Schwingungen

Diese Arbeit enthhält zwei Teile.

Der erste Teil behandelt die Herleitung und Lösung der homogenen Differenzialgleichung für die elastische Schwingung. wobei als Erebnis eine prorammierte Funktion steht, die alle Fälle mit den entsprechenden Anfangsbedingungen berücksichtigt.

Im zweiten Teil findet man die inhomogene Differenzialgleichung, wobei die Störfunktion als konstante Funktion, als exponentiell abklingende Funktion oder als periodische Funktion auftritt.

Durch Anklicken gelangt man zu den gewünschten Inhalten:

homogene Differenzialgleichung

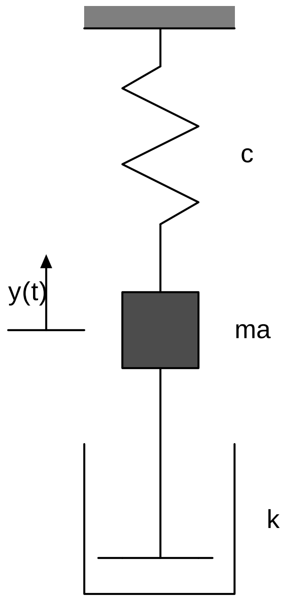
inhomogene Differenzialgleichung

1. Federschwingungen ohne Störfunktion

m_a .... Masse

k... Reibungskonstante
(proportional der Geschwindigkrit)

c... Federkonstante



Die Differentialgleichung ergibt sich folgendermaßen:

Aus dem Grundgesetz der Mechanik erhält man:
Bei der Auslenkung der Masse an der Feder tritt eine der Auslenkung entgegengesetzte Federkraft F_c auf, die proportional der Auslenkung ist, außerdem kann eine geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft bzw. Dämpfungskraft F_k auftreten. Die der Bewgung entgegengesetzte Massenträgheitskraft ist F_{ma} (ebenfalls der Bewegung entgegengesetzt).

$F_{ma} + F_k + F_c = 0$ $\quad ma \cdot a + k \cdot v + c \cdot y = 0$ $\quad$ oder $\quad ma \cdot \frac{d^2}{dt^2}y + k \cdot \frac{d}{dt}y + c \cdot y = 0$

Division durch ma ergibt $\quad \frac{d^2}{dt^2}y + \frac{k}{ma} \cdot \frac{d}{dt}y + \frac{c}{ma} \cdot y = 0$

mit $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{ma}}$ $\quad$ (Eigenkreisfrequenz)

und $\quad \delta = \frac{k}{2 \cdot ma}$ $\quad$ (Abklingkoeffizient)

erhält man folgende DGL: $\quad \frac{d^2}{dt^2}y + 2 \cdot \delta \cdot \frac{d}{dt}y + {\omega_0}^2 \cdot y = 0$

Bemerkung: $\quad \frac{\delta}{\omega_0} = D$ $\quad$ nennt man den Dämpfungsgrad

Ansatz: $y(t) = e^{\lambda \cdot t}$

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda \cdot t} \rightarrow \lambda \cdot \exp(\lambda \cdot t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda \cdot t} \rightarrow \lambda^2 \cdot \exp(\lambda \cdot t)$$

In DGL eingesetzt liefert das folgende Gleichung:

$$\left(\lambda^2 + 2\cdot\delta\cdot\lambda + \omega_0{}^2\right)\cdot e^{\lambda\cdot t} = 0$$ daraus folgt

$$\lambda^2 + 2\cdot\delta\cdot\lambda + \omega_0{}^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\cdot\delta\cdot\lambda + \omega_0{}^2 = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{bmatrix} -\delta + \left(\delta^2 - \omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\delta - \left(\delta^2 - \omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Eine etwas andere Schreibweise liefert:

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}$$

Nun muss man 3 Fälle unterscheiden:

1) $\delta^2 - \omega_0{}^2 > 0$ das heißt D > 1 starke Dämpfung

2) $\delta^2 - \omega_0{}^2 = 0$ das heißt D = 1 aperiodischer Grenzfall

3) $\delta^2 - \omega_0{}^2 < 0$ das heißt 0 < D < 1 schwache Dämpfung

Fall 1) Der Ansatz liefert: $y(t) = e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(C_1\cdot e^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\cdot t} + C_2\cdot e^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\cdot t}\right)$

Für die Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ und $\frac{d}{dt}y = v_0$ erhält man für C_1 und C_2

$$y_0 = e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(C_1\cdot e^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\cdot t} + C_2\cdot e^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\cdot t}\right) \;\text{ersetzen}, t = 0 \;\rightarrow y_0 = \exp(0)\cdot\left(C_1\cdot\exp(0) + C_2\cdot\exp(0)\right)$$

$$\frac{d}{dt}e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(C_1\cdot e^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\cdot t} + C_2\cdot e^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\cdot t}\right) = v_0 \;\left|\begin{array}{l}\text{vereinfachen}\\ \text{ersetzen}, t = 0\end{array}\right. \rightarrow -\delta\cdot C_1\cdot\exp(0) - \delta\cdot C_2\cdot\exp(0) + C_1\cdot\left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\exp(0)$$

