



Bremung einer Lokomotive

- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**

Modellierung von Einflussgrößen (Kräften)
stückweise stetige Funktionen
Regression und Spline; Bestimmtheitsmaß
Zusammenhang kinematischer Größen;
graphische Darstellung von Funktionen in 2D und 3D;
numerisches Lösen von Differentialgleichungen;

- **Kurzzusammenfassung**

Ein praxisnahes Problem wird mathematisch modelliert und gelöst.

- **Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: [optional]**

Das hier vorgestellte Beispiel zeigt sehr gut wie die verschiedensten Teilgebiete der Mathematik verwendet werden können um ein praxisrelevantes Beispiel zu lösen.

- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**

dem Lehrplan entsprechend für viele HTL Fachrichtungen;

- **Mathcad-Version:**

Prime 3

Bremmung einer Lokomotive

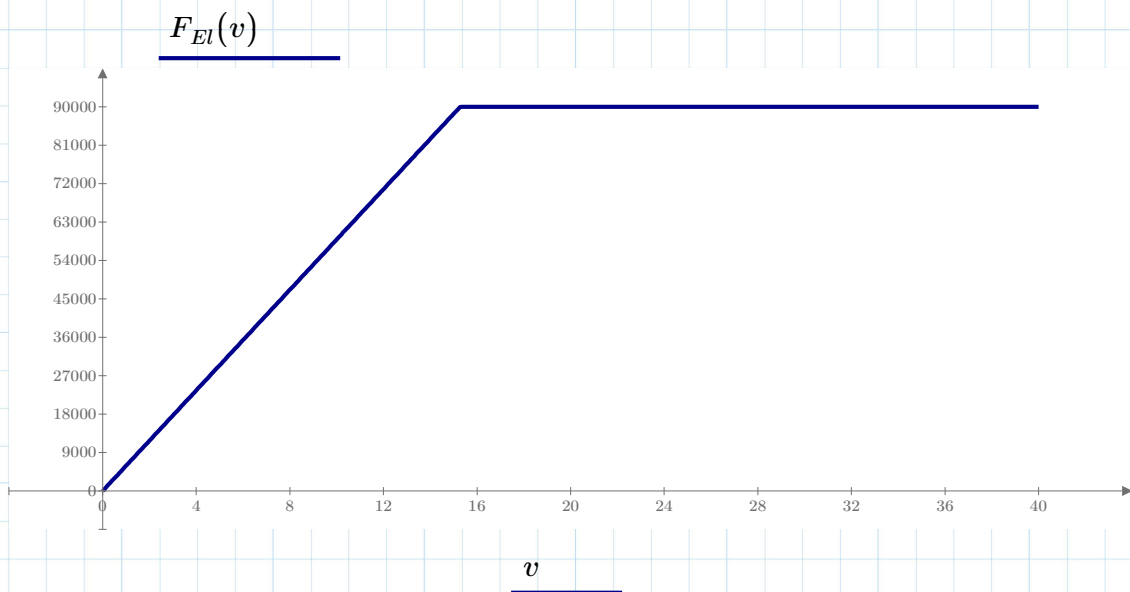
Um den Bremsvorgang zu beschreiben, müssen die einzelnen auf die Lokomotive wirkenden Kräfte mathematisch modelliert werden.

1. Elektrische Kraft

Der Verlauf der elektrischen Kraft ist geschwindigkeitsabhängig. Dabei wird der Elektromotor der Lokomotive als Generator verwendet. Die Kraftübertragung erfolgt über die Reibung der Räder.

elektrische Bremse:
F in N und v in m/s

$$F_{El}(v) := \begin{cases} \frac{90}{55} \cdot v \cdot 1000 \cdot 3.6 & \text{if } v < \frac{55}{3.6} \\ 90 \cdot 1000 & \text{else} \end{cases}$$



