# Risiko

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Stochastik: Laplace, Abzähltechniken, UND/ODER-Regel, bedingte W-keit, Erwartungswert, Vertrauensbereich;
  Simulation, Wahrscheinlichkeit als Grenzwert eines statistischen Versuchs;
  Grenzwert einer Folge

- Kurzzusammenfassung

  Ein Beispiel, das einerseits sehr viele Teile der Stochastik enthält und andererseits auch die Möglichkeiten des Computers bei der Lösung komplexerer Probleme zeigt.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Anwendung der Stochastik auf ein relativ bekantes Brettspiel mit vielen Teilgebieten der Stochastik.
  Der Zeitaufwand hängt von der Art der Verwendung ab. Das Beispiel kann als zusammenfassender Abschluss oder auch in Teilen in den Unterricht integriert werden.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  dem Lehrplan entsprechend für alle HTL Abteilungen im 4. und 5. Jahrgang;

- Mathcad-Version:

  Prime 3

- Literaturangaben:

  https://de.wikipedia.org/wiki/Risiko_(Spiel)

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  ZB: unter https://en.wikipedia.org/wiki/Risk_(game) bzw.
  https://de.wikipedia.org/wiki/Risiko_(Spiel) finden sich noch weitere Anregungen.

# Risiko

Beim bekannten Brettspiel Risiko müssen die einzelnen Spieler mit ihren Spielsteinen (=Armeen) andere Länder "erobern". Die "Eroberung" eines Landes ist ein Zufallsprozess bei dem die beiden betroffenen Spieler würfeln. Entsprechend der Anzahl der Spielsteine (Armeen) des Angreifers/Verteidigers darf der Angreifer/Verteidiger mit der entsprechenden Anzahl von Würfeln gleichzeitig würfeln. Die im untenstehenden Bild dargestellte Situation zeigt 3 Angreifer (rot) und 2 Verteidiger (blau). Die Anzahl der Würfel ist für den Angreifer auf maximal 3 (rot), für den Verteidiger auf maximal 2 (blau) beschränkt.


Die einfachste Möglichkeit ist **jeweils ein** Spielstein des Angreifers und des Verteidigers pro Land, bei der jeder einen Würfel erhält. Hier gewinnt der Angreifer das Land, wenn seine Augenzahl höher als jene des Verteidigers ist. Wird ein Land von **einem** Spielstein verteidigt, während **zwei/drei** Spielsteine angreifen, so erhält der Angreifer zwei/drei, der Verteidiger einen Würfel. Der Angreifer gewinnt das Land, wenn einer seiner Würfel höher als der des Gegenspielers ist.
Beim im Bild dargestellte Fall mit **drei** bzw. **zwei** Würfeln werden die Augenzahlen der Größe nach geordnet (rot: 5-4-1; blau: 6-1) und dann entsprechend der Größe verglichen (blau 6 schlägt rot 5 und rot 4 schlägt blau 1). Im Bildbeispiel müssen daher sowohl der Angreifern als auch der Verteidiger jeweils einen Stein wegnehmen und können dann unter den neuen Voraussetzungen eine neue Runde spielen.

# 1. Wahrscheinlichkeiten für eine erfolgreiche Verteidigung

## 1.1 Ein Angreifer und ein Verteidiger

Dieser Fall lässt sich durch Laplace Wahrscheinlichkeit (Abzählen der möglichen Fälle) oder mit bedingter Wahrscheinlichkeit und Anwendung der UND/ODER Regel behandeln.

Lösung mit Laplace-Wahrscheinlichkeit

$i := 1, 2 .. 6 \qquad j := 1, 2 .. 6$

i und j sind Laufvariable für die Würfelergebnisse von Verteidiger und Angreifer

$M1_{i,j} := i \geq j$

M1 gibt 1, wenn die Augenzahl des Verteidigers (i) größer gleich der des Angreifers (j) ist, sonst 0.

$M1_{0,j} := j \qquad M1_{i,0} := i$

Die erste Spalte bzw. Zeile von M1 sind die möglichen Ausgänge des Würfels von Verteidiger bzw. Angreifer.

$$M1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Matrix M1 zeigt alle 36 möglichen Fälle gleicher Wahrscheinlichkeit, von denen für den Verteidiger 21 Fälle günstig sind.

$P_{11V} := \frac{21}{36} \qquad P_{11V} = 58.333\%$

P**11V** gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass im Fall **1:1** der **V**erteidiger gewinnt. Diese Bezeichnung wird im Folgenden sinngemäß weiter verwendet.