Vorgabe

$$-\delta\cdot C_1 - \delta\cdot C_2 + C_1\cdot\left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} - C_2\cdot\left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} = v_0$$

$$C_1 + C_2 = y_0$$

Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2

$$\text{Suchen}(C_1, C_2) \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\delta\cdot y_0 + \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot y_0 + v_0}{\left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\[2ex] \dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{\delta\cdot y_0 - \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot y_0 + v_0}{\left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}$$

$$e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(C_1\cdot e^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\cdot t} + C_2\cdot e^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\cdot t}\right) \left|\begin{array}{l}\text{ersetzen}, C_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left[\delta\cdot y_0 + \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot y_0 + v_0\right]}{\left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\[2ex] \text{ersetzen}, C_2 = \dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{\left[\delta\cdot y_0 - \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot y_0 + v_0\right]}{\left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}}\end{array}\right. \rightarrow \exp(-\delta\cdot t)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta\cdot y_0 + \left(\delta^2 - \right.}{\left(\delta^2 - \right.}\right.$$

Funktionsgleichung in allgemeiner Form für den Kriechfall **(entsprechend den Anfangsbedingungen)**

$$y(t) = \frac{\exp(-\delta\cdot t)}{2\cdot\sqrt{\delta^2-\omega_0{}^2}}\cdot\left[\left[\delta\cdot y_0 + \left(\delta^2-\omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot y_0 + v_0\right]\cdot\exp\left[\left(\delta^2-\omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot t\right] - \left[\delta\cdot y_0 - \left(\delta^2-\omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot y_0 + v_0\right]\cdot\exp\left[-\left(\right.\right.\right.$$

2) Fall:

Der Ansatz liefert: $y(t) = e^{-\delta\cdot t}\cdot(C_1\cdot t + C_2)$

Für die Anfangsbedingungen y(0) = y_0 und $\frac{d}{dt}y = v_0$ erhält man für C_1 und C_2

$$y_0 = e^{-\delta\cdot t}\cdot(C_1\cdot t + C_2) \text{ ersetzen}, t = 0 \rightarrow y_0 = C_2\cdot\exp(0)$$

$$\frac{d}{dt}e^{-\delta\cdot t}\cdot(C_1\cdot t + C_2) = v_0 \left|\begin{array}{l}\text{vereinfachen}\\ \text{ersetzen}, t = 0\\ \text{ersetzen}, C_2 = y_0\end{array}\right. \rightarrow -\delta\cdot y_0 + C_1 = v_0$$

Vorgabe

$$C_2 = y_0$$

$$-\delta\cdot y_0 + C_1 = v_0$$

$$\text{Suchen}(C_1, C_2) \rightarrow \begin{pmatrix}\delta\cdot y_0 + v_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

$$e^{-\delta\cdot t}\cdot(C_1\cdot t + C_2) \left|\begin{array}{l}\text{ersetzen}, C_1 = \delta\cdot y_0 + v_0\\ \text{ersetzen}, C_2 = y_0\\ \text{vereinfachen}\end{array}\right. \rightarrow \exp(-\delta\cdot t)\cdot(t\cdot\delta\cdot y_0 + t\cdot v_0 + y_0)$$

Damit haben wir folgende Lösung:

Funktionsgleichung in allgemeiner Form für den aperiodischen Grenzfall **(entsprechend den Anfangsbedingungen)**

$$y(t) = \left[t\cdot(v_0 + \delta\cdot y_0) + y_0\right]\cdot e^{-\delta\cdot t}$$

3) Fall:

Der Ansatz liefert: $y(t) = e^{-\delta \cdot t + \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}\, j}$

$$y(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \cdot t \right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \cdot t \right) \right)$$

Für die Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ und $\frac{d}{dt} y = v_0$ erhält man für C_1 und C_2

$$y_0 = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \cdot t \right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \cdot t \right) \right) \left| \begin{array}{l} \text{vereinfachen} \\ \text{ersetzen}, t = 0 \end{array} \right. \rightarrow y_0 = \exp(0) \cdot C_1 \cdot \cos(0) + \exp(0) \cdot C_2 \cdot \sin(0)$$

$$y_0 = \exp(0) \cdot \cos(0) \cdot C_1 + \exp(0) \cdot C_2 \cdot \sin(0) \rightarrow y_0 = C_1$$

$$v_0 = \frac{d}{dt} e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \cdot t \right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \cdot t \right) \right) \left| \begin{array}{l} \text{vereinfachen} \\ \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{ersetzen}, C_1 = y_0 \\ \text{auflösen}, C_2 \end{array} \right. \rightarrow \frac{\delta \cdot y_0 + v_0}{\left(\omega_0{}^2 - \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \cdot t \right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \cdot t \right) \right) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, C_1 = y_0 \\ \text{ersetzen}, C_2 = \dfrac{\left(\delta \cdot y_0 + v_0 \right)}{\left(\omega_0{}^2 - \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right. \rightarrow \exp(-\delta \cdot t) \cdot \left[y_0 \cdot \cos\left[\left(\omega_0{}^2 - \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right. \right.$$

