Roland Pichler roland.pichler@htl-kapfenberg.ac.at

Differenzialgleichungen

Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

Dfferenzialgleichungen, verschiedene Typen und Lösungsverfahren

Kurzzusammenfassung

Differenzialgleichungen sind in der angewandten Mathematik von größter Bedeutung. Durch sie können viele dynamische Vorgänge mathematisch beschrieben werden. Existieren Lösungen, so kann man das Verhalten dieser Vorgänge voraussagen.
Anhand der für die HTL wichtigsten Typen werden Lösungsverfahren besprochen und einfache theoretische Überlegungen dazu angestellt. Zusätzlich werden einige spezielle Differenzialgleichungen, diesen Typen entsprechend, eingehend behandelt und so weit wie möglich graphisch dargestellt.

Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand

Dieser Artkel ist folgendermaßen gegliedert.
Kurzen theoretischen Vorüberlegungen folgen ausführlich besprochene Beispiele. Diese sind so gehalten, dass Schüler sie selbstständig nachvollziehen können.
Besondere Differenzialgleichungen werden in eigenen Mathcad Dateien ausgearbeitet und über Links in das Zentraldokument eingefügt.

Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

Angewandte Mathematik, 4. und 5.Jahrgang, alle Abteilungen (reine mathematische Inhalte)
Fachtheoretische Gegenstände der Abteilungen Elektrotechnik, Maschineningenieur, Hochbau, Tiefbau

Mathcad-Version:

Mathcad 11

Literaturangaben:

***Analysis 2*, Gert Böhmer, 6. Auflage 1991, Springer Verlag**
***Technische Mechanik für Ingenieure*, Wolfgang H. Müller, Ferdinand Ferber, Fachbuchverlag Leipzig, 2. Auflage 2005**

Anmerkungen bzw. Sonstiges:

Sollte dieser Artikel als Skriptum verwendet werden, so ist darauf zu achten, dass die einzelnen Beispieldateien extra ausgedruckt werden müssen.

INHALTSANGABE (bei Gewünschtem bitte doppelklicken)

Einführung und erste Definitionen (Introduction and First Definitions)

Eine **gewöhnliche Differenzialgleichung** (DGL) ist eine Gleichung, die die **unbekannte Funktion** und ihre **Ableitungen** enthält.
(An **ordinary differential equation** (ODE) is an equation involving an **unknown function** and its **derivatives**)

Die **Ordnung** einer Differenzialgleichung ist gleich der Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung der unbekannten Funktion der Gleichung.
(The **order** of the differential equation is the order of the highest derivative of the unknown function involved in the equation)

Eine **lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung** ist eine Differenzialgleichung bei der die Ableitungen (bis zur n-ten) nur in **erster Potenz** auftreten.
(A linear **differential equation** of order n is a differential equation with derivatives only in **first order**)

Beispiel: Lineare DGL 2. Ordnung in allgemeiner Form:

$$a_2(x)\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x) + a_1(x)\cdot\frac{d}{dx}y(x) + a_0(x)\cdot y(x) = f(x) \qquad \text{oder} \qquad a_2(x)\cdot y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\cdot y = f(x)$$

Spezielle Werte:

$$3\cdot x\cdot\frac{d^2}{dx^2}y + \sin(x)\cdot\frac{d}{dx}y(x) + 4\cdot y(x) = \tan(x) \qquad \text{oder} \qquad 3\cdot x\cdot y'' + \sin(x)\cdot y' + 4\cdot y = \tan(x)$$

Existenz einer Lösung: Existiert die Lösung einer DGL?
Existence: Does a differential equation have a solution?

Eindeutigkeit einer Lösung: Hat eine DGL mehr als eine Lösung? Falls ja, wie kann man die Lösung, die entsprechenden Anfangsbedingungen genügt, finden?
Uniqueness: Does a differential equation have more than one solution? If yes, how can we find a solution which satisfies particular conditions?

Anfangswertproblem: Ein Problem in dem wir nach der unbekannten Funktion suchen, von dem der Wert und die Ableitungen an einem bestimmten Punkt bekannt sind, heißt **Anfangswertproblem.**
A problem, in which we are looking for the unknown function of a differential equation where the values of the unknown function and its derivatives at some point are known, is called an **initial value problem** (in short IVP).

Allgemeine Lösung einer DGL: Sind keine Anfangsbedingungen gegeben, so nennt die Menge aller Funktionen welche die DGL lösen **allgemeine Lösung.**
If no initial conditions are given, we call the description of all solutions to the differential equation the **general solution.**

zurück zur Inhaltsangabe

Differenzialgleichungen erster Ordnung

(first order differential equations (ODE1))

1) Trennung der Variablen:

Separable Equations

Eine DGL der Form $\frac{d}{dx}x = f(x)\cdot g(y)$ nennt man **separierbar** und kann durch **Trennung der Variablen** gelöst werden.