Senkrechte Achse: Kraft in N
Waagrechte Achse: Geschwindigkeit in m/s

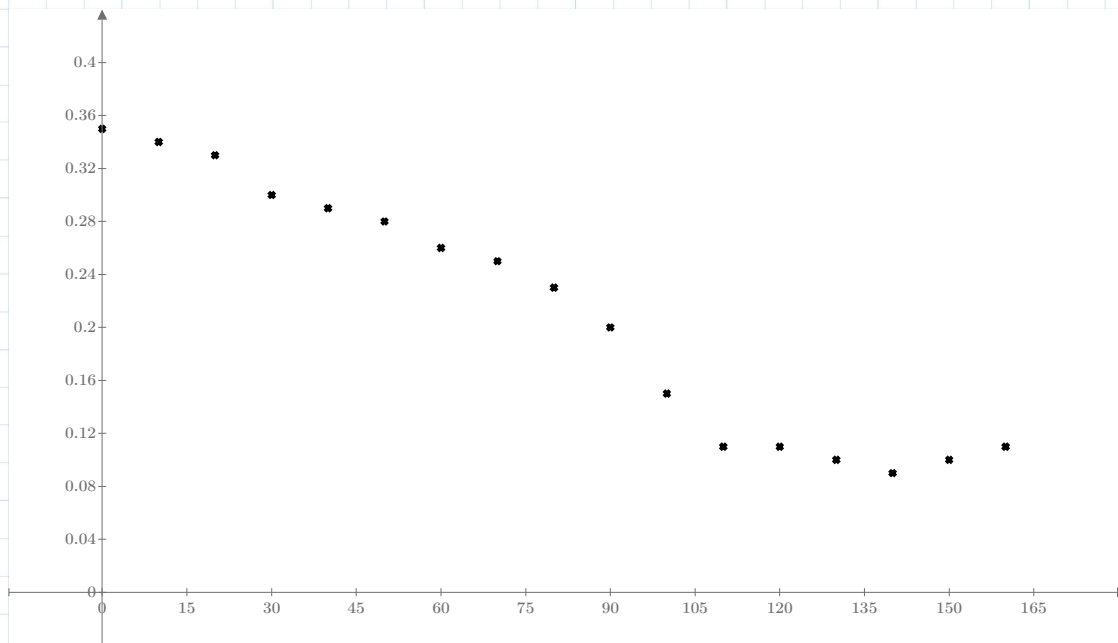
2. Reibungskraft

2.1 Reibungskoeffizient μ

Der Reibungskoeffizient zwischen Rad und Schiene ist geschwindigkeitsabhängig entsprechend der nachfolgenden Tabelle mit einem Minimum bei ca. 140 km/h:
erste Zeile: v in km/h ; zweite Zeile: μ

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 & 110 & 120 & 130 & 140 & 150 & 160 \\ .35 & .34 & .33 & .30 & .29 & .28 & .26 & .25 & .23 & .20 & .15 & .11 & .11 & .10 & .09 & .10 & .11 \end{bmatrix}$$

$$M := M^T$$



Senkrechte Achse: Reibungskoeffizient μ

Waagrechte Achse: Geschwindigkeit in km/h

Der durch die Messwerte angedeutete Verlauf könnte durch eine Polynomfunktion gut beschrieben werden. Eine entsprechende stetige Funktion ergibt sich aus der Regressionsrechnung oder durch einen Spline.

Modellierung durch ein Regressionspolynom 3. bzw. 4. Grades:

$$L3 := \text{regress} \left(\frac{M^{(0)}}{3.6}, M^{(1)}, 3 \right)$$

$$\mu3(v) := \sum_{i=0}^3 v^i \cdot L3_{3+i}$$

$$L3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0.338 \\ 0.002 \\ -5.316 \cdot 10^{-4} \\ 8.406 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Bestimmtheitsmaß B:

$$B3 := \frac{\sum_{i=0}^{\text{rows}(M)-1} \left(\mu3 \left(\frac{M_{i,0}}{3.6} \right) - \text{mean}(M^{(1)}) \right)^2}{\sum_{i=0}^{\text{rows}(M)-1} \left(M_{i,1} - \text{mean}(M^{(1)}) \right)^2}$$

$B3 = 0.98100$

$$L4 := \text{regress} \left(\frac{M^{(0)}}{3.6}, M^{(1)}, 4 \right)$$

$$\mu4(v) := \sum_{i=0}^4 v^i \cdot L4_{3+i}$$

$$L4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0.353 \\ -0.007 \\ 4.341 \cdot 10^{-4} \\ -2.604 \cdot 10^{-5} \\ 3.875 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

Bestimmtheitsmaß B:

$$B4 := \frac{\sum_{i=0}^{\text{rows}(M)-1} \left(\mu4 \left(\frac{M_{i,0}}{3.6} \right) - \text{mean}(M^{(1)}) \right)^2}{\sum_{i=0}^{\text{rows}(M)-1} \left(M_{i,1} - \text{mean}(M^{(1)}) \right)^2}$$