Nachfolgend werden die beiden nachstehenden Zufallsvariablen verwendet.
A ..... Zufallsvariable Augenzahl des Angreifers
B ..... Zufallsvariable Augenzahl des Verteidigers

Lösung mit bedingter Wahrscheinlichkeit sowie UND/ODER Regel:
Es ist die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die Zufallsvariable B größer gleich A ist unter der Voraussetzung, dass A eintritt. Die einzelnen Fälle von A sind mit logischem ODER verbunden.

P($B \geq A$ |A) = P($B = 6$ |6) + P($B \geq 5$ |5) + P($B \geq 4$ |4) + ....

$$P(B \geq A|A) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{21}{36}$$

## 1.2 Zwei Angreifer und ein Verteidiger

Dieser Fall kann ähnlich wie 1.1 gelöst werden, wobei noch Abzähltechniken verwendet werden.
Es gibt $6^3 = 216$ verschiedene Möglichkeiten 3 Würfel zu werfen.
Die für den Verteidiger günstigen Fälle sind:
- wenn der Verteidiger 1 würfelt: 2 x 1 des Angreifers (1,1) - eine Möglichkeit
- wenn der Verteidiger 2 würfelt: (1;1) (1;2) (2;1) (2;2) des Angreifers - 4 Möglichkeiten
- wenn der Verteidiger 3 würfelt: 9 Möglichkeiten des Angreifers
- ...
- wenn der Verteidiger n würfelt: $n^2$ Möglichkeiten (zweistellige Zahl mit n möglichen Ziffern pro Stelle) Damit ergibt sich für die Augenzahlen 1-6:

$$M_{21} := 6^3 \qquad G_{21} := 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

$$P_{21V} := \frac{G_{21}}{M_{21}} \qquad P_{21V} = 42.13\%$$

Auch eine Lösung mit Hilfe eines Baumdiagramms ist möglich

## 1.3 Drei Angreifer und ein Verteidiger

Dieser Fall kann analog zu 1.2 über Abzähltechniken (3-stellige Zahl) oder mit Hilfe eines Baumdiagramms gelöst werden.

$$M_{31} := 6^4 \qquad G_{31} := 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$$

$$P_{31V} := \frac{G_{31}}{M_{31}} \qquad P_{31V} = 34.028\%$$

## 1.4 Verallgemeinerung m Angreifer und ein Verteidiger

Dieser allgemeine Fall tritt beim Spiel Risiko nicht mehr auf, da der Angreifer maximal 3 Würfel zur Verfügung hat. Theoretisch kann aber das weitere Verhalten untersucht werden.

$m := 10$

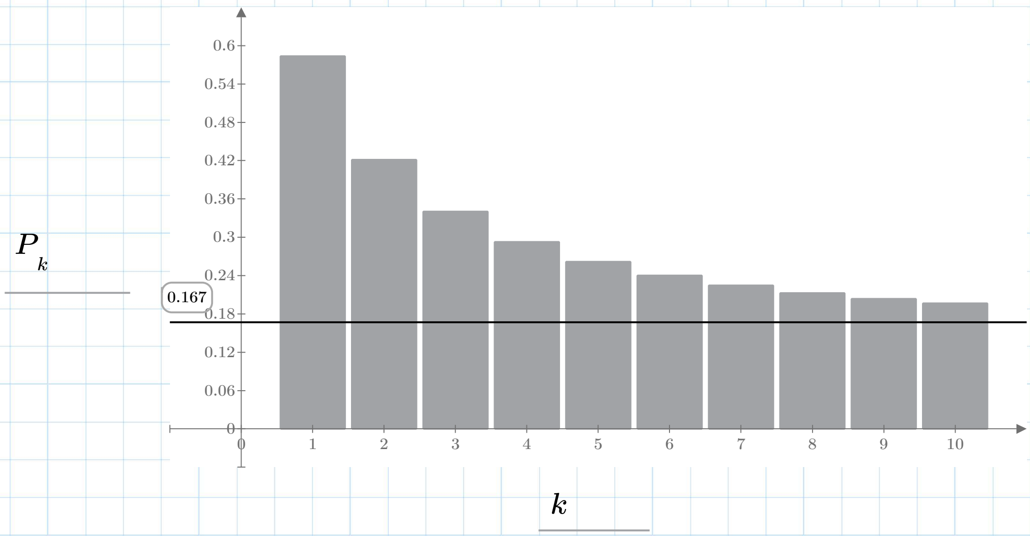
$k := 1, 2 .. m$ Laufvariable für die Anzahl der Angreifer