Beispiel: $\frac{d}{dx}y = \frac{y^2-1}{x}$ Durch Trennung der Variablen erhält man: $\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$

$$\int \frac{1}{(y-1)\cdot(y+1)}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\ln(y-1) - \frac{1}{2}\cdot\ln(y+1) = \ln(x)$$

Hinzufügen der Integrationskonstanten liefert

$$\frac{1}{2}\cdot\ln(y-1) - \frac{1}{2}\cdot\ln(y+1) = \ln(x) + \ln(C)$$

Auflösen nach y ergibt

$$\frac{1}{2}\cdot\ln(y-1) - \frac{1}{2}\cdot\ln(y+1) = \ln(x) + \ln(C) \text{ auflösen}, y \rightarrow \frac{-\left(1 + C^2\cdot x^2\right)}{C^2\cdot x^2 - 1}$$

Die Lösung lautet: $\boxed{y(x) = \frac{1 + C^2\cdot x^2}{1 - C^2\cdot x^2}}$

als zusätzliches Beispiel ist die Differenzialgleichung für die EULER-EYTELWEINsche Umschlingungsreibung angegeben (Maschineningenieurwesen). Durch Doppleklick auf den folgenden Link gelangt man zu dieser Datei

Umschlingungsreibung

2) Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

First Order Linear Equations with constant coeffizient

Eine **lineare Differenzialgleichung 1.Ordnung** hat folgende Form:
A **first order linear differential equation** has the following form:

$$\boxed{\frac{d}{dx}y + p(x)\cdot y(x) = s(x)}$$

p=constant
s(x)...Störfunktion

Man unterscheidet: **homogone** Gleichung $s(x) = 0$
inhomogene Gleichung $s(x) \neq 0$

Die Lösung erhält man auf zwei möglichen Wegen: **1) durch die Methode der Variation der Konstanten**
2) mit Hilfe eines speziellen Ansatzes entsprechend der Störfunktion s(x)

1) Methode der Variation der Konstanten:

a) Bestimmung der Lösung der homogenen Gleichung: $\frac{d}{dx}y + p\cdot y(x) = 0$,

man erhält y_h, welches man als die **allgemeine Lösung der homogenen Gleichung** bezeichnet.

b) Berechnung einer partikulären (speziellen Lösung) der inhomogenen Gleichung $\frac{d}{dx}y + p\cdot y(x) = s(x)$,

man erhält y_p, welches eine **partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen** Gleichung ist. Das gelingt dadurch, dass man die unbestimmte Konstante als Funktion von x annimmt (C = C(x)) und C(x) so bestimmt, dass sie eien spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist
Die vollständige Lösung der DGL lautet nun: $y = y_h + y_p$ **(Superposition)**

Beispiel: Löse folgende Anfangswertaufgabe: $\frac{d}{dx}y + 2\cdot y = 4\cdot x$ mit y(0)=3

a) Berechnung von y_h

$\frac{d}{dx}y + 2\cdot y = 0$ homogene Gleichung

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -2\,dx \rightarrow \ln(y) = -2\cdot x$ Trennung der Variablen liefert

$\ln(y) = -2\cdot x + \ln(C) \text{ auflösen}, y \rightarrow \exp(-2\cdot x)\cdot C$

Die homogene Lösung lautet: $\boxed{y_h(x) = C\cdot e^{-2\cdot x}}$

b) Variation der Konstanten zur Bestimmung von y_p

$y_p(x) = C(x)\cdot e^{-2\cdot x}$ nach x differenzieren ergibt

$\frac{d}{dx}y_p(x) = \frac{d}{dx}C(x)\cdot e^{-2\cdot x} \rightarrow \frac{d}{dx}y_p(x) = \frac{d}{dx}C(x)\cdot\exp(-2\cdot x) - 2\cdot C(x)\cdot\exp(-2\cdot x)$

$y'_p = C'(x)\cdot e^{-2\cdot x} - 2\cdot C(x)\cdot x\cdot e^{-2\cdot x}$ der obige Ausdruck anders geschrieben; dieser Ausdruck wird für y´ in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt.

$\frac{d}{dx}C(x)\cdot\exp(-2\cdot x) - 2\cdot C(x)\cdot\exp(-2\cdot x) + 2\cdot C(x)\cdot\exp(-2\cdot x) = 4\cdot x$ vereinfachen (händisch) ergibt

$\int \frac{d}{dx}C(x)\,dx = \int 4\cdot x\cdot\exp(2\cdot x)\,dx \rightarrow C(x) = 2\cdot x\cdot\exp(2\cdot x) - \exp(2\cdot x)$ das heißt, $C(x) = 2x\cdot e^{2x} - e^{2x}$; einsetzen in y_p(x) ergibt

$y_p(x) = (2\cdot x\cdot\exp(2\cdot x) - \exp(2\cdot x))\cdot e^{-2\cdot x} \text{ vereinfachen } \rightarrow y_p(x) = 2\cdot x - 1$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ Anwenden der Superposition $y = y_h + y_p$ ergibt die allgemeine Lösung