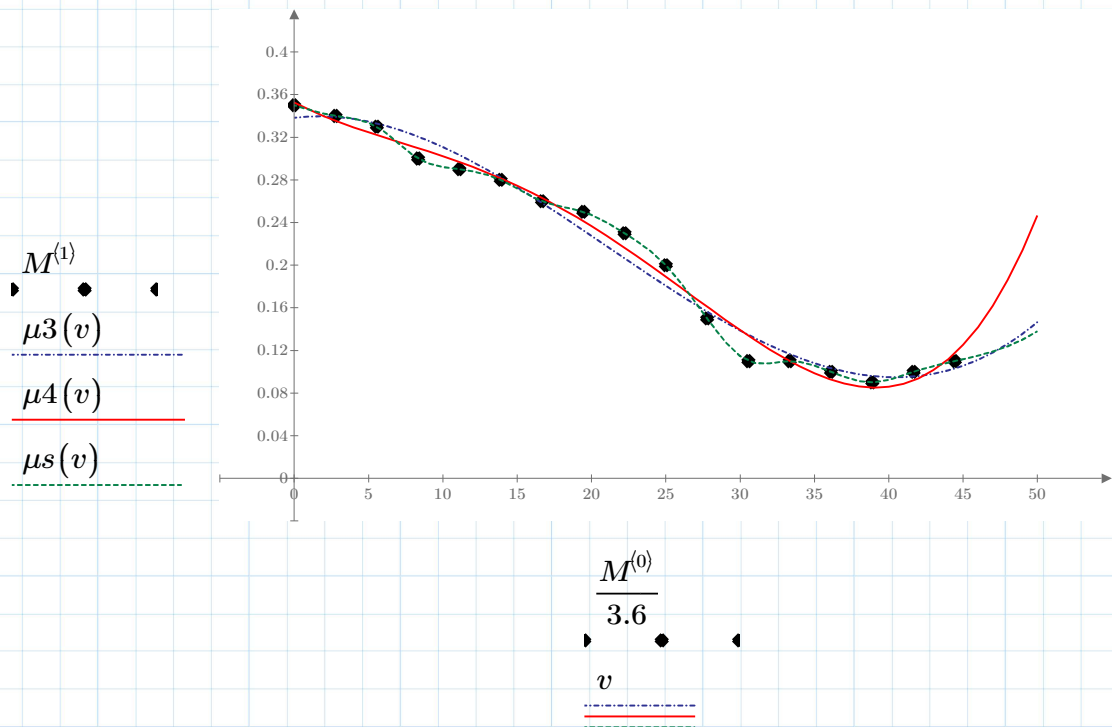
$B4 = 0.98976$

Modellierung durch Spline:

$$C := \text{lspline} \left(\frac{M^{(0)}}{3.6}, M^{(1)} \right)$$

$$\mu s(v) := \text{interp} \left(C, \frac{M^{(0)}}{3.6}, M^{(1)}, v \right) \quad v := 0, 1..50$$

Darstellung der verschiedenen Modelle für den Reibungskoeffizient



Senkrechte Achse: Reibungskoeffizient μ
 Waagrechte Achse: Geschwindigkeit in m/s

Für die weitere Betrachtung kann jetzt eines der drei verfügbaren Modelle verwendet werden: Aufgrund des dargestellten Verlaufs scheinen die beiden Regressionsmodelle eine im Sinn der Stetigkeit und der Monotonie bessere Option zu sein. In beiden Fällen ist das Bestimmtheitsmaß B sehr nahe bei 1, womit sich bei beiden Varianten eine große Übereinstimmung mit den Messwerten zeigt. Die Spline folgt den Messwerten exakt, oszilliert dabei allerdings relativ stark entsprechend den Messwerten.

2.2 Charakteristik des Bremszylinders

Der Aufbau der Bremskraft durch Druckluft im Bremszylinder kann durch einen exponentiellen Sättigungsprozess beschrieben werden, wobei sich die Bremskraft asymptotisch dem Maximalwert nähert. Die dazu benötigte charakteristische Zeitdauer ist T (für das Erreichen von 95% der maximalen Bremskraft). Zusätzlich muss noch die Kraft der Rückstellfeder überwunden werden (wird hier vernachlässigt). Der Zylinder wirkt entweder direkt - oder über eine Scheibenbremse mit entsprechender Übersetzung - auf die Räder. Dieses zeitabhängige Verhalten kann durch den folgenden Term beschrieben werden:

$$\left(1 - e^{-3 \cdot \frac{t}{T}}\right)$$

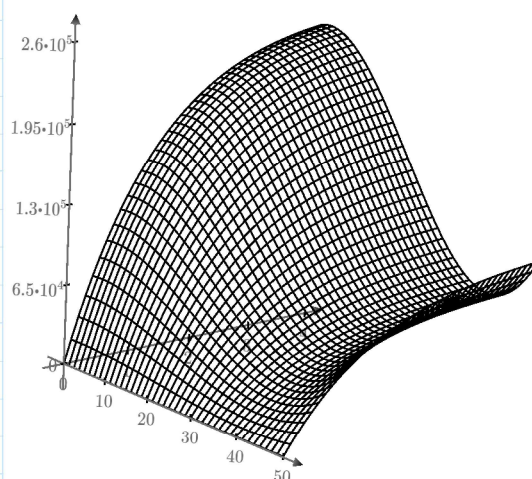
2.3 Die Reibungskraft als Funktion von Zeit und Geschwindigkeit

Für die Modellierung der Reibungskraft in N (in Abhängigkeit von der Zeit in sec und der Geschwindigkeit in m/s) wird die Masse m in kg, der Wirkungsgrad ν der Bremsanlage, der maximale Druck p in pa und die Fläche des Druckzylinders A in m² sowie die charakteristische Zeitdauer T in s zur Entwicklung der Bremskraft verwendet.

Die verfügbare Reibungskraft F_R hängt von den oben beschriebenen Parametern ab, die theoretische Obergrenze der Reibungskraft F_{Max} kann mit Hilfe der Masse beschrieben werden.

$$m := 85000 \quad T := 4 \quad \nu := 0.85 \quad p := 3.8 \cdot 10^5 \quad A := 177.5^2 \cdot \pi \cdot 10^{-6}$$

$$F_R(v, t) := 4 \cdot 6.11 \cdot p \cdot A \cdot \nu \cdot \mu_3(v) \cdot \left(1 - e^{-3 \cdot \frac{t}{T}}\right) \quad F_{Max}(v) := m \cdot 10 \cdot \mu_3(v)$$



F_R

Das obige 3D Diagramm zeigt den Verlauf der Bremskraft in N in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit in m/s (auf der x-Achse nach rechts unten) und in Abhängigkeit von der Zeit (auf der y - Achse nach rechts oben im Hintergrund)
 In Richtung der Geschwindigkeit v ist deutlich der Verlauf des Reibungskoeffizienten zu erkennen, in Richtung der Zeit der exponentielle Sättigungsvorgang.

