Freier Fall eines Körpers der Masse m_a in einem zähen Medium (ohne Auftrieb)

Die Differenzialgleichung für diesen Vorgang erhält man aus der Dynamik von Bewegungen und lautet (berücksichtigt man den Auftrieb, so kommt noch eine Konstante (Auftriebskraft) dazu):

Anfangsbedingung: i) v(0) = 0 ii) v(0) = 20 ms^{-1}

$F_a + F_R + (F_A) = G$

F_a .....resultierende Kraft

F_R .... Reibungskraft im zähen Medium (i zähen medium proportional zur Geschwindigkeit v

G ...... Gewichtskraft (F_A ..... Auftriebskraft)

$$m_a \cdot \frac{d}{dt} v = m_a \cdot g - k \cdot v \qquad \text{oder} \qquad \frac{d}{dt} v + \frac{k}{m_a} \cdot v = g$$

a) Berechnung von v_h (allgemeine Lösung der homogenen Gleichung)

$$\int \frac{1}{v}\, dv = -\frac{k}{m_a} \cdot \int 1\, dt \text{ vereinfachen } \rightarrow \ln(v) = \frac{-k}{m_a} \cdot t$$

Trennung der Variablen

$$\ln(v) = -\frac{k}{m_a} \cdot t + \ln(C) \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, v \\ \text{entwickeln}, C \end{array} \rightarrow \frac{1}{\exp\left(\frac{k}{m_a} \cdot t\right)} \cdot C$$

Die homogene Lösung lautet: $\boxed{v_h(t) = C \cdot e^{\frac{-k}{m_a} \cdot t}}$

b) Berechnung von v_p (partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung) mit Hilfe der Variation der Konstanten.

$$v_p(t) = C(t) \cdot e^{\frac{-k}{m_a} \cdot t}$$

nach t differenzieren ergibt

$$\frac{d}{dt} v_p(t) = \frac{d}{dt} C(t) \cdot e^{\frac{-k}{m_a} \cdot t} \rightarrow \frac{d}{dt} v_p(t) = \frac{d}{dt} C(t) \cdot \exp\left(\frac{-k}{m_a} \cdot t\right) - C(t) \cdot \frac{k}{m_a} \cdot \exp\left(\frac{-k}{m_a} \cdot t\right)$$

somit erhätl man

$$\frac{d}{dt} C(t) \cdot \exp\left(\frac{-k}{m_a} \cdot t\right) - C(t) \cdot \frac{k}{m_a} \cdot \exp\left(\frac{-k}{m_a} \cdot t\right) + \frac{k}{m_a} \cdot C(t) \cdot e^{\frac{-k}{m_a} \cdot t} = g$$

vereinfachen ergibt

$$\frac{d}{dt} C(t) \cdot \exp\left(\frac{-k}{m_a} \cdot t\right) = g$$

und weiter

$$\int \frac{d}{dt} C(t)\, dt = g \cdot \int \exp\left(\frac{k}{m_a} \cdot t\right) dt \text{ vereinfachen } \rightarrow C(t) = \frac{g}{k} \cdot m_a \cdot \exp\left(\frac{k}{m_a} \cdot t\right)$$

einsetzen in $v_p(t)$

$$v_p(t) = C(t) \cdot e^{\frac{-k}{m_a} \cdot t} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen}, C(t) = \frac{g}{k} \cdot m_a \cdot \exp\left(\frac{k}{m_a} \cdot t\right) \\ \text{vereinfachen} \end{array} \rightarrow v_p(t) = \frac{g}{k} \cdot m_a$$