Funktionsgleichung in allgemeiner Form für den Schwingfall **(entsprechend den Anfangsbedingungen)**

$$y(t) = \exp(-\delta \cdot t) \cdot \left[y_0 \cdot \cos\left[\left(\omega_0{}^2 - \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] + \frac{\delta \cdot y_0 + v_0}{\left(\omega_0{}^2 - \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin\left[\left(\omega_0{}^2 - \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] \right]$$

Diese Funktion gibt alle möglichen Lösungen der homogenen Schwingungsgleichung an (mit Rücksichtnahme der frei gewählten Anfangsbedingungen)

y_0 ... Anfangsamplitude

v_0 ... Anfangsgeschwindigkeit

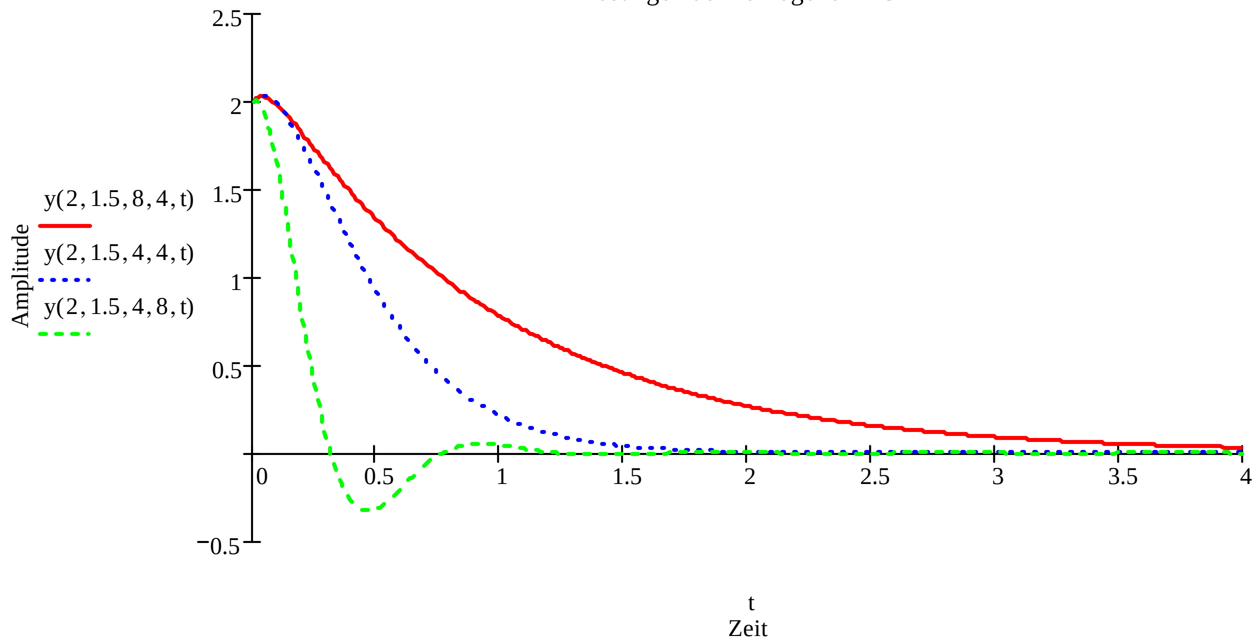
δ ... Dämpfungsgrad

ω_0 ... Eigenkreisfrequenz

$$y(y_0, v_0, \delta, \omega_0, t) := \left| \begin{array}{l} \dfrac{\exp(-\delta \cdot t)}{2 \cdot \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \cdot \left[\left[\delta \cdot y_0 + \left(\delta^2 - \omega_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y_0 + v_0 \right] \cdot \exp\left[\left(\delta^2 - \omega_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] - \left[\delta \cdot y_0 - \left(\delta^2 - \omega_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y_0 + v_0 \right] \cdot \exp \right. \\ \left[\left[t \cdot (v_0 + \delta \cdot y_0) + y_0 \right] \cdot e^{-\delta \cdot t} \right] \quad \text{if } \delta = \omega_0 \\ \exp(-\delta \cdot t) \cdot \left[y_0 \cdot \cos\left[\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] + \dfrac{\delta \cdot y_0 + v_0}{\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin\left[\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] \right] \quad \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$t := 0, 0.01 .. 5$

Lösungen der homogenen DGL



zurück zur Startseite

2. Federschwingungen mit Störfunktion

Die Schwingungsgleichung ist nun eine inhomogene lineare Differenzialgleichung hat folgendes Aussehen:

$F_{ma} + F_k + F_c = s(t)$ $\quad$ $ma \cdot a + k \cdot v + c \cdot y = s(t)$ oder $\frac{d^2}{dt^2}y + 2 \cdot \delta \cdot \frac{d}{dt}y + \omega_0{}^2 \cdot y = \frac{s(t)}{ma}$

Für besondere Störfunktionen s(x) erhält man die partikuläre Lösung durch einen speziellen Ansatz:

Wir gehen dabei für alle Störfunktionen vom aperiodischer Grenzfall als homogene Lösung aus.
Die Anfangsbedingungen lauten:$y(0)=y_0$ und $y´(0)=v_0$

$y(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 \cdot t + C_2)$ <--- entspricht y_h

(Zur Herleitung werden alle mit Zahlen belegte Variablen neu definiert) $\delta := \delta$ $\quad$ $t := t$

1) Die Störfunktion ist eine konstante Kraft F_0

$\boxed{\text{Ansatz: } y_p = a}$

$$\frac{d^2}{dt^2}a + 2 \cdot \delta \cdot \frac{d}{dt}a + \omega_0{}^2 \cdot a = \frac{F_0}{ma} \text{ auflösen}, a \rightarrow \frac{F_0}{ma \cdot \omega_0{}^2}$$

Die Lösung der Differenzialgleichung lautet nun: $\boxed{y(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 \cdot t + C_2) + \frac{F_0}{ma \cdot \omega_0{}^2}}$

Die Anfangsbedingen ergeben sich zu:

$$y_0 = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 \cdot t + C_2) + \frac{F_0}{ma \cdot \omega_0{}^2} \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{auflösen}, C_2 \end{array} \right. \rightarrow \frac{-\left(-y_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 + F_0\right)}{ma \cdot \omega_0{}^2}$$

$$v_0 = \frac{d}{dt}\left[e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 \cdot t + C_2) + \frac{F_0}{ma \cdot \omega_0{}^2}\right] \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{ersetzen}, C_2 = \frac{-\left(-y_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 + F_0\right)}{ma \cdot \omega_0{}^2} \\ \text{auflösen}, C_1 \end{array} \right. \rightarrow \frac{-\left(-v_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 - \delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 + \delta \cdot F_0\right)}{ma \cdot \omega_0{}^2}$$

Für die gegebenen Anfangsbedingungen erhält man folgende Lösung:

$$y(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[\frac{-\left(-v_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 - \delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 + \delta \cdot F_0\right)}{ma \cdot \omega_0{}^2} \cdot t + \frac{-\left(-y_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 + F_0\right)}{ma \cdot \omega_0{}^2}\right] + \frac{F_0}{ma \cdot \omega_0{}^2}$$

2) Die Störfunktion ist eine exponentiell abnehmende Kraft $s(t) = F_0 \cdot e^{-b \cdot t}$ mit b > 0

$$\boxed{\text{Ansatz: } y_p = a \cdot e^{-b \cdot t}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} a \cdot e^{-b \cdot t} + 2 \cdot \delta \cdot \frac{d}{dt} a \cdot e^{-b \cdot t} + \omega_0{}^2 \cdot \left(a \cdot e^{-b \cdot t}\right) = \frac{F_0 \cdot e^{-b \cdot t}}{ma} \text{ auflösen}, a \rightarrow \frac{F_0}{ma \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0{}^2\right)}$$

Die Lösung der Differenzialgleichung lautet nun:

$$y(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot t + C_2\right) + \frac{F_0}{ma \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0{}^2\right)} \cdot e^{-b \cdot t}$$

Die Anfangsbedingen ergeben sich zu:

$$y_0 = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot t + C_2\right) + \frac{F_0}{ma \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0{}^2\right)} \cdot e^{-b \cdot t} \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{auflösen}, C_2 \end{array} \right. \rightarrow \frac{y_0 \cdot ma \cdot b^2 - 2 \cdot y_0 \cdot ma \cdot \delta \cdot b + y_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 - F_0}{ma \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0{}^2\right)}$$

$$v_0 = \frac{d}{dt}\left[e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot t + C_2\right) + \frac{F_0}{ma \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0{}^2\right)} \cdot e^{-b \cdot t}\right] \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{ersetzen}, C_2 = \dfrac{y_0 \cdot ma \cdot b^2 - 2 \cdot y_0 \cdot ma \cdot \delta \cdot b + y_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 - F_0}{ma \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0{}^2\right)} \\ \text{auflösen}, C_1 \end{array} \right. \rightarrow \frac{v_0 \cdot}{}$$

Für die gegebenen Anfangsbedingungen erhält man folgende Lösung:

$$y(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[\frac{v_0 \cdot ma \cdot b^2 - 2 \cdot v_0 \cdot ma \cdot \delta \cdot b + v_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 + \delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot b^2 - 2 \cdot y_0 \cdot ma \cdot \delta^2 \cdot b + \delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot \omega_0{}^2 - \delta \cdot F_0 + F_0 \cdot b}{ma \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0{}^2\right)} \cdot t + \frac{y_0 \cdot ma \cdot b^2 - 2 \cdot y}{ma \cdot (}\right.$$

3) Die Störfunktion ist eine periodische Kraft $s(t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ oder $s(t) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