3. Luftwiderstand

Zur Beschreibung des Luftwiderstandes wird das Modell der Newton'schen Reibung verwendet. Der Luftwiderstand in N hängt von den Konstanten Dichte der Luft ρ (in kg/m^3), angeströmte Fläche A (in m^2), Formbeiwert c_W sowie von der variablen Geschwindigkeit v in m/s ab.

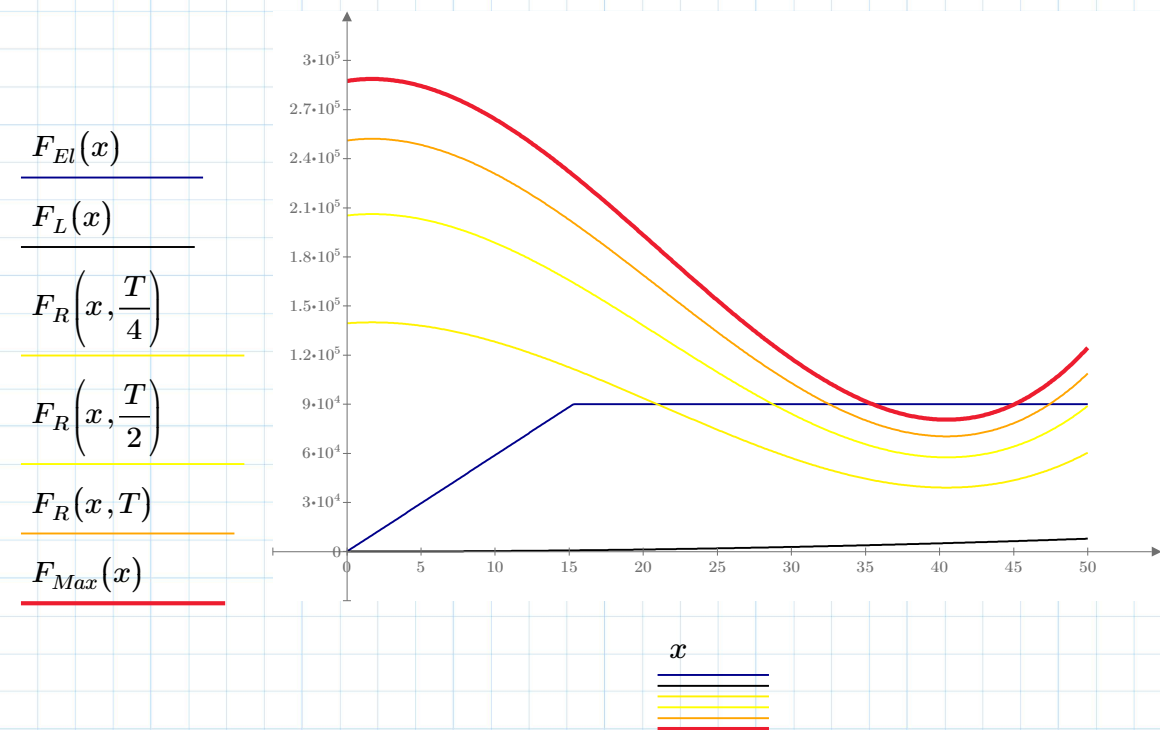
$$A := 11$$

$$c_W := 0.44$$

$$\rho := 1.3$$

$$F_L(v) := \frac{\rho \cdot A \cdot c_W \cdot v^2}{2}$$

4. Vergleich der einwirkenden Kräfte



Senkrechte Achse: Kräfte in N
 Waagrechte Achse: Geschwindigkeit in m/s

Das obenstehende Diagramm vergleicht die einwirkenden Kräfte quantitativ über der Geschwindigkeit in m/s. Die Reibung ist zu unterschiedlichen Zeiten dargestellt. Der Luftwiderstand ist im Vergleich zu den beiden anderen Kräften beinahe vernachlässigbar klein, die Reibungskraft ist für große Geschwindigkeiten geringer als die elektrische Kraft, bei ca. 40 m/s sogar größer als die verfügbare Reibungskraft.

5. Beschreibung der Bewegung durch eine Differenzialgleichung

Die Bremsbewegung des Zuges kann als Differenzialgleichung beschrieben und mit numerischen Verfahren gelöst werden. Als Parameter der numerischen Lösung sind ein Startwert (bei $t = 0$) und der Endwert des Lösungsintervalls auf der Zeitachse sowie die Anzahl der gewünschten Zwischenschritte N im Lösungsintervall erforderlich.