$\boxed{y(x) = C\cdot e^{-2\cdot x} + 2\cdot x - 1}$

Berechnung von C gemäß der Anfangsbedingung: $y(x) = C\cdot e^{-2\cdot x} + 2\cdot x - 1 \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, y(x) = 3 \\ \text{ersetzen}, x = 0 \\ \text{auflösen}, C \end{array} \right. \rightarrow 4$

Man erhält nun als Lösung für das Anfangswertproblem:

$\boxed{y(x) = C\cdot e^{-2\cdot x} + 2\cdot x - 1 \text{ ersetzen}, C = 4 \rightarrow y(x) = 4\cdot\exp(-2\cdot x) + 2\cdot x - 1}$

als zusätzliches Beispiel ist der freie Fall eines Körpers in einem zähen Medium angegeben (Maschineningenieurwesen). Durch Doppleklick auf den folgenden Link gelangt man zu dieser Datei

Freier Fall

2) Spezieller Ansatz entsprechend der Störfunktion

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung wird auf die gleiche Weise bstimmt wie oben. das heißt:

$y_h(x) = C \cdot e^{-2 \cdot x}$

Die Störfunktion $s(x) = 4 \cdot x$ ist eine lineare Funktion, daher ist die Ansatzfunktion ebenfalls eine lineare Funktion. (Dieses Vorgehen ist bei linearen DGL mit konstanten Koeffizienten <u>immer</u> möglich)

Ansatz: $y_p(x) = a \cdot x + b$ $\quad \frac{d}{dx}(a \cdot x + b) \rightarrow a$ damit erhält man (in DGL eingesetzt)

$a + 2 \cdot (a \cdot x + b) = 4 \cdot x \text{ entwickeln}, x \rightarrow a + 2 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b = 4 \cdot x$ Durch Koeffizientenvergleich erhält man folgendes Gleichungssystem

Vorgabe

$2 \cdot a = 4$ Koeffizienten von x^1:

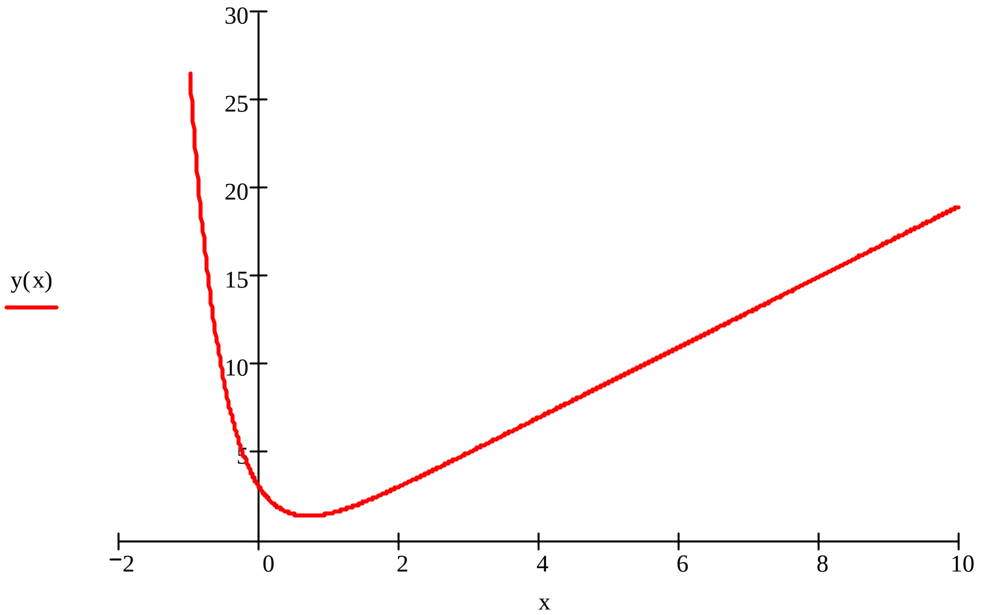
$a + 2 \cdot b = 0$ Koeffizienten von x^0:

$\text{Suchen}(a, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

In $y_p(x)$ eingesetzt, erhält man $y_p(x) = 2 \cdot x - 1$ und daher die Lösung der DGL wie oben. $\boxed{y(x) = 4 \cdot e^{-2 \cdot x} + 2 \cdot x - 1}$

Graphische Darstellung der Lösungskurve des Anfangswertproblems

$y(x) := 4 \cdot e^{-2 \cdot x} + 2 \cdot x - 1$ $\qquad x := -1, -0.99 .. 10$



zurück zur Inhaltsangabe

Als zusätzliches Beispiel ist die DGL der RC-Glied Schaltung (Elektrotechnik) angegeben . Durch Doppleklick auf den folgenden Link gelangt man zu dieser Datei.

RC-Glied

Differenzialgleichungen zweiter Ordnung (second order differential equations (ODE2))

Wir betrachten in diesem Fall nur drei spezielle Varianten, nämlich folgende Typen:

$y'' = f(x)$ z. B. Differenzialgleichung der Biegelinie, des freien Falls im Vakuum

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)$ z. B. Differenzialgleichung der elastischen Schwingung

$y'' = f(y)$ z. B. Differenzialgleichung der Knickung (nach Euler)

Typ 1 $y'' = f(x)$

Eine derartige Differenzialgleichubg kann durch zweimaliges Iintegrieren gelöst werden. Folgende Beispiele sollen das verdeutlichen.