$\boxed{\text{Ansatz: } y_p = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)}$

$$\frac{d^2}{dt^2}(a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)) + 2 \cdot \delta \cdot \frac{d}{dt}(a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)) + \omega_0^{\,2} \cdot (a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)) = \frac{F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)}{ma} \;\left|\; \begin{matrix} \text{sammeln}, \sin(\omega \cdot t \\ \text{sammeln}, \cos(\omega \cdot \end{matrix}\right.$$

$$\left(-a \cdot \omega^2 + 2 \cdot \delta \cdot b \cdot \omega + \omega_0^{\,2} \cdot a\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \left(-b \cdot \omega^2 - 2 \cdot \delta \cdot a \cdot \omega + \omega_0^{\,2} \cdot b\right) \cdot \sin(\omega \cdot t) = F_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{ma}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert folgendes Gleichungssystem:

Vorgabe

$$0 = -a \cdot \omega^2 + 2 \cdot \delta \cdot b \cdot \omega + \omega_0^{\,2} \cdot a$$

$$\frac{F_0}{ma} = -b \cdot \omega^2 - 2 \cdot \delta \cdot a \cdot \omega + \omega_0^{\,2} \cdot b$$

$$\text{Suchen}(a, b) \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \cdot F_0 \cdot \delta \cdot \dfrac{\omega}{ma \cdot \left(\omega^4 - 2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_0^{\,2} + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2 + \omega_0^{\,4}\right)} \\ \dfrac{-F_0}{ma \cdot \left(\omega^4 - 2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_0^{\,2} + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2 + \omega_0^{\,4}\right)} \cdot \left(\omega^2 - \omega_0^{\,2}\right) \end{bmatrix}$$

Die Konstanten C1 und C2 berechnet man einfacher über konkret gegebene Zahlenwerte (ansonst werden die Terme sehr groß)

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = {} & e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 \cdot t + C_2) + -2 \cdot F_0 \cdot \delta \cdot \frac{\omega}{ma \cdot \left(\omega^4 - 2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_0^{\,2} + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2 + \omega_0^{\,4}\right)} \cdot \cos(\omega \cdot t) \ldots \\ & + \frac{F_0}{ma \cdot \left(\omega^4 - 2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_0^{\,2} + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2 + \omega_0^{\,4}\right)} \cdot \left(-\omega^2 + \omega_0^{\,2}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} y(t) = {} & e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 \cdot t + C_2) + -2 \cdot F_0 \cdot \delta \cdot \frac{\omega}{ma \cdot \left(\omega^4 - 2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_0^{\,2} + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2 + \omega_0^{\,4}\right)} \cdot \cos(\omega \cdot t) \ldots \\ & + \frac{F_0}{ma \cdot \left(\omega^4 - 2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_0^{\,2} + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2 + \omega_0^{\,4}\right)} \cdot \left(-\omega^2 + \omega_0^{\,2}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

händisches Vereinfachen liefert:

$$y(t) = e^{-\delta \cdot t}\cdot\left(C_1\cdot t + C_2\right) - \frac{F_0}{ma\cdot\left[\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2}\right)^2 + 4\cdot\delta^2\cdot\omega^2\right]}\cdot\left[2\cdot\delta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) + \left(-\omega^2 + \omega_0^{\ 2}\right)\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]$$

$$y_0 = e^{-\delta \cdot t}\cdot\left(C_1\cdot t + C_2\right) - \frac{F_0}{ma\cdot\left[\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2}\right)^2 + 4\cdot\delta^2\cdot\omega^2\right]}\cdot\left[(2)\cdot\delta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) + \left(-\omega^2 + \omega_0^{\ 2}\right)\cdot\sin(\omega\cdot t)\right] \text{ ersetzen}, t = 0 \ \rightarrow y_0 =$$

$$v_0 = \frac{d}{dt}\left[e^{-\delta \cdot t}\cdot\left(C_1\cdot t + C_2\right) - \frac{F_0}{ma\cdot\left[\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2}\right)^2 + 4\cdot\delta^2\cdot\omega^2\right]}\cdot\left[(2)\cdot\delta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) + \left(-\omega^2 + \omega_0^{\ 2}\right)\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]\right] \text{ ersetzen}, t = 0 \ \rightarrow$$

Vorgabe

$$y_0 = C_2\cdot\exp(0) - \frac{F_0}{ma\cdot\left[\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2}\right)^2 + 4\cdot\delta^2\cdot\omega^2\right]}\cdot\left[2\cdot\delta\cdot\omega\cdot\cos(0) + \left(-\omega^2 + \omega_0^{\ 2}\right)\cdot\sin(0)\right]$$

$$v_0 = -\delta\cdot C_2\cdot\exp(0) + C_1\cdot\exp(0) - \frac{F_0}{ma\cdot\left[\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2}\right)^2 + 4\cdot\delta^2\cdot\omega^2\right]}\cdot\left[-2\cdot\delta\cdot\omega^2\cdot\sin(0) + \left(-\omega^2 + \omega_0^{\ 2}\right)\cdot\cos(0)\cdot\omega\right]$$