$Ende := 27$ $N := 1000$

Nebenbedingungen Schätzwerte	$m \cdot v'(t) = - \left(\begin{array}{l} F_L(v(t)) + \text{if } F_{El}(v(t)) + F_R(v(t), t) < F_{Max}(v(t)) \\ \quad \parallel \\ \quad F_{El}(v(t)) + F_R(v(t), t) \\ \text{else} \\ \quad \parallel \\ \quad F_{Max}(v(t)) \end{array} \right)$
	$v(0) = 45$
Gleichungslöser	$v := \text{odesolve}(v(t), Ende, N)$

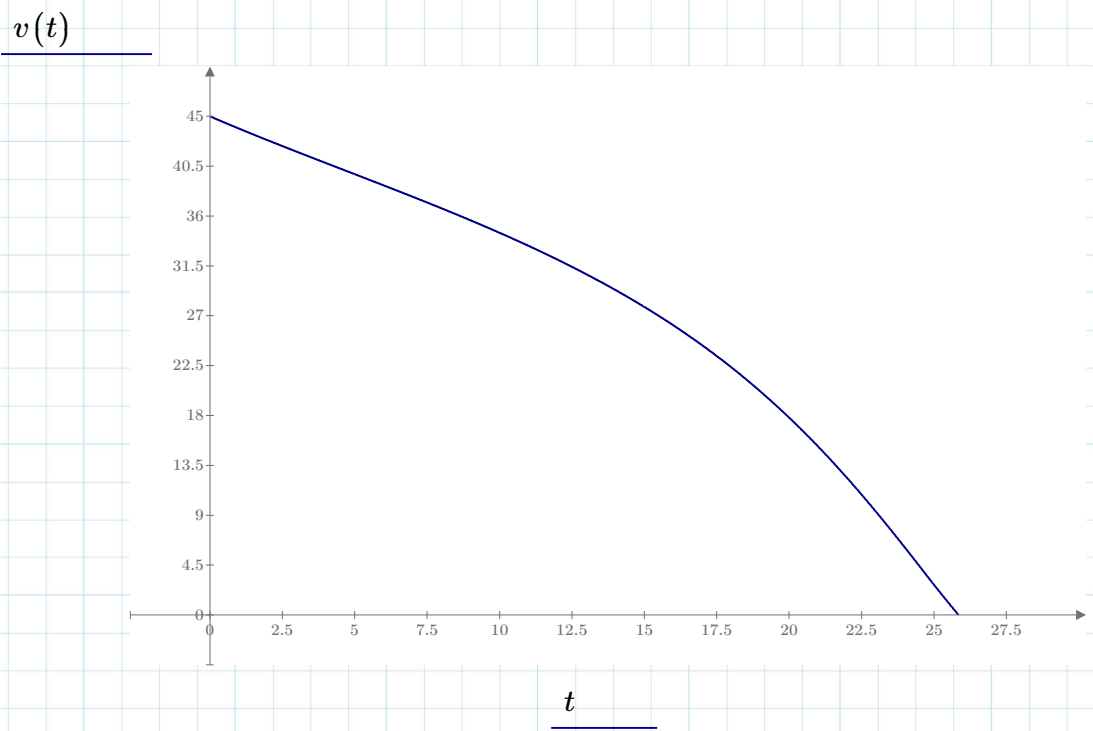
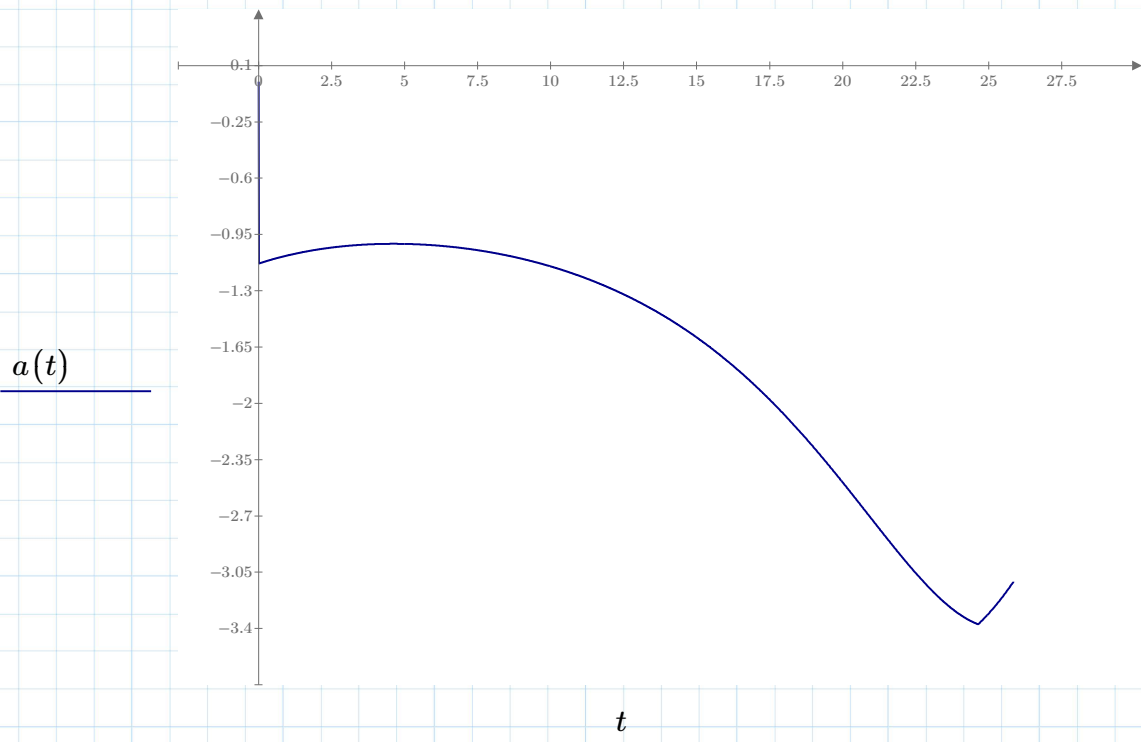
Ermittlung der Bremszeit t_B und des Verlaufes von Beschleunigung und Weg mit Hilfe der Analysis:

$$a(t) := \frac{d}{dt} v(t) \qquad s(t) := \int_0^t v(x) dx$$

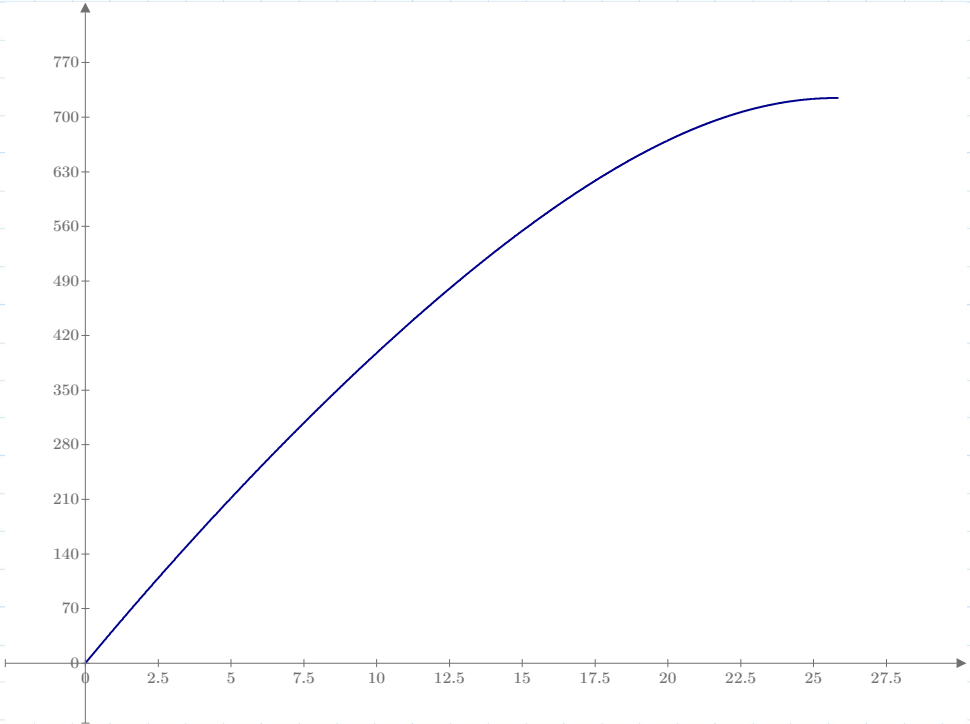
$$t_B := \text{root}(v(t), t, 0, Ende) \qquad t_B = 25.849 \qquad t := 0, 0.01 .. t_B + 0.01$$