Beispiel 1
Die Differenzialgleichung $y''(x) = \sin(x)$ soll für folgende Randbedingungen gelöst werden: $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$

$x := x \qquad y := y$

$y' = \int y''\,dx$ daraus ergibt sich $y' = \int \sin(x)\,dx \rightarrow y' = -\cos(x)$ und man erhält $y' = -\cos(x) + C_1$

$y = \int y'\,dx$ weiters $y = \int -\cos(x) + C_1\,dx \rightarrow y = -\sin(x) + C_1 \cdot x$

Die allgemeine Lösung lautet daher: $\boxed{y(x) = -\sin(x) + C_1 \cdot x + C_2}$

Durch einsetzen der Randbedingungen bekommt man die Lösung des Randwertproblems:

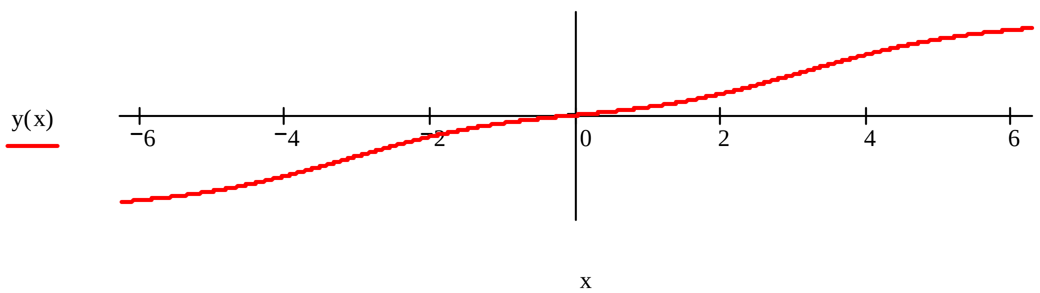
Vorgabe

$$y(x_a) = -\sin(x_a) + C_1 \cdot x_a + C_2$$

$$y'(x_a) = -\cos(x_a) + C_1$$

$$\text{Lös} := \text{Suchen}(C_1, C_2) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, y(x_a) = 0 \\ \text{ersetzen}, y'(x_a) = 1 \\ \text{ersetzen}, x_a = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + \cos(0) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Lös} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$C_1 := \text{Lös}_0 \qquad C_2 := \text{Lös}_1 \qquad y(x) := -\sin(x) + C_1 \cdot x + C_2 \qquad x := -2 \cdot \pi, -2 \cdot \pi + 0.01 .. 2 \cdot \pi$



zurück zur Inhaltsangabe

Typ 2:

Im Allgemeinen hat eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten folgende Form:

$$\frac{d^2}{dx^2}y + a\cdot\frac{d}{dx}y + b\cdot y = s(x)$$ a und b sind Konstante aus R

$s(x) = 0$ homogene Gleichnung

$s(x) \neq 0$ inhomogene Gleichnung

Zuerst wird die DGL $\frac{d^2}{dx^2}y + a\cdot\frac{d}{dx}y + b\cdot y = 0$ betrachtet.

Für lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung gilt folgender Satz:

Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungsfunktionen, so ist auch ihre Linearkombination $y(x) = C_1\cdot y_1(x) + C_2\cdot y_2(x)$ *eine Lösung (C_1 und C_2 aus R).*

(Den Beweis führt man durch Differenzieren von y(x), einsetzen in die DGL und umordnen)

Zusätzlich ist folgende Definition nützlich:

Zwei Lösungsfunktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der homogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung heißen linear unabhängig, wenn die WRONSKI - Determinante $\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{d}{dx}y_1(x) & \frac{d}{dx}y_2(x) \end{pmatrix}\right| \neq 0$ *ist.*

Eine Aussage über die allgemeine Lösung einer homogenen DGL. 2. Ordnung liefert folgender Satz:

Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungsfunktionen der DGL $\frac{d^2}{dx^2}y + a\cdot\frac{d}{dx}y + b\cdot y = 0$, *so stellt*

$$y(x) = C_1\cdot y_1(x) + C_2\cdot y_2(x)$$

ihre allgemeine Lösung dar.

Die Lösung erhält man durch den Ansatz ***y(x) = e^l x^*** , der im Falle konstanter Koeffizienten immer zum Erfolg führt.

$x := x$

$$y(x) = e^{\lambda\cdot x}$$

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda\cdot x} \rightarrow \lambda\cdot\exp(\lambda\cdot x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{\lambda\cdot x} \rightarrow \lambda^2\cdot\exp(\lambda\cdot x)$$

Einsetzen in obige DGL liefert: $\left(\lambda^2 + a\cdot\lambda + b\right)\cdot e^{\lambda\cdot x} = 0$

Diese Gleichung kann aber bur dann identisch Null werden, wenn der Klammerausdruck verschwindet ($e^{\lambda x}$ verschwindet bekanntlich nirgends).