$$\text{Suchen}\left(C_1, C_2\right) \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\delta\cdot y_0\cdot ma\cdot\omega^4 - 2\cdot\delta\cdot y_0\cdot ma\cdot\omega^2\cdot\omega_0^{\ 2} + 4\cdot y_0\cdot ma\cdot\delta^3\cdot\omega^2 + \delta\cdot y_0\cdot ma\cdot\omega_0^{\ 4} + 2\cdot F_0\cdot\delta^2\cdot\omega + v_0\cdot ma\cdot\omega^4 - 2\cdot v_0\cdot ma\cdot\omega^2\cdot\omega}{ma\cdot\left(\omega^4 - 2\cdot\omega^2\cdot\omega_0^{\ 2} + 4\cdot\delta^2\cdot\omega^2 + \omega_0^{\ 4}\right)} \\ \dfrac{y_0\cdot ma\cdot\omega^4 - 2\cdot y_0\cdot ma\cdot\omega^2\cdot\omega_0^{\ 2} + 4\cdot y_0\cdot ma\cdot\delta^2\cdot\omega^2 + y_0\cdot ma\cdot\omega_0^{\ 4} +}{ma\cdot\left(\omega^4 - 2\cdot\omega^2\cdot\omega_0^{\ 2} + 4\cdot\delta^2\cdot\omega^2 + \omega_0^{\ 4}\right)} \end{bmatrix}$$

Graphische Darstellung für die drei Fälle:

Die konstanten Größen sind für alle drei Fälle gleich gewählt.

$k := k$ ma = 1kg c = 16 N/m $k = \frac{k}{2\cdot ma} = \sqrt{\frac{c}{ma}}$ auflösen, k $\rightarrow 2\cdot\left(\frac{c}{ma}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot ma$

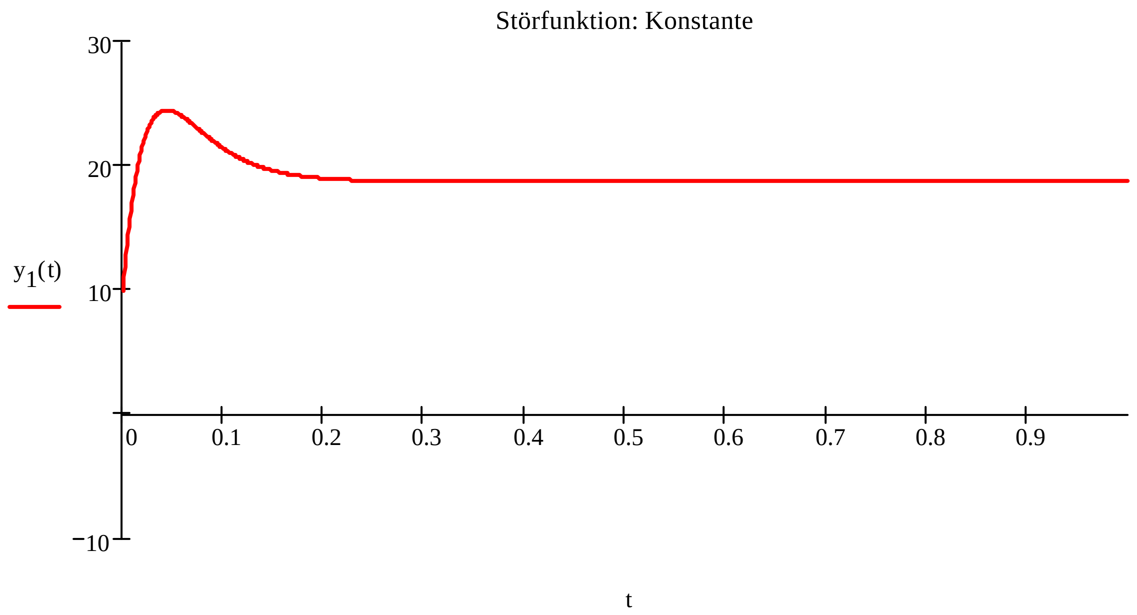
$ma := 1$ $c := 16$ $k := 20\cdot 10^{\frac{1}{2}}\cdot ma^{\frac{1}{2}}$ $\delta := \frac{k}{2ma}$ $\delta = 31.623$ $\omega_0 := \sqrt{\frac{c}{ma}}$ $\omega_0 = 4$

$t := 0, 0.001 .. 5$ $y_0 := 10$ $\omega := 5$ $v_0 := 1000$ $F_0 := 300$

experimentieren Sie mit verscheidenen Werten für F_0, v (kann auch negativ sein), y_0, ω, c, ma und k

