Biegelinie eines Kragträgers

Die Differenzialgleichung der Biegelinie $y''(x) = \frac{-M_b(x)}{E \cdot I}$ soll für einen Kragbalken der Länge L mit Einzellast F am Ende gelöst werden. ($M_b(x)$ .. Biegemoment)

Bestimmung von $M_b(x)$



Das Moment an der Stelle x ergibt sich zu

$M_b(x) = -F \cdot (L - x)$

Die Randbedingungen lauten:

$y(0) = 0$

$y'(0) = 0$

$y' = \int y''\,dx$ daraus ergibt sich $y' = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int F \cdot (L - x)\,dx \rightarrow y' = \frac{1}{E \cdot I} \cdot F \cdot \left(L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2\right)$

und man erhält $y' = \frac{1}{E \cdot I} \cdot F \cdot \left(L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + C_1\right)$

$y = \int y'\,dx$ weiters $y = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \int L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + C_1\,dx \rightarrow y = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 + C_1 \cdot x\right)$

Die allgemeine Lösung lautet daher: $\boxed{y(x) = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2\right)}$

Durch einsetzen der Randbedingungen bekommt man die Lösung des Randwertproblems:

Vorgabe

$y(x) = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2\right)$ $y'(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot F \cdot \left(L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + C_1\right)$

$$\text{Lös} := \text{Suchen}(C_1, C_2) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, y(x) = 0 \\ \text{ersetzen}, y'(x) = 0 \\ \text{ersetzen}, x = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist nun: $\boxed{y(x) = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3\right)}$

Auf der nächsten Seite ist der Graph für speziell Werte für E, I, L und F dargestellt.

$L := 3 \cdot m$ $\quad x := 0 \cdot m, 0.01 \cdot m .. L$ $\quad E := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$ $\quad I := 5700 \cdot cm^4$ $\quad F := 5000 \cdot N$

$$y(x) := \frac{-F}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 \right)$$