Man nennt $\lambda^2 + a\cdot\lambda + b = 0$ die ***charakteristische Gleichung der DGL*** $\frac{d^2}{dx^2}y + a\cdot\frac{d}{dx}y + b\cdot y = 0$

(Grundmenge ist die Menge C der komplexen Zahlen)

Das Integrieren wird daher auf das Lösen einer algebraischen Gleichung zurückgeführt.

$$\lambda^2 + a\cdot\lambda + b = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1}{2}\cdot a + \frac{1}{2}\cdot\left(a^2 - 4\cdot b\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{2}\cdot a - \frac{1}{2}\cdot\left(a^2 - 4\cdot b\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Die Art der Lösung ist hängt vom Vorzeichen der Diskriminante ab, daher sind folgende Fallunterscheidungen zutreffen.

i) $a^2 - 4\cdot b > 0$ das heißt $\lambda_1 = \frac{-a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4\cdot b}$ und $\lambda_2 = \frac{-a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4\cdot b}$

ii) $a^2 - 4\cdot b = 0$ das heißt $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a}{2}$

iii) $a^2 - 4\cdot b < 0$ das heißt $\lambda_1 = \frac{-a}{2} + \frac{j}{2}\sqrt{4\cdot b - a^2}$ und $\lambda_2 = \frac{-a}{2} - \frac{j}{2}\sqrt{4\cdot b - a^2}$ oder $\lambda_1 = u + j\cdot v$ und $\lambda_2 = u - j\cdot v$

Fall i): λ_1 und λ_2 aus R und $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Einsetzen von λ_1 und λ_2 in die Ansatzfunktion liefert die allgemeine Lösung: $y(x) = C_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x} + C_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x}$,

Die Funktionen $y_1(x) = e^{\lambda_1\cdot x}$ und $y_2(x) = e^{\lambda_2\cdot x}$ sind nämlich linear unabhängig, wie das Einsetzen in die *WRONSKI - Determinante* zeigt.

$$\left|\begin{pmatrix} e^{\lambda_1\cdot x} & e^{\lambda_2\cdot x} \\ \frac{d}{dx}e^{\lambda_1\cdot x} & \frac{d}{dx}e^{\lambda_2\cdot x} \end{pmatrix}\right| \text{ sammeln}, e^{\lambda_1\cdot x}, e^{\lambda_2\cdot x} \rightarrow \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\cdot \exp\left(\lambda_2\cdot x\right)\cdot \exp\left(\lambda_1\cdot x\right)$$ ist ungleich Null, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Fall ii): λ_1 und λ_2 aus R und $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

Einsetzen von λ in die Ansatzfunktion liefert nur eine Lösung: $y_1(x) = e^{\lambda\cdot x}$. Die andere Lösung kann man aus einer linearen DGL 1. Ordnung gewinnen, wenn man den Ansatz $y(x) = y_1(x)\cdot z(x) = e^{\lambda\cdot x}\cdot z(x)$ vornimmt.

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda\cdot x}\cdot z(x) \rightarrow \lambda\cdot\exp(\lambda\cdot x)\cdot z(x) + \exp(\lambda\cdot x)\cdot\frac{d}{dx}z(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{\lambda\cdot x}\cdot z(x) \rightarrow \lambda^2\cdot\exp(\lambda\cdot x)\cdot z(x) + 2\cdot\lambda\cdot\exp(\lambda\cdot x)\cdot\frac{d}{dx}z(x) + \exp(\lambda\cdot x)\cdot\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z(x)$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{\lambda\cdot x}\cdot z(x) + a\cdot\frac{d}{dx}e^{\lambda\cdot x}\cdot z(x) + b\cdot e^{\lambda\cdot x}\cdot z(x) = 0 \text{ sammeln}, e^{\lambda\cdot x}, \frac{d}{dx}z(x), z(x) \rightarrow \left[(a + 2\cdot\lambda)\cdot\frac{d}{dx}z(x) + \left(\lambda^2 + a\cdot\lambda + b\right)\cdot z(x) + \text{n}\right.$$

$$\left[(a + 2\cdot\lambda)\cdot\frac{d}{dx}z(x) + \left(\lambda^2 + a\cdot\lambda + b\right)\cdot z(x) + \frac{d^2}{dx^2}z(x)\right]\cdot\exp(\lambda\cdot x) = 0$$

mit $a + 2\cdot\lambda \text{ ersetzen}, \lambda = \frac{-a}{2} \rightarrow 0$

und $\lambda^2 + a\cdot\lambda + b \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, \lambda = \frac{-a}{2} \\ \text{ersetzen}, a^2 = 4\cdot b \end{array} \right. \rightarrow 0$

muss $z''(x) = 0$ sein. Zweimalige Integration liefert: $z(x) = C_1\cdot x + C_2$

