Bernhard Nietrost, HTL Steyr

Verarbeitung von Messdaten

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Regression, Polynominterpolation, Extremwertberechnung, graphische Darstellung von Daten, (numerisches) Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, Vergleich von Modellen.

- Kurzzusammenfassung

  Verarbeitung von Messwerten mit elektrotechnischem Hintergrund

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Matura- oder Vorbereitungsbeispiel in AMFT, verbindet verschiedene mathematische Kapitel aus der 3. Klasse mit einfachen elektrotechnischen Grundlagen.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 5. Jahrgang, alle Abteilungen vor allem ET

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

- Literaturangaben:

  Timschl: Ingenieurmathematik 3, 4

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Daten und Idee zu dieser Aufgabenstellung sind einem ähnlichen Beispiel (siehe unten) von Markus Hörhager entnommen.
  (----> Seminar MCD in Jenbach, empfehlenswert)

Ursprüngliche Aufgabenstellung

Wie schon oben angegeben stammt die Idee und die Daten zu meiner Aufgabenstellung von Markus HÖRHAGER, HTL Jenbach. Seine Aufgabenstellung ist wie folgt formuliert:

Ausgleichsrechnung, nichtlinearer Widerstand einer Glühlampe

Sie haben Messdaten (Ströme I_i , Spannung U_i) an einer Glühlampe aufgenommen:

$$I := \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.19 \\ 0.27 \\ 0.35 \\ 0.42 \\ 0.47 \end{pmatrix} A \qquad U := \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \\ 200 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix} V$$

Das Ohmsche Gesetz ist nicht anwendbar, da der Kennlinienverlauf nichtlinear ist. Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist annähernd durch

$$U = a \cdot I + b \cdot I^3$$

beschreibbar. Der konstante und der quadratische Anteil fehlen aus Symmetriegründen.

1.) Bestimmen Sie aus den Messdaten die bestmöglichen Koeffizienten a und b.
2) Zeichnen Sie die Fitfunktion und die Messdaten in ein Diagramm ein.
3) Welche Leistung hat die Glühlampe an einer Spannung von 220 V?
4) Wie ändert siche der Lampenwiderstand mit der Stromstärke I im Bereich von 0 bis 0.5 A?
5) Wie ändert sich die Lampenleistung mit der Stromstärke I im Bereich von 0 bis 0.5 A?

Ursprüngliche Aufgabenstellung

Aufgabenstellung: Verarbeitung von Messdaten

Die untenstehenden Daten gehen aus einer Messung von Strom und Spannung an einer Glühlampe hervor. (In den Einheiten [A] und [V])

$$I := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.19 \\ 0.27 \\ 0.35 \end{pmatrix} \qquad U := \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Verwende die Spannung als y und den Strom als x Werte

A. Regression 1: Die Daten erscheinen ungefähr linear zu sein. (Überprüfe diese Aussage graphisch in einem Diagramm) Bestimme die Regressionsgerade durch diese Daten. Welche Bedeutung hat die Steigung der Gerade ? Welchen Wert sollte d haben, wenn das Ohmsche Gesetz gilt ?
Stelle die Messdaten und die Regressionsgerade graphisch dar. (MCD)
Diskutiere kurz die Sinnhaftigkeit dieses ersten Ansatzes.

B. Regression 2: Aus theoretischen Überlegungen (vgl Grundlagen der Elektrotechnik) erscheint der Ansatz eines Regressionspolynoms der Form $y = a \cdot x + b \cdot x^3$ sinnvoll. Bestimme die Koeffizienten a und b durch Regressionsrechnung. (ev. Ansatz von Hand, Berechnung von a und b mit Rechnerhilfe)
Stelle Regressionskurve und Daten graphisch dar.
Erkläre kurz die Grundidee der Regression.