6. Darstellung der Lösung

t in s, a in m/s², v in m/s und s in m

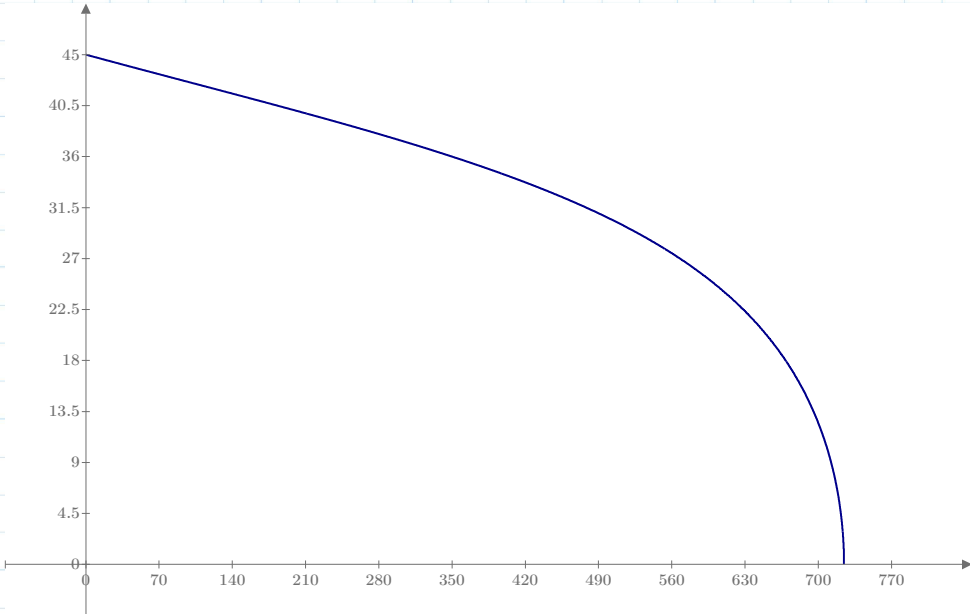


$s(t)$



t

$v(t)$



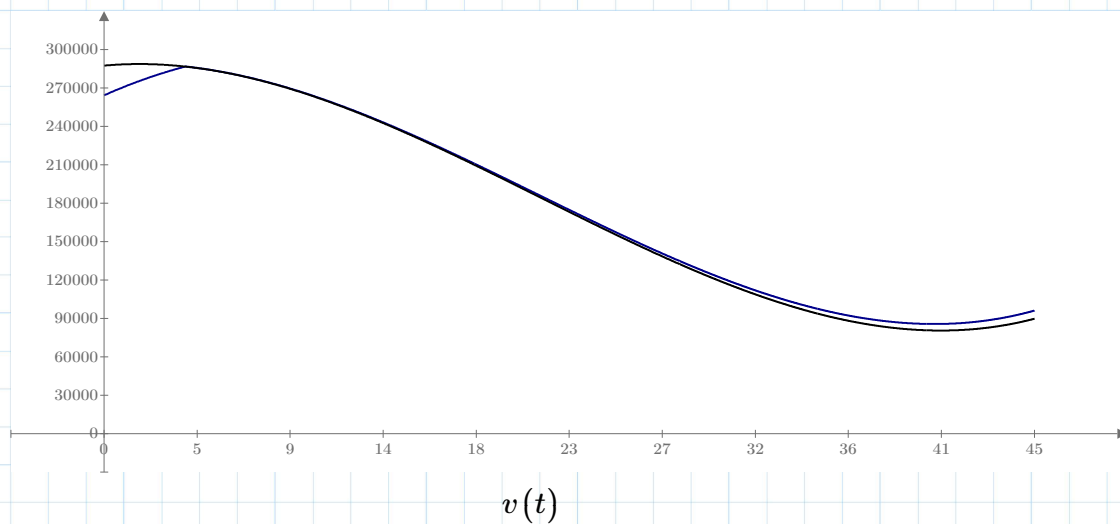
$s(t)$

7. Verlauf der Kraft über der Geschwindigkeit

$$F_{Ges}(t) := F_L(v(t)) + \begin{cases} F_{El}(v(t)) + F_R(v(t), t) & \text{if } F_{El}(v(t)) + F_R(v(t), t) < F_{Max}(v(t)) \\ F_{Max}(v(t)) & \text{else} \end{cases}$$

$F_{Ges}(t)$

$F_{Max}(v(t))$



senkrechte Achse: Kraft in N

waagrechte Achse: Geschwindigkeit in m/s

Nach dem Lösen der Differentialgleichung kann nun der tatsächliche Kraftverlauf beim Bremsvorgang dargestellt werden.

Deutlich ist (von rechts nach links beschrieben) zu erkennen: Bei großen Geschwindigkeiten ist die Bremskraft durch den Luftwiderstand geringfügig über der maximal möglichen Reibungskraft. Der Anstieg der bremsenden Kräfte wird durch die Reibungskraft hervorgerufen und erreicht bei ca. 5 m/s (55 km/h) ein Maximum. Im letzten Teil ist ein Abfall der Bremskraft zu beobachten, der durch den Verlauf der elektrischen Bremse hervorgerufen. Dieser Abfall ist auch im a-t Diagramm am Ende des Bremsvorgangs zu erkennen.

Bei geringen Geschwindigkeiten wird die maximale Bremskraft nicht erreicht, da hier die Kraft der elektrischen Bremse gegen Null absinkt.