$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$

Anwenden der Superposition $y = y_h + y_p$ ergibt die allgemeine Lösung

$$\boxed{v(t) = C \cdot e^{\frac{-k}{m_a} \cdot t} + \frac{g}{k} \cdot m_a}$$

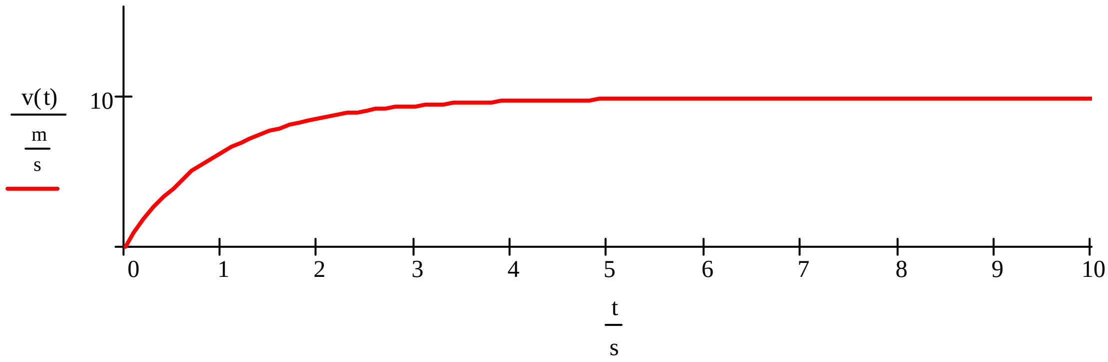
i) Berechnung von C gemäß der Anfangsbedingung: $v(t) = C \cdot e^{\frac{-k}{m_a} \cdot t} + \frac{g}{k} \cdot m_a$ $\left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, v(t) = 0 \\ \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{auflösen}, C \end{array} \right. \rightarrow \frac{-g}{k} \cdot m_a$

$$\boxed{v(t) = C \cdot e^{\frac{-k}{m_a} \cdot t} + \frac{g}{k} \cdot m_a \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, C = \frac{-g}{k} \cdot m_a \\ \text{faktor} \end{array} \right. \rightarrow v(t) = -g \cdot m_a \cdot \frac{\exp\left(\frac{-k}{m_a} \cdot t\right) - 1}{k}}$$

grahische Darstellung der Lösungskurve

$m_a := 2 \cdot kg$ $\quad k := 2 \cdot \frac{kg}{s}$

$v(t) := -g \cdot m_a \cdot \frac{\exp\left(\frac{-k}{m_a} \cdot t\right) - 1}{k}$ $\quad t := 0 \cdot s, 0.1 \cdot s .. 10 \cdot s$



$t := t \qquad k := k \qquad m_a := m_a \qquad g := g \qquad v(t) := v(t)$

ii)

Berechnung von C mit Anfangsbedingung v(0) = 15 ms[-1]:
$$v(t) = C \cdot e^{\frac{-k}{m_a}\cdot t} + \frac{g}{k}\cdot m_a \;\left|\begin{array}{l}\text{ersetzen}, v(t) = 20\\ \text{ersetzen}, t = 0\\ \text{auflösen}, C\end{array}\right. \rightarrow \frac{20\cdot k - g\cdot m_a}{k}$$

$$\boxed{v_1(t) = C\cdot e^{\frac{-k}{m_a}\cdot t} + \frac{g}{k}\cdot m_a \;\left|\begin{array}{l}\text{ersetzen}, C = \frac{20\cdot k - g\cdot m_a}{k}\\ \text{faktor}\end{array}\right. \rightarrow v_1(t) = \frac{20\cdot \exp\left(\frac{-k}{m_a}\cdot t\right)\cdot k - \exp\left(\frac{-k}{m_a}\cdot t\right)\cdot g\cdot m_a + g\cdot m_a}{k}}$$

$k := 2\cdot\frac{kg}{s} \qquad m_a := 2\cdot kg \qquad v_1(t) := \frac{20\cdot \exp\left(\frac{-k}{m_a}\cdot t\right)\cdot k - \exp\left(\frac{-k}{m_a}\cdot t\right)\cdot g\cdot m_a + g\cdot m_a}{k} \qquad t := 0\cdot s, 0.1\cdot s .. 10\cdot s$