$M_k := 6^{k+1}$ $G_k := \sum_{i=1}^{6} i^k$

$$P_k := \frac{G_k}{M_k}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 58.333\% \\ 42.13\% \\ 34.028\% \\ 29.257\% \\ 26.151\% \\ 23.995\% \\ 22.431\% \\ 21.261\% \\ 20.364\% \\ 19.664\% \end{bmatrix}$$

Der Vektor P mit den m Ergebnissen (=Wahrscheinlichkeiten) stellt die Elemente einer Folge dar.
(MCD beginnt mit Index 0, daher ist der erste Eintrag 0)
Die ersten beiden Prozentwerte stimmen mit 1.1 und 1.2 überein.
Diese Folge konvergiert gegen den Wert 1/6, da der Verteiger bei "6" immer (unabhängig vom Ergebnis des Angreifers) gewinnt.
(Siehe nachfolgende Grafik)



# 2. Simulation mit Zufallszahlengenerator

Für den Fall m Angreifer gegen 1 Verteidiger ist die Berechnung der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten noch relativ einfach, gibt es jedoch auch mehr als einen Verteidiger, so wird die Berechnung kompliziert (Markovketten) und eine Simulation mithilfe eines Zufallszahlengenerators einfacher.
Nachfolgend sind der einfache Fall m gegen 1 und der komplexere Fall m gegen n in zwei verschiedenen Simulationen realisiert. Der Fall m gegen 1 ist mit einfachen zeilenweisen Vergleichen umzusetzen während m gegen n aufwändiger ist und Methoden der Informatik (Sortieren der Ergebnisse) verlangt.

## 2.1 Simulation von m Angreifern gegen 1 Verteidiger

$m := 3$ Anzahl der Angreifer (nicht größer als in 1.4 wählen)

$N := 10000$ Anzahl der Versuche

$r := 0, 1 .. N-1$ Laufvariable r,p,l

$p := 0, 1 .. m-1$

$l := 0, 1 .. m$

$ZZ^{\langle l \rangle} := \operatorname{ceil}(\operatorname{runif}(N, 0, 6))$

Die erste Spalte der Matrix ZZ stellt die Zufallsvariable des Verteidigers, die restlichen Spalten jene des Angreifers dar. Der Befehl runif erzeugt Spalten mit Zufallszahlen, der Befehl ceil rundet auf die nächstgrößere ganze Zahl.

$$ZZ = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 3 \\ & & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$V_r := \left( \prod_{p=0}^{m-1} \left( ZZ_{r,0} \geq ZZ_{r,p+1} \right) \right)$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Für den Vektor V werden die Ergebnisse des Vergleichs der Würfel (1 bzw. 0) für jeden Versuch multipliziert. Nur wenn alle Vergleiche für den Verteidiger günstig sind, ergibt das Produkt der Vergleiche 1.
$P_{m1V}$ gibt das statistische Ergebnis für die Wahrscheinlichkeit an.

$$P_{m1V} := \frac{\sum V}{N} = 35\%$$

Für $m = 3$ und $N = 1 \cdot 10^4$ ergibt die Simulation den Wert $P_{m1V} = 35\%$ im Vergleich zum exakten Wert $P_m = 34.028\%$ (Differenz: $\left|P_{m1V} - P_m\right| = 0.972\%$ )

Vertrauensbereich für das Ergebnis der Simulation

$$Bi(pp, \alpha) := \text{pbinom}\left( \sum V, N, pp \right) - \alpha$$

Zielfunktion (Nullstellenform) für Vertrauensbereich

$$\alpha := 1\%$$

Irrtumswahrscheinlichkeit

$$pp := P_{m1V} \qquad Pu := \textbf{root}\left( Bi\left( pp, 1 - \frac{\alpha}{2} \right), pp \right) = 33.784\%$$

$$pp := P_{m1V} \qquad Po := \textbf{root}\left( Bi\left( pp, \frac{\alpha}{2} \right), pp \right) = 36.241\%$$

Der $1 - \alpha = 99\%$ Vertrauensbereich geht von Pu bis Po und hat eine Breite von $Po - Pu = 2.457\%$ .
Mit zunehmender Anzahl der Versuche (steigendes N) sinkt die Breite des Vertrauensbereichs.