Damit erhält man die allgemeine Lösung $y(x) = y_1(x)\cdot z(x) = e^{\lambda\cdot x}\cdot\left(C_1\cdot x + C_2\right)$ welche aus zwei linear unabhängigen Funktionen $y_1(x) = e^{\lambda\cdot x}$ und $y_2(x) = x\cdot e^{\lambda\cdot x}$ besteht, wie die *WRONSKI - Determinate* zeigt.

$$\left|\begin{pmatrix} e^{\lambda\cdot x} & x\cdot e^{\lambda\cdot x} \\ \frac{d}{dx}e^{\lambda\cdot x} & \frac{d}{dx}x\cdot e^{\lambda\cdot x} \end{pmatrix}\right| \text{ sammeln}, e^{\lambda_1\cdot x}, e^{\lambda_2\cdot x} \rightarrow \exp(\lambda\cdot x)^2$$

ist ungleich Null, da $e^{2\cdot\lambda\cdot x}$ nirgends verschwindet

Fall iii): λ_1 und λ_2 nicht reell und konjugiert komplex $\lambda_1 = u + j\cdot v$ und $\lambda_2 = u - j\cdot v$

Einsetzen von λ_1 und λ_2 in die Ansatzfunktion liefert die beiden komplexwertigen Lösungsfunktionen

$$y_1(x) = e^{(u+j\cdot v)\cdot x} = e^{u\cdot x}\cdot e^{j\cdot v\cdot x} = e^{u\cdot x}\cdot(\cos(v\cdot x) + j\cdot\sin(v\cdot x))$$

$$y(x) = e^{(u-j\cdot v)\cdot x} = e^{u\cdot x}\cdot e^{-j\cdot v\cdot x} = e^{u\cdot x}\cdot(\cos(v\cdot x) - j\cdot\sin(v\cdot x))$$

Die allgemeine Lösung lautet daher:

$$y(x) = c_1\cdot y_1(x) + c_2\cdot y_2(x) = e^{u\cdot x}\cdot\left[\left(c_1 + c_2\right)\cdot\cos(v\cdot x) + j\cdot\left(c_1 - c_2\right)\cdot\sin(v\cdot x)\right]$$

Auf Grund des folgenden Satzes,

Ist die komplexwertige Funktion $y(x) = \alpha(x) + j\cdot\beta(x)$ *Lösung von* $\frac{d^2}{dx^2}y + a\cdot\frac{d}{dx}y + b\cdot y = 0$*, so sind dies auch die reellen Funktionen* $\alpha(x)$ *und* $\beta(x)$.

sind auch *Re*(y(x)) und *Im*(y(x)) Lösungen der Differenzialgleichung $\frac{d^2}{dx^2}y + a\cdot\frac{d}{dx}y + b\cdot y = 0$

Setzt man $C_1 = c_1 + c_2$ und $C_2 = c_1 - c_2$ so erhält man die allgemeine Lösung der DGL:

$$y(x) = e^{u\cdot x}\cdot\left(C_1\cdot\cos(v\cdot x) + C_2\cdot\sin(v\cdot x)\right)$$

welche aus zwei linear unabhängigen Funktionen $y_1(x) = e^{u\cdot x}\cdot\cos(v\cdot x)$ und $y_1(x) = e^{u\cdot x}\cdot\sin(v\cdot x)$ besteht, wie die *WRONSKI - Determinate* zeigt

$$\left|\begin{pmatrix} e^{u\cdot x}\cdot\cos(v\cdot x) & e^{u\cdot x}\cdot\sin(v\cdot x) \\ \frac{d}{dx}e^{u\cdot x}\cdot\cos(v\cdot x) & \frac{d}{dx}e^{u\cdot x}\cdot\sin(v\cdot x) \end{pmatrix}\right| \text{ sammeln}, \exp(u\cdot x)^2, v \rightarrow \left(\cos(v\cdot x)^2 + \sin(v\cdot x)^2\right)\cdot v\cdot\exp(u\cdot x)^2$$

ist ungleich Null, da e nirgends verschwindet, v nicht Null ist(laut Voraussetzung und $\cos(v\cdot x)^2 + \sin(v\cdot x)^2 = 1$ für alle v und x

Beispiel 1

Gegeben sei die Differenzialgleichung: $y'' + 4\cdot y' - 5\cdot y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4\cdot\lambda - 5 = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1\cdot e^{-5\cdot x} + C_2\cdot e^x$

Beispiel 2

Gegeben sei die Differenzialgleichung: $y'' + 4\cdot y' + 4\cdot y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4\cdot\lambda + 4 = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = e^{-2\cdot x}\cdot\left(C_1\cdot x + C_2\right)$

Beispiel 3

Gegeben sei die Differenzialgleichung: $y'' + 4\cdot y' + 13\cdot y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4\cdot\lambda + 13 = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{pmatrix} -2 + 3\cdot i \\ -2 - 3\cdot i \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = e^{-2\cdot x}\cdot\left(C_1\cdot\cos(3\cdot x) + C_2\cdot\sin(3\cdot x)\right)$

als zusätzliches Beispiel sind die Differenzialgleichung der elastischen Schwingung (homogen und inhomogen) und des Kragträgerrs angegeben (Maschineningenieurwesen). Durch Doppleklick man zu dieser Datei.