C. Interpolation: Als Alternative zur Regression könnte man die Messpunkte durch ein Polynom 3.Grades verbinden. Stelle die entsprechenden Gleichungen in Form eines Gleichungssystems auf und bestimme die Polynomkoeffizienten a, b, c, d durch Lösen des Gleichungssystems. Welche Methoden kennst du zum Lösen von Gleichungssystemen ?
Stelle das Polynom und die Messdaten ebenfalls graphisch dar. (MCD)

D. Welcher prinzipielle Unterschied besteht zwischen der Regression und dem Interpolationspolynom bezüglich der einzelnen Datenpunkte ? Bestimme bei A, B C jeweils die Summe der quadratischen Abstände. Diskutiere Vor- und Nachteile der verwendeten Methoden. Zeichne die Lösungen A,B,C für $0 < I < 1$ A. Überlege bei welchen Varianten eine Extrapolation physikalisch sinnvoll erscheint ?

E. Stelle die Leistung der Glühbirne über dem Strom mit den Varianten aus A, B und C dar. Bestimme jeweils die Leistung bei 220 V.

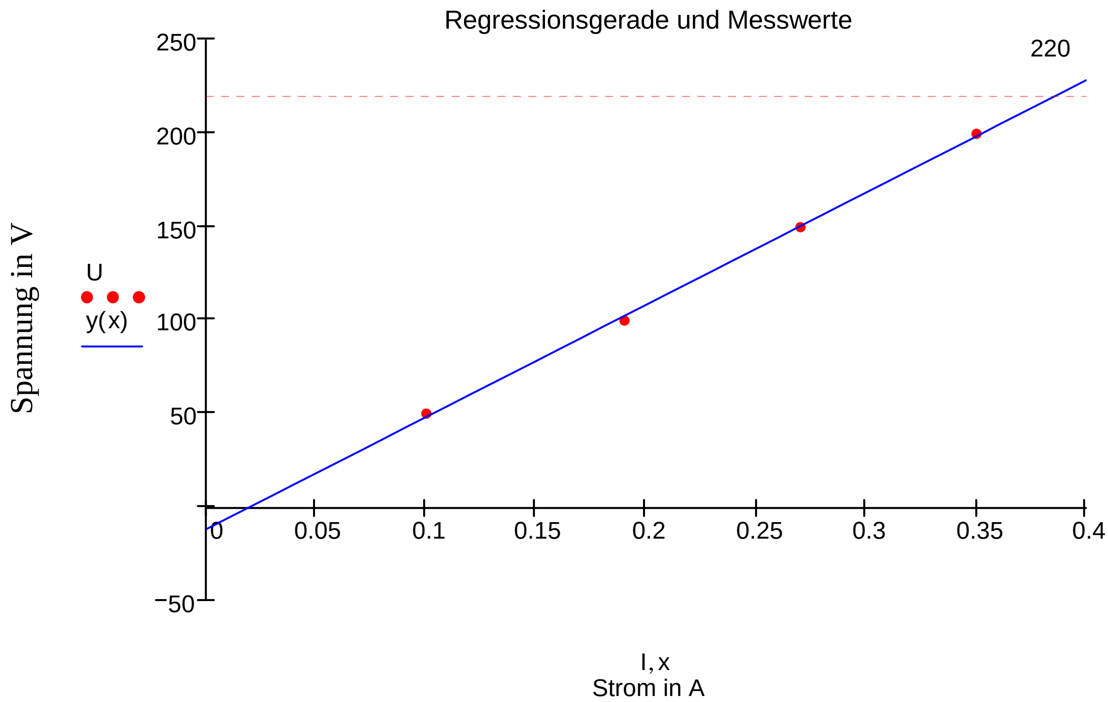
Lösungen zu den Aufgabenstellungen:

Lösungen

A. Die Daten erscheinen ungefähr linear zu sein. (Überprüfe diese Aussage graphisch in einem Diagramm)
Bestimme die Regressionsgerade durch diese Daten. Welche Bedeutung hat die Steigung der Gerade ? Welchen Wert sollte d haben, wenn das Ohmsche Gesetz gilt ?
Stelle die Messdaten und die Regressionsgerade graphisch dar. (MCD)
Diskutiere kurz die Sinnhaftigkeit dieses ersten Ansatzes.