## 2.2 Simulation von m Angreifern gegen n Verteidiger

$n := 2$ $\quad m := 3$

$N := 10000$

$o := 0, 1 .. N-1$ $\quad p := 0, 1 .. m-1$

$lv := 0, 1 .. n-1$ $\quad la := 0, 1 .. m-1$

$ZZv^{\langle lv \rangle} := \text{ceil}(\text{runif}(N, 0, 6))$ $\quad ZZa^{\langle la \rangle} := \text{ceil}(\text{runif}(N, 0, 6))$

$$ZZv = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 6 \\ 6 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 6 & 1 \\ 5 & 5 \\ & \vdots \end{bmatrix} \qquad ZZa = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ & & \vdots \end{bmatrix}$$

$ZZvs^{\widehat{o}} := \left(\text{reverse}\left(\text{sort}\left(\left(ZZv^{\widehat{o}}\right)^{T}\right)\right)\right)^{T}$ $\quad ZZas^{\widehat{o}} := \left(\text{reverse}\left(\text{sort}\left(\left(ZZa^{\widehat{o}}\right)^{T}\right)\right)\right)^{T}$

$$ZZvs = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ 3 & 2 \\ 6 & 3 \\ 6 & 1 \\ 3 & 3 \\ 6 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 5 \\ & \vdots \end{bmatrix} \qquad ZZas = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ & & \vdots \end{bmatrix}$$

ZZv bzw. ZZa sind die simulierten Werte für die Augenzahlen von Verteidiger bzw. Angreifer. ZZvs bzw. ZZas die in der Zeile absteigend sortieren Werte.

$$V_o := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\operatorname{sign}\left(ZZvs_{o,i} - ZZas_{o,i} + 0.5\right)\right)$$

$$V = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Die Vorzeichenfunktion Signum (mit der additiven Konstante 0,5 um das größer gleich zugunsten des Verteidigers zu berücksichtigen) wird verwendet um die Zufallszahlen auszuwerten.
Der Vektor V gibt den Saldo an gewonnen/verlorenen Spielsteinen aus Sicht des Verteidigers für die jeweilige Simulation an. Je nach Konstellation sind auch Unentschieden möglich.

$$lz := 0, 1 .. n$$

$$Z_{o,lz} := \delta\left(V_o, 2 \cdot lz - n\right)$$

Z gibt zählt die einzelnen Ergebnisse mit Hilfe der Deltafunktion.

$$E_{lz,0} := 2 \cdot lz - n$$

$$E_{lz,1} := \frac{\sum_{i=0}^{N-1} Z_{i,lz}}{N}$$

E gibt die relativen Häufigkeiten aus der Simulation in der zweiten Spalte für die einzelnen möglichen Ausgänge (=Saldo der Spielsteine) in der ersten Spalte an.

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 0.372 \\ 0 & 0.334 \\ 2 & 0.294 \end{bmatrix}$$

Eine graphische Darstellung dieser Ergebnisse findet sich unter Punkt 3.2

Exakte Werte für die Wahrscheinlichkeiten zum Vergleich mit den Ergebnissen der Simulation

| *Angreifer* | *Verteidiger* | *Sieg_A* | *Sieg_V* | *Remis* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 41.7 | 58.3 | 0 |
| 1 | 2 | 25.5 | 74.6 | 0 |
| 2 | 1 | 57.9 | 42.1 | 0 |
| 2 | 2 | 22.8 | 44.8 | 32.4 |
| 3 | 1 | 66 | 34 | 0 |
| 3 | 2 | 37.2 | 29.3 | 33.6 |

Werte entsprechend: https://de.wikipedia.org/wiki/Risiko_(Spiel)

# 3. Erwartungwert

Der Erwartungswert gibt Auskunft über die (bei "sehr vielen" Spielen) durchschnittlich zu erwartenden Verluste/Gewinne hier aus Sicht des Verteidigers.
Positive Werte bedeuten, dass der Verteidiger langfristig im Vorteil ist (dh. der Gegner verliert mehr Spielsteine als der Verteidiger, negative Werte entsprechend umgekehrt.)

## 3.1 Erwartungswert für Spiel m Angreifen gegen 1 Verteidiger

$$\mu m1V_{k,1} := P_k \cdot 1 + \left(1 - P_k\right) \cdot (-1)$$

$$\mu m1V_{k,0} := k$$

Erwartungswert für das Spiel m Angreifer (die Laufvariable k nimmt alle Werte bis m an) gegen 1 Verteidiger. Nur in der Konstellation 1 vs 1 ist der Verteidiger im Vorteil.