elastische Schwingung **Kragträger** zurück zur Inhaltsangabe

Typ 3 $y'' = f(y)$

Beispiel: ***Eulersche Knickung***

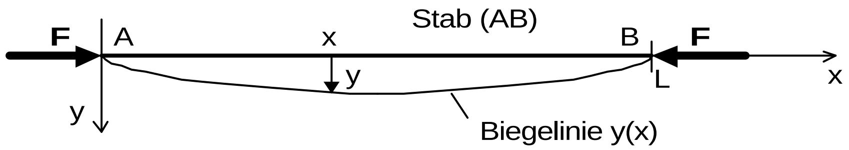
Ein zentrisch belasteter Stab ist in der Praxis nie über die komplette Länge vollkommen zentrisch belastet. Aufgrund zahlreicher Einflüsse (Material- und Montageungenauigkeiten, Temperaturdifferenzen, Eigengewicht) treten sogenannte Imperfektionen auf, d.h. Abweichungen der tatsächlichen Stabachse von der rechnerisch angenommenen Stabachse

Aufgrund dieser Abweichungen und der Normalkraft wird der Stab mit einem zusätzlichen Moment belastet. Dieses Moment bewirkt eine Durchbiegung, die Durchbiegung bewirkt wiederum ein größeres Moment, das größere Moment vergrößert die Durchbiegung, usw.

Es tritt ein Rückkopplungseffekt auf, der schlagartig zum Versagen des Stabquerschnitts führt. In der Statik spricht man allgemein von Stabilitätsproblemen, in diesem Fall von Biegeknicken eines Stabes aufgrund von Normalkraftbelastung.

Stabilitätsprobleme treten nur bei Druckbelastungen auf, da nur dann ein Rückkopplungseffekt auftritt. Daher ist die Prüfung der Stabilität für alle mit negativer Normalkraft belasteten Stäbe unabhängig von der Überprüfung der zulässigen Spannung notwendig.

Das Verhalten eines beidseitig gelenkig gelagerten Stabes der Länge L, der durch eine Druckkraft F axial belastet wird, soll untersucht werden.



Die sogenannte *Eulersche Knicklast* F_K, bei der die Zerstörung des Stabes infolge seitlichen Ausknickens erstmals einsetzt, ist zu bestimmen.

Zuerst wird das Biegemoment $M_b(x)$ an der Stelle x berechnet und anschließend untersucht unter welchen Voraussetzungen die Differenzialgleichung der Biegelinie (Biegegleichung) nichttriviale (soviel wie: sinnvolle) Lösungen hat.

Die axiale Druckkraft **F** erzeugt an der Schnittstelle x eine ortsabhängige Durchbiegung y = y(x) und somit (bzgl. des Auflagerpunktes A) ein Biegemoment

$$M_b(x) = F \cdot y$$

Die Biegegleichung lautet dann: $y''(x) = \frac{-M_b(x)}{E \cdot I} = \frac{-F \cdot y}{E \cdot I}$ oder $\boxed{y'' + \frac{F}{E \cdot I} \cdot y = 0}$

Setzt man noch $\frac{F}{E \cdot I} = a^2$, so erhält man die als Schwingungsgleichung bezeichnete lineare DGL 2.Ordnung.

$$\boxed{y'' + a^2 \cdot y = 0}$$

Randbedingungen: In den beiden Randbpunkten ist die Durchbiegung jeweils null, d.h. es gilt y(0) = 0 und y(L) = 0

$x := x$

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda \cdot x}$

2. Ableitung $\frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda \cdot x} \rightarrow \lambda^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x)$

Einsetzen von y und y´´ liefert folgende Gleichung und Lösen nach λ liefert: $\lambda^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x) + a^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x) = 0$ auflösen, $\lambda \rightarrow \begin{pmatrix} i \cdot a \\ -i \cdot a \end{pmatrix}$

Die beiden Lösungen λ_1 und λ_2 sind komplex und daher lautet die Lösung: $\boxed{y(x) = C_1 \cdot \sin(a \cdot x) + C_2 \cdot \cos((a \cdot x))}$

Einsetzen der beiden Randbedingungen gibt:

Vorgabe

$$0 = C_1 \cdot \sin(a \cdot 0) + C_2 \cdot \cos(a \cdot 0)$$

$$0 = C_1 \cdot \sin(a \cdot L) + C_2 \cdot \cos(a \cdot L)$$

$$\text{Suchen}(C_1, C_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das würde heißen, C1 und C2 sind 0, was nicht sehr sinnvoll ist (triviale Lösung), da kein seitliches Ausknicken. Die Randbedingungen müssen aber notwendigerweise erfüllt sein, daher muss die Gleichung sin(aL) = 0 gelöst werden. Dies deshalb, da nur dann nichttriviale Lösungen auftreten, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix des obigen Gleichungssystems null ist.