Die Störfunktion ist eine konstante Kraft: $s(t) = F_0$

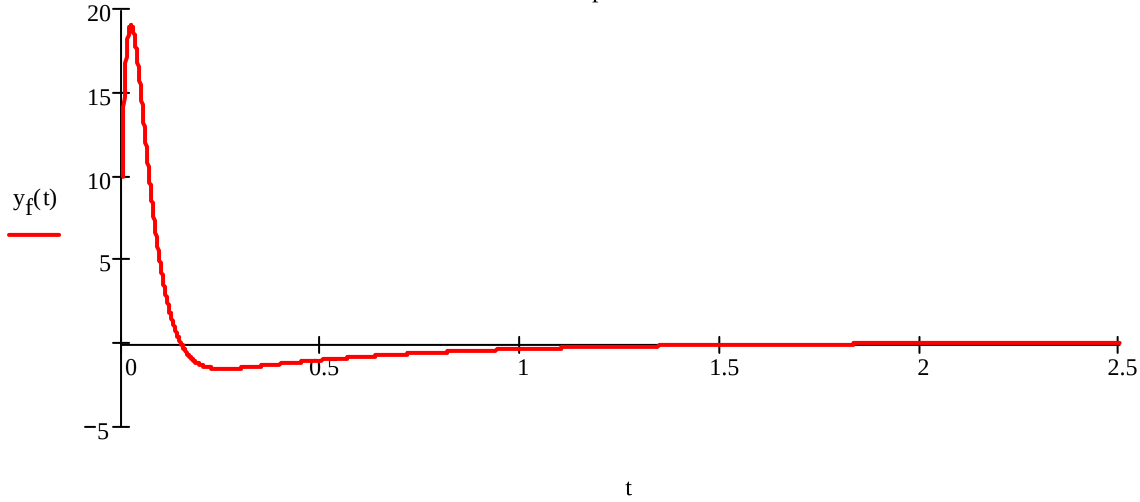
$$y_1(t) := e^{-\delta\cdot t}\cdot\left[\frac{-\left(-v_0\cdot ma\cdot\omega_0^{2} - \delta\cdot y_0\cdot ma\cdot\omega_0^{2} + \delta\cdot F_0\right)}{ma\cdot\omega_0^{2}}\cdot t + \frac{-\left(-y_0\cdot ma\cdot\omega_0^{2} + F_0\right)}{ma\cdot\omega_0^{2}}\right] + \frac{F_0}{ma\cdot\omega_0^{2}}$$



Die Störfunktion ist eine exponentiell abnehmende Kraft: $s(t) = F_0 \cdot e^{-b \cdot t}$ $b := 2$

$$y_f(t) := e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[\frac{v_0 \cdot ma \cdot b^2 - 2 \cdot v_0 \cdot ma \cdot \delta \cdot b + v_0 \cdot ma \cdot \omega_0^{\;2} + \delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot b^2 - 2 \cdot y_0 \cdot ma \cdot \delta^2 \cdot b + \delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot \omega_0^{\;2} - \delta \cdot F_0 + F_0 \cdot b}{ma \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0^{\;2}\right)} \cdot t + \frac{y_0 \cdot ma \cdot b^2 \dots}{\dots} \right.$$

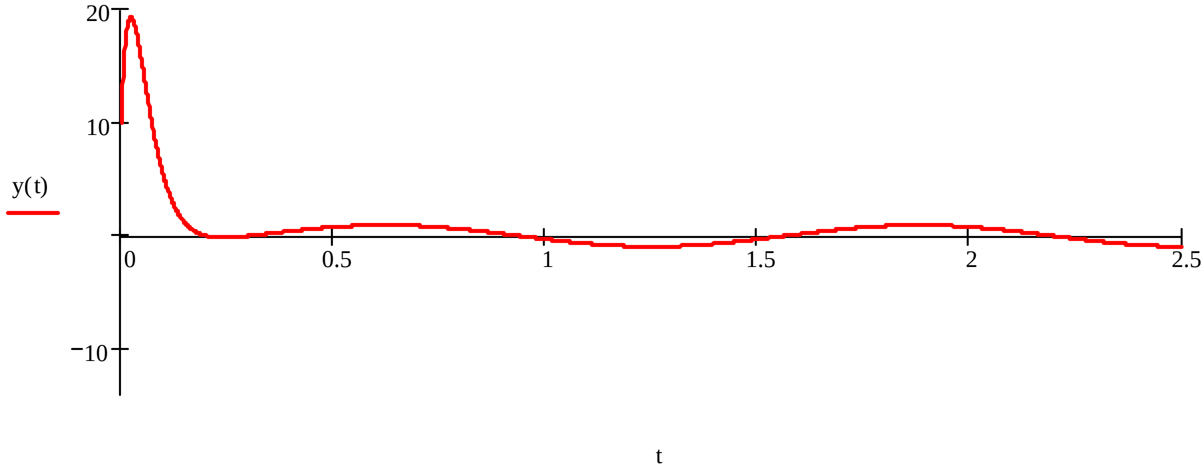
Störfunktion: Exponentiell abnehmend



Die Störfunktion ist eine periodische Kraft $s(t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ oder $s(t) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

$$y(t) := \left[e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[\frac{\delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot \omega^4 - 2 \cdot \delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot \omega^2 \cdot \omega_0^{\;2} + \delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot \omega_0^{\;4} + 4 \cdot y_0 \cdot ma \cdot \delta^3 \cdot \omega^2 + 2 \cdot F_0 \cdot \delta^2 \cdot \omega + v_0 \cdot ma \cdot \omega^4 - 2 \cdot v_0 \cdot ma \cdot \omega^2 \cdot \omega_0^{\;2} + \dots}{ma \cdot \left(\omega^4 - 2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_0^{\;2} + \omega_0^{\;4} + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2\right)} \right. \right.$$