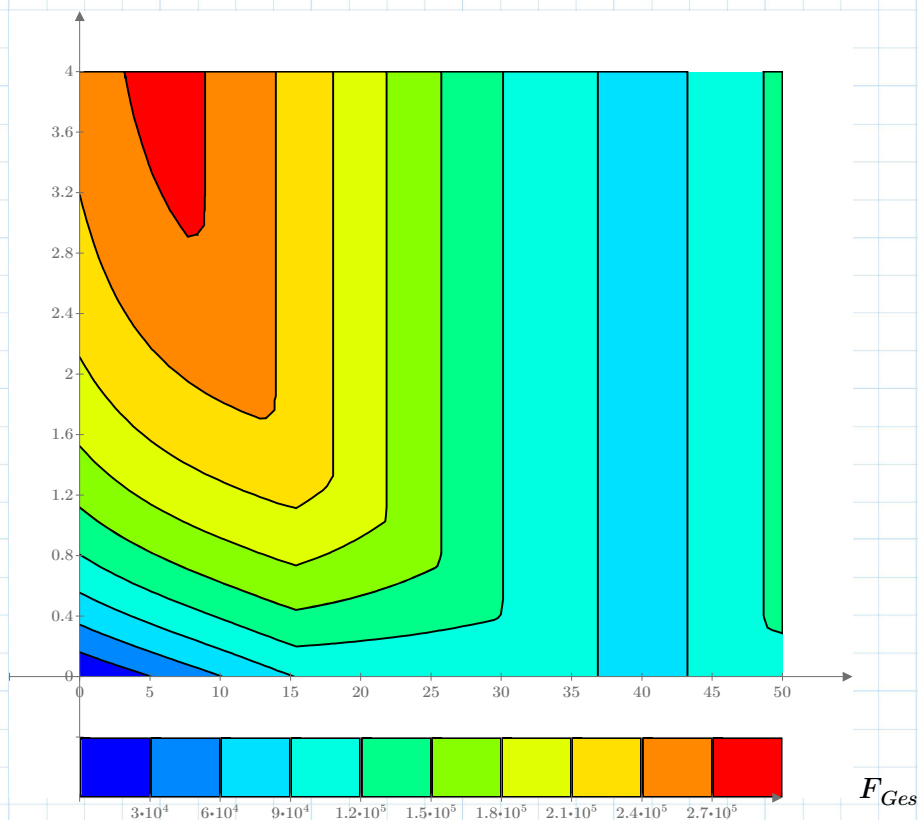
8. Verlauf der Kraft über Geschwindigkeit und Zeit

Punktweise Definition der Kraft über Geschwindigkeit und Zeit.

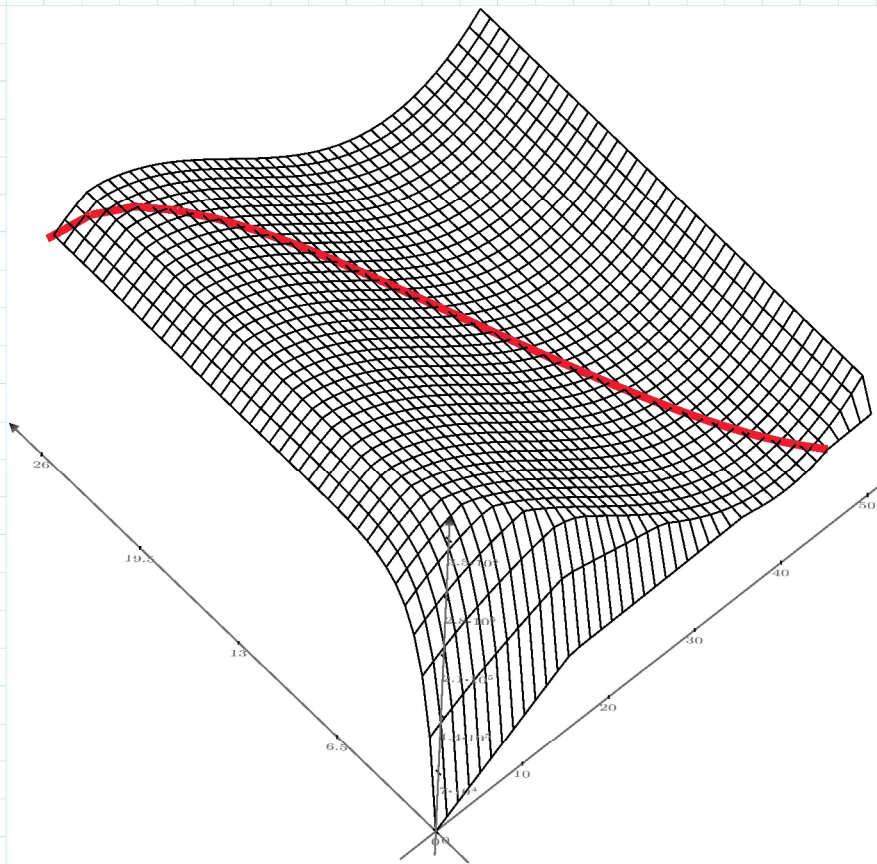
$$i := 0, 1 \dots \text{round}(t_B) \quad M_{i,0} := v(i) \quad M_{i,1} := i \quad M_{i,2} := F_{Ges}(i)$$

Definition der Kraft über Geschwindigkeit und Zeit

$$F_{Ges}(v, t) := F_L(v) + \begin{cases} F_{El}(v) + F_R(v, t) & \text{if } F_{El}(v) + F_R(v, t) < F_{Max}(v) \\ F_{Max}(v) & \text{else} \end{cases}$$



Im obenstehenden Diagramm ist die Bremskraft über der Geschwindigkeit in m/s (waagrecht) und der Zeit in s (senkrecht) über Farben codiert dargestellt.



F_{Ges}

M

Das obenstehende Diagramm zeigt die Bremskraft als Fläche (z-Achse) über der Geschwindigkeit in m/s (nach rechts hinten) und der Zeit in s (nach links hinten) in welcher der Bremsvorgang als parametrische Kurve eingezeichnet ist.