$k := \text{neigung}(I, U)$ $\quad d := \text{achsenabschn}(I, U)$

$k = 601.885$ $\quad d = -11.929$ $\quad y(x) := k \cdot x + d$ $\quad x := 0, 0.01 .. 0.4$



Die Steigung der Gerade sollte entsprechend $U = R \cdot I$ der Widerstand sein ($k = 601.885$ Ω), d müsste 0 sein.
Dieses Modell ist zwar einfach in der Berechnung (da in den meisten Programmen wie MCD, EXCEL, TI 92 oder Voyage... implementiert) aber leider hier nicht allzu brauchbar, da das Ohm'sche Gesetz keinen Achsenabschnitt hat.
Anmerkung: Das Ohm'sche Gesetz gilt in diesem Fall nur näherungsweise (vgl Grundlagen der Elektrotechnik)

B. Aus theoretischen Überlegungen (vgl Grundlagen der Elektrotechnik) erscheint der Ansatz eines Regressionspolynoms der Form $y = a \cdot x + b \cdot x^3$ sinnvoll. Bestimme die Koeffizienten a und b durch Regressionsrechnung. (ev. Ansatz von Hand, Berechnung von a und b mit Rechnerhilfe)
Stelle Regressionskurve und Daten graphisch dar.
Erkläre kurz die Grundidee der Regression.

Mit den Messwerten wird die Funktion D(a,b) gebildet, welche die Summe der quadrierten Abstände der Messwerte von der Kurve beschreibt. Mit der Differentialrechnung wird dann das Minimum von D(a,b) bestimmt.

$$D(a,b) = \sum_{n} \left(U_i - y(I_i)\right)^2$$ Ansatz für Abstandsfunktion D(a,b) mit $y = a \cdot x + b \cdot x^3$

$$D(a,b) := \left[\sum_{i=0}^{3} \left[U_i - \left[a \cdot I_i + b \cdot (I_i)^3\right]\right]^2\right]$$ Definition von D(a,b) in MCD

$Da(a,b) := \frac{d}{da} D(a,b)$ $Db(a,b) := \frac{d}{db} D(a,b)$ Bestimmung der partiellen Ableitungen

$a := 0$ $b := 0$

Lösen den Gleichungssystems
(Starwerte für a und b notwendig ->
numerische Lösung des Gleichungssystems)