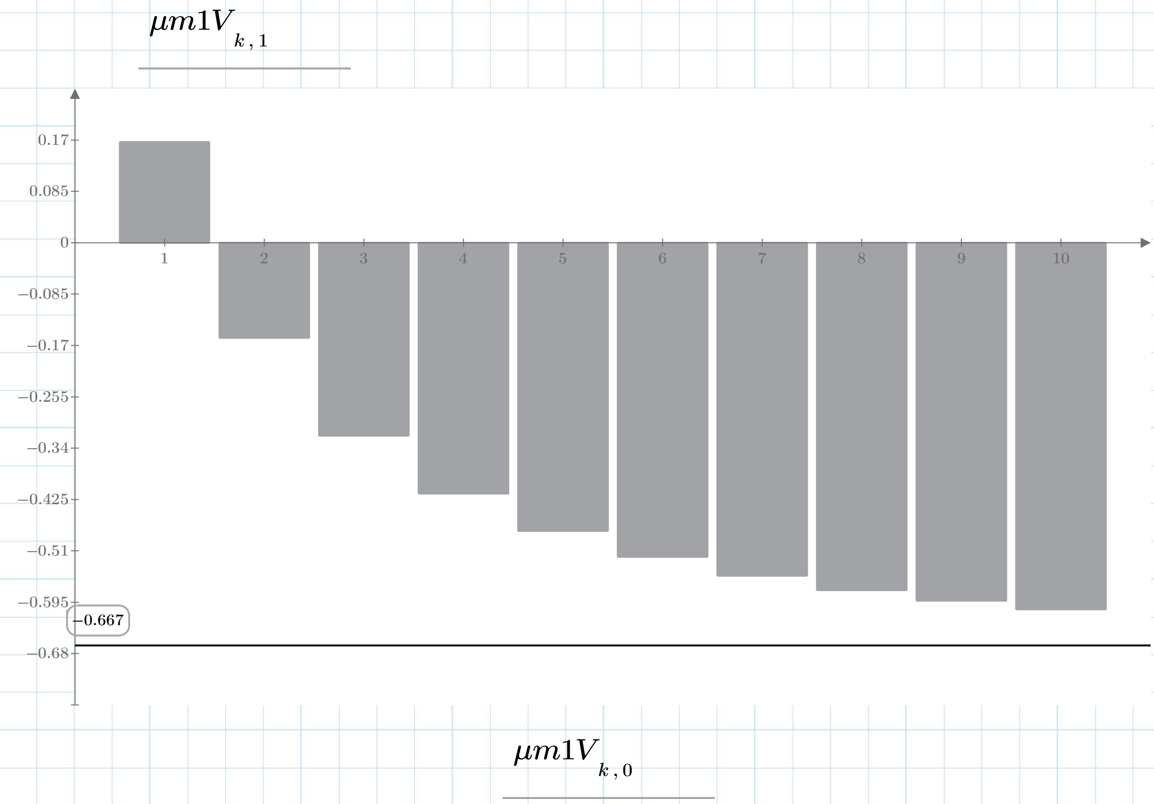
$$\mu m1V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.167 \\ 2 & -0.157 \\ 3 & -0.319 \\ 4 & -0.415 \\ 5 & -0.477 \\ 6 & -0.52 \\ 7 & -0.551 \\ 8 & -0.575 \\ 9 & -0.593 \\ 10 & -0.607 \end{bmatrix}$$

Die Tabelle sagt aus, dass der Verteidiger bei zB. 3 vs 1 ca. 0,319 Spielsteine pro Spiel (bei "sehr vielen" Spielen) im Durchschnitt verliert.

$$\mu m1VGrenz := \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot (-1) = -0.667$$

Betrachtet man die Erwartungswerte als Folge, so ergibt sich für m -> $\infty$ der Grenzwert $-\frac{2}{3}$.

Graphische Darstellung des Erwartungswertes in Abhängigkeit von der Anzahl der Angreifer



### 3.1 Erwartungswert für Spiel m Angreifen gegen n Verteidiger

Entsprechend den in 2.2 eingestellten Werten von m und n wird hier mithilfe der sich aus der Simulation ergebenden Werte der "Erwartungswert" berechnet.

$$\mu := \sum_{i=0}^{n} (2 \cdot i - n) \cdot E_{i,1} \qquad \mu = -0.158$$

Graphische Darstellung der statistischen Wahrscheinlichkeiten für das Spiel $m=3$ gegen $n=2$ und Erwartungswert