$L := L$

$$A_{koeff} = \begin{pmatrix} \sin(0) & \cos(0) \\ \sin(a \cdot L) & \cos(a \cdot L) \end{pmatrix} \qquad \left| \begin{pmatrix} \sin(0) & \cos(0) \\ \sin(a \cdot L) & \cos(a \cdot L) \end{pmatrix} \right| = 0 \rightarrow -\sin(a \cdot L) = 0$$

Dasist nur dann möglich, wenn $\boxed{a \cdot L = k \cdot \pi}$

Berücksichtigt man, dass $a^2 = \frac{F}{E \cdot I}$ so erhält man die Eulersche Knickkraft zu: $F = a^2 \cdot E \cdot I$ und somit $F = \left(\frac{k \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot I$

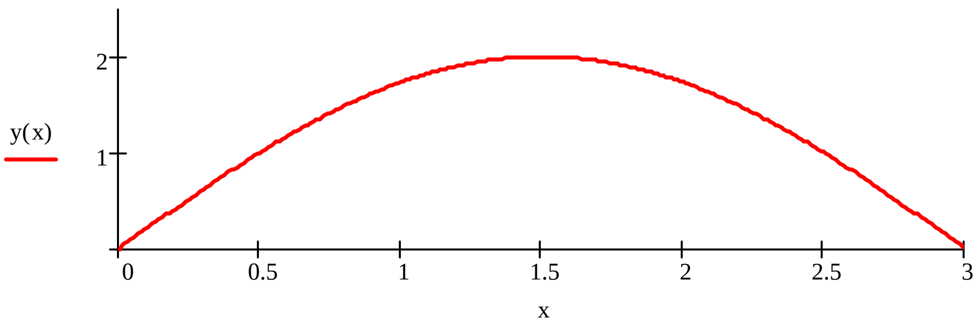
Die kleinstmögliche Druckkraft erhält man, wenn k = +-1

Die Gleichung der Biegelinie erhält man nun, indem $C_2 = 0$ ist und C_1 unbestimmt bleibt

Unten sieht man drei Graphen der Biegelinie für k = 1, 2 bzw. 3

$L := 3 \qquad x := 0, 0.01 .. L \qquad C_1 := 2$ (dient zur graphischen Darstellung)

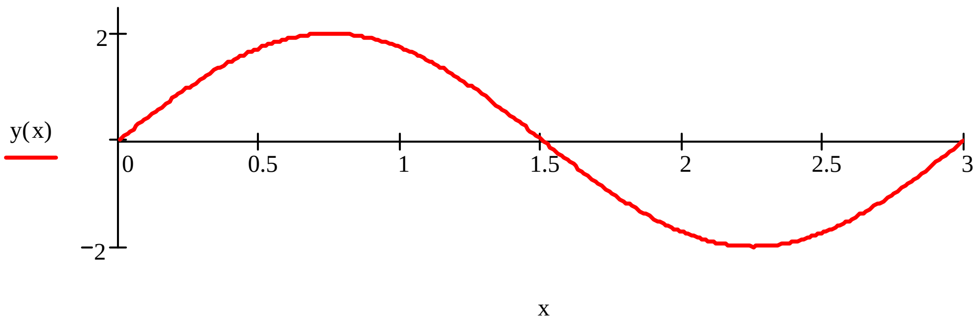
$$k := 1 \qquad y(x) := C_1 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x\right)$$



$k^2 = 1$

einfache Knickkraft F

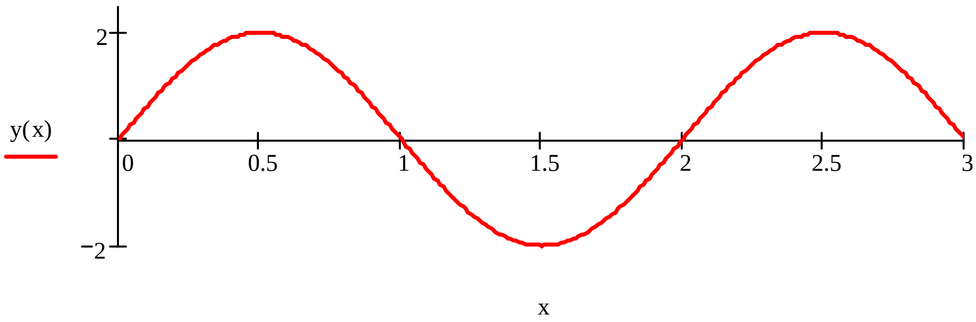
$k := 2$ $y(x) := C_1 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x\right)$



$k^2 = 4$

vierfache Knickkraft F

$k := 3$ $y(x) := C_1 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x\right)$



$k^2 = 9$

neunfache Knickkraft F

zurück zur
Inhaltsangabe

$$\left.\mathrm{Diff}(z(x), x, 2)\right]\cdot \exp(\lambda \cdot x) = 0$$