Vorgabe

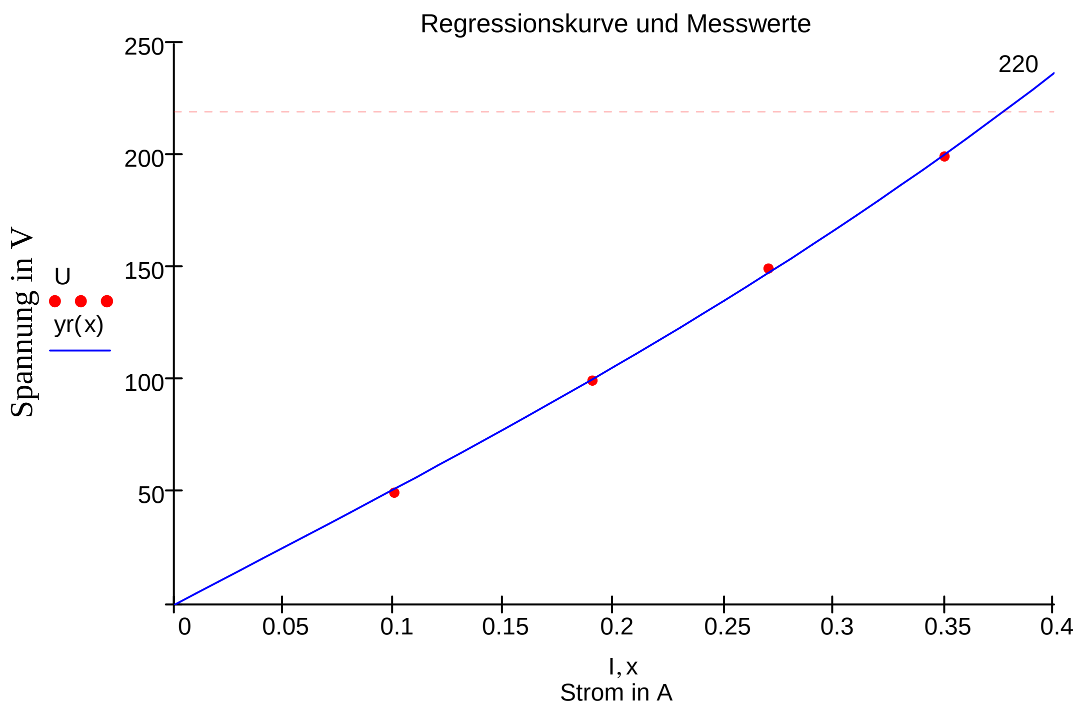
$Da(a,b) = 0$ $Db(a,b) = 0$

$r :=$ Suchen(a,b) $r = \begin{pmatrix} 510.62 \\ 514.881 \end{pmatrix}$ Gesuchte Werte für a und b

$D(r_0, r_1) = 7.409$

Minimale quadratische Summe der Abstände
(ohne Nachweis)

$yr(x) := r_0 \cdot x + r_1 \cdot x^3$ Definition der Regressionskurve



Grundidee der Regression: Eine Kurve wird so gelegt, dass sie möglichst nahe an allen Messwerten vorbeigeht. Die Funktion D beschreibt die Summe der quadratischen Abstände (siehe oben) und mittels Differentialrechnung (partielle Ableitungen) kann das Minimum von D bestimmt werden. Wichtig ist bei der Regression, dass mehr Messwerte als unbekannte Koeffizienten vorhanden sind. (ist meist kein Problem)

C. Interpolation: Als Alternative zur Regression könnte man die Messpunkte durch ein Polynom 3.Grades verbinden. Stelle die entsprechenden Gleichungen in Form eines Gleichungssystems auf und bestimme die Polynomkoeffizienten a, b, c, d durch Lösen des Gleichungssystems. Welche Methoden kennst du zum Lösen von Gleichungssystemen ? Stelle das Polynom und die Messdaten ebenfalls graphisch dar. (MCD)

Anmerkung: Hier wird mittels Matrix gelöst, aber auch mit Lösungblock: Vorgabe suchen möglich

Das Gleichungssystem für a,b,c,d ergibt sich durch Einsetzen der Messwerte in $U = a \cdot I^3 + b \cdot I^2 + c \cdot I + d$

Mit Matrixschreibweise kann das Gleichungssystem als $A \cdot p = U$ geschrieben werden mit dem gesuchten

Lösungsvektor $p = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. Dieser kann durch die Inverse mit $p = A^{-1} \cdot U$ bestimmt werden.

Berechnung von A

$$A := \begin{bmatrix} (I_0)^3 & (I_0)^2 & I_0 & 1 \\ (I_1)^3 & (I_1)^2 & I_1 & 1 \\ (I_2)^3 & (I_2)^2 & I_2 & 1 \\ (I_3)^3 & (I_3)^2 & I_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösen des GLS

$$p := A^{-1} U$$

$$p = \begin{pmatrix} -1633.987 \\ 1323.529 \\ 278.105 \\ 10.588 \end{pmatrix}$$

Lösung

Zahlenwerte und Probe $A \cdot p = U$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \times 10^{-3} & 0.01 & 0.1 & 1 \\ 6.859 \times 10^{-3} & 0.036 & 0.19 & 1 \\ 0.02 & 0.073 & 0.27 & 1 \\ 0.043 & 0.122 & 0.35 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot p = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}$$