Störfunktion: Periodische Funktion



zurück zur Startseite

$$- C_2 \cdot \left(\delta^2 - \omega_0^{\;2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp(0) = v_0$$

$$\frac{\omega_0^{\;2}\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot y_0 + v_0}{\cdot\ \omega_0^{\;2}\Big)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[\left(\delta^2 - \omega_0^{\;2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta \cdot y_0 - \left(\delta^2 - \omega_0^{\;2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y_0 + v_0}{\left(\delta^2 - \omega_0^{\;2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[-\left(\delta^2 - \omega_0^{\;2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right]\Bigg]$$

$$\left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \Big]\Big]$$

$$\left.\right] + \frac{\delta \cdot y_0 + v_0}{\left(\omega_0^{\,2} - \delta^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin\left[\left(\omega_0^{\,2} - \delta^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right]\left.\right]$$

$$\left[-\left(\delta^2 - \omega_0^{\;2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right]\Bigg] \quad \text{if} \quad \delta > \omega_0$$

$$\frac{ma \cdot b^2 - 2 \cdot v_0 \cdot ma \cdot \delta \cdot b + v_0 \cdot ma \cdot \omega_0^{\,2} + \delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot b^2 - 2 \cdot y_0 \cdot ma \cdot \delta^2 \cdot b + \delta \cdot y_0 \cdot ma \cdot \omega_0^{\,2} - \delta \cdot F_0 + F_0 \cdot b}{ma \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0^{\,2}\right)}$$

$$\left.\frac{y_0 \cdot ma \cdot \delta \cdot b + y_0 \cdot ma \cdot \omega_0^{\,2} - F_0}{b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0^{\,2})}\right] + \frac{F_0}{ma \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \delta \cdot b + \omega_0^{\,2}\right)} \cdot e^{-b \cdot t}$$

$$\left.\begin{matrix}) \\ t) \end{matrix}\right. \rightarrow \left(-a\cdot\omega^2 + 2\cdot\delta\cdot b\cdot\omega + {\omega_0}^2\cdot a\right)\cdot\cos(\omega\cdot t) + \left(-b\cdot\omega^2 - 2\cdot\delta\cdot a\cdot\omega + {\omega_0}^2\cdot b\right)\cdot\sin(\omega\cdot t) = F_0\cdot\frac{\sin(\omega\cdot t)}{ma}$$

$$C_2 \cdot \exp(0) - \frac{F_0}{ma \cdot \left[\left(\omega^2 - \omega_0^{\,2}\right)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2\right]} \cdot \left[2 \cdot \delta \cdot \omega \cdot \cos(0) + \left(-\omega^2 + \omega_0^{\,2}\right) \cdot \sin(0)\right]$$

$$v_0 = -\delta \cdot C_2 \cdot \exp(0) + C_1 \cdot \exp(0) - \frac{F_0}{ma \cdot \left[\left(\omega^2 - \omega_0^{\,2}\right)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2\right]} \cdot \left[-2 \cdot \delta \cdot \omega^2 \cdot \sin(0) + \left(-\omega^2 + \omega_0^{\,2}\right) \cdot \cos(0) \cdot \omega\right]$$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\omega_0^{\,2} + 4 \cdot v_0 \cdot ma \cdot \delta^2 \cdot \omega^2 + v_0 \cdot ma \cdot \omega_0^{\,4} - F_0 \cdot \omega^3 + F_0 \cdot \omega \cdot \omega_0^{\,2}}{} \\ \\ \dfrac{2 \cdot F_0 \cdot \delta \cdot \omega}{}\end{matrix}\right]$$

$$20 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot ma^{\frac{1}{2}} = 63.246$$

$$- 2\cdot y_0\cdot ma\cdot\delta\cdot b + y_0\cdot ma\cdot\omega_0^{\;2} - F_0$$
$$\overline{na\cdot\left(b^2 - 2\cdot\delta\cdot b + \omega_0^{\;2}\right)}\Bigg] + \frac{F_0}{ma\cdot\left(b^2 - 2\cdot\delta\cdot b + \omega_0^{\;2}\right)}\cdot e^{-b\cdot t}$$

$$- v_0\cdot ma\cdot\omega_0^{\;4} + 4\cdot v_0\cdot ma\cdot\delta^2\cdot\omega^2 - F_0\cdot\omega^3 + F_0\cdot\omega\cdot\omega_0^{\;2} \cdot t + \frac{y_0\cdot ma\cdot\omega^4 - 2\cdot y_0\cdot ma\cdot\omega^2\cdot\omega_0^{\;2} + y_0\cdot ma\cdot\omega_0^{\;4} + 4\cdot y_0\cdot ma\cdot\delta^2\cdot\omega^2 + 2\cdot F_0\cdot\delta\cdot\omega}{ma\cdot\left(\omega^4 - 2\cdot\omega^2\cdot\omega_0^{\;2} + \omega_0^{\;4} + 4\cdot\delta^2\cdot\omega^2\right)}\Bigg]$$

$\delta = 31.623$

$$-\frac{F_0}{ma\cdot\left[\left(\omega^2-{\omega_0}^2\right)+4\cdot\delta^2\cdot\omega^2\right]}\cdot\left[2\cdot(\delta)\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)+\left(-\omega^2+{\omega_0}^2\right)\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]$$