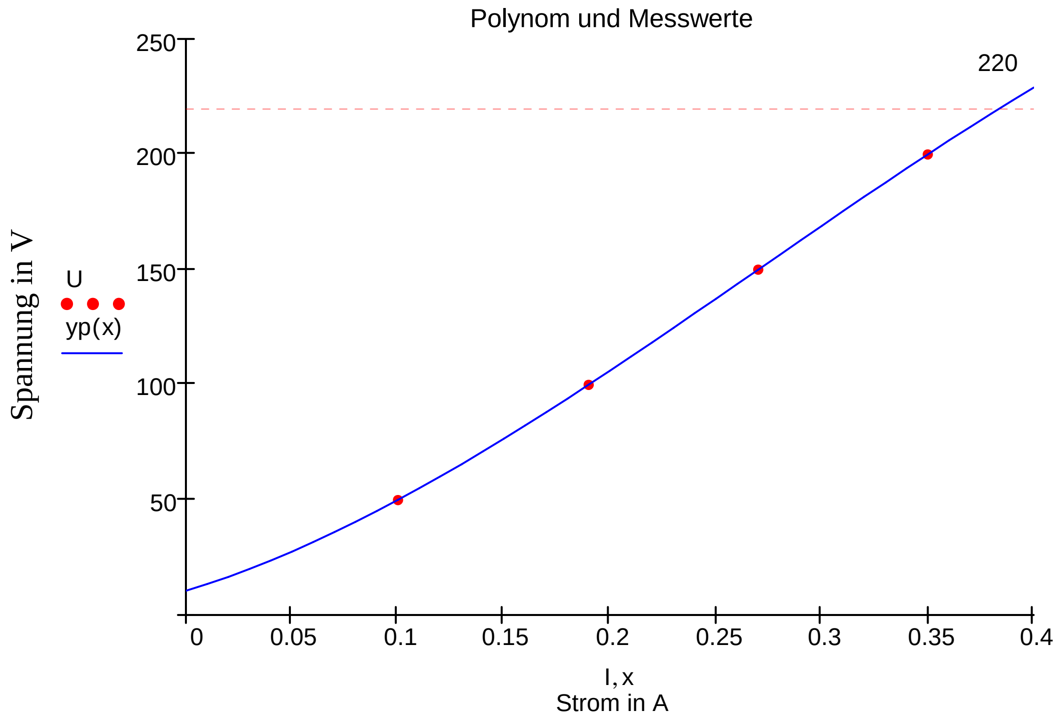
Gleichungssysteme können exakt mittels Einsetzungs-, Gleichsetzungs, Additionsverfahren (1.Klasse) und durch die Inverse einer Matrix gelöst werden. Weiters gibt es noch verschiedene Verfahren um Näherungslösungen zu bestimmen.
(Anmerkung: In der Praxis treten häufig sehr große Gleichungssysteme mit tausenden oder gar millionen Unbekannten auf, die es effektiv zu lösen gilt)

$$yp(x) := p_0 \cdot x^3 + p_1 \cdot x^2 + p_2 \cdot x + p_3$$

Definition des Interpolationspolynoms

$$\sum_{i=0}^{3} \left(U_i - yp\left(I_i\right)\right)^2 = 0$$

Berechnung der Summe der quadrierten Abstände (vgl B) ergibt erwartungsgemäß 0.



D. Welcher prinzipielle Unterschied besteht zwischen der Regression und dem Interpolationspolynom bezüglich der einzelnen Datenpunkte ? Bestimme bei A, B C jeweils die Summe der quadratischen Abstände. Diskutiere Vor- und Nachteile der Methoden
Zeichne die Lösungen A,B,C für 0 < i < 1 A. Überlege bei welchen Varianten eine Extrapolation physikalisch sinnvoll erscheint ?

- Die Interpolation benötigt genausoviele Datenpunkte wie Unbekannte, bei der Regression müssen mehr Datenpunkte als Unbekannte vorliegen.
- Die Kurve geht bei der Interpolation durch jeden Punkt, bei der Regression nur möglichst nahe vorbei. (siehe untenstehenden Vergleich der quadrierten Abstände)
- Bei der Regression kann eine aus der Theorie vorgegebenen Kurve verwendet werden (siehe B), bei der Interpolation ergibt sich die Kurve (= Polynom) aus der Anzahl der Daten.
- Die Interpolation hat vor allem bei großen Datenmengen Probleme, da die Gleichungsysteme sehr groß werden und unter Umständen auch numerische Probleme auftreten. Weiters treten häufig Schwingungen zwischen den Messwerten auf und auch die Extrapolation ist nicht sinnvoll.
- Im Allgemeinen ist daher bei Messwerten die Regression der Polynominterpolation vorzuziehen.

Vergleich der Abstände der Messwerte zur Kurve

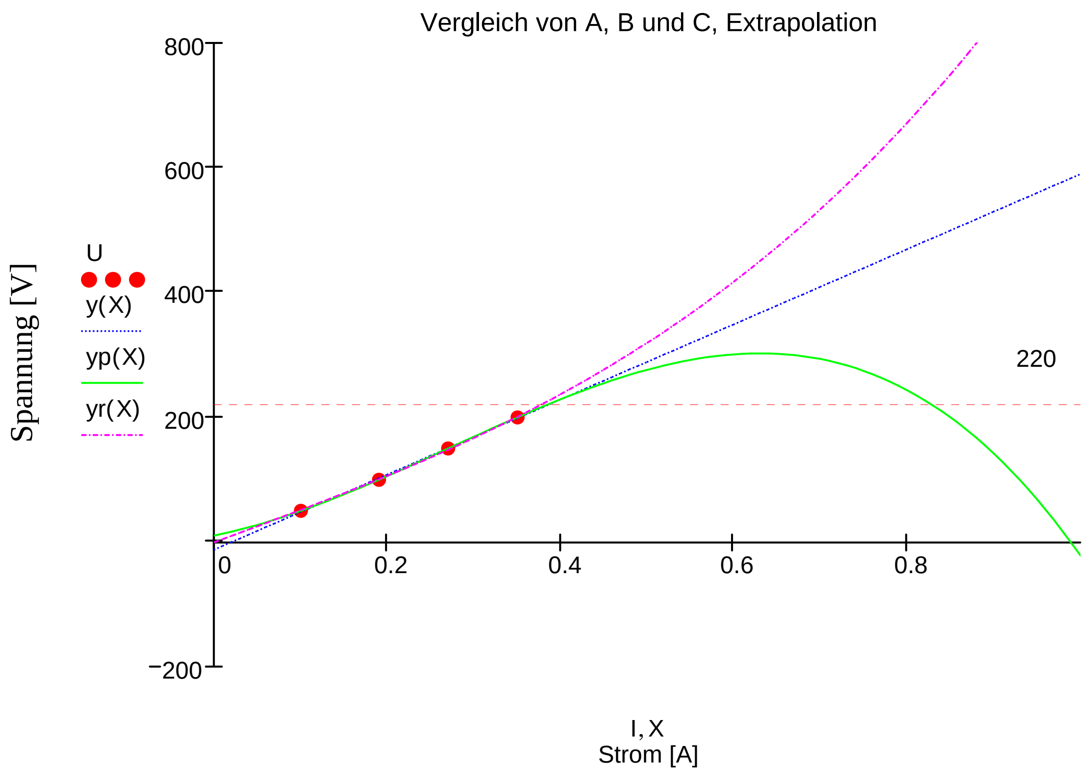
A $\sum_{i=0}^{3} \left(U_i - y(I_i)\right)^2 = 10.877$

Berechnung der Summe der minimalen quadrierten Abstände bei linearer Regression ist größer als beim kubischen Regressionspolynom.

B $D(r_0, r_1) = 7.409$

C $\sum_{i=0}^{3} \left(U_i - yp(I_i)\right)^2 = 0$

Berechnung der Summe der quadrierten Abstände (vgl A und B) ergibt erwartungsgemäß 0.

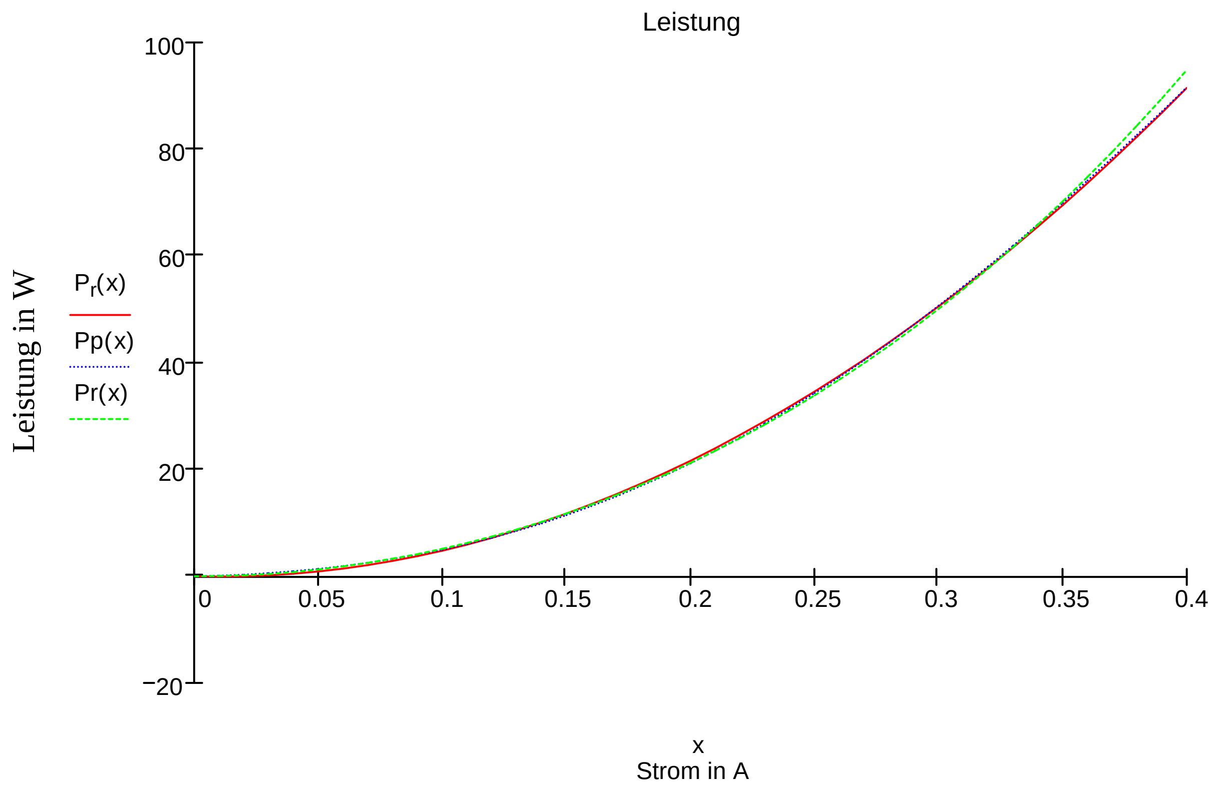


Extrapolation erscheint sinnvoll, wenn die Kurve auch theoretisch begründbar ist. (B)
Gerne wird auch linar (A) extrapoliert, da dies einfach ist.
Das Polynom zeigt bei größeren Strömen einen physikalisch nicht begründbaren Verlauf.

E. Stelle die Leistung der Glühbirne über dem Strom mit den Varianten aus A, B und C dar. Bestimme jeweils die Leistung bei 220 V.

$\text{Leistung} = \text{Spannung} \cdot \text{Strom} = y \cdot x$

$P_r(x) := y(x) \cdot x$ $\qquad Pr(x) := yr(x) \cdot x$ $\qquad Pp(x) := yp(x) \cdot x$



Lösung näherungsweise mit Funktion Wurzel und Startwert zur Bestimmung des Stroms bei 220 V.
(in den Diagrammen in A, B, C ist jeweils eine waagrechte Linie bei 220 V eingezeichnet, der Startwert ergibt sich dann aus der Graphik).

Strom bei 220 V: $xx := 0.35$ $x_r := \mathrm{wurzel}(y(xx) - 220, xx)$ $x_r = 0.385337$

$xx := 0.35$ $xr := \mathrm{wurzel}(yr(xx) - 220, xx)$ $xr = 0.376873$

$xx := 0.35$ $xp := \mathrm{wurzel}(yp(xx) - 220, xx)$ $xp = 0.383963$

$P_r(x_r) = 84.774$ $Pr(xr) = 82.912$ $Pp(xp) = 84.472$

Der Vergleich der Ergebnisse aus A, B, C zeigt zwar sehr gute Übereinstimmung von A und C aber bei 220 V bzw den zugehörigen Strömen (>0,35A) ist man bereits im Bereich der Extrapolation. Daher sind diese Ergebnisse mit Vorsicht zu betrachten, seriöser ist (auch aus theoretischer Sicht) das Ergebnis B.

Lösungen