Kettenlinie

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Differentialgleichungen (1. und 2. Ordnung, direkt integrierbar, Substitution, Trennen der Variablen)
  Parabel, hyperbolische Funktionen;
  Kräftezerlegung;
  Linienschwerpunkt;

- Kurzzusammenfassung

  Differentialgleichung ausgehend von einem praktischen Beispiel aufstellen und lösen sowie die gefundene Lösung anwenden

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: [***optional***]

  Das Dokument kann in der 4.Klasse HTL im Mathematikunterricht oder auch fächerübergreifend mit Mechanik eingesetzt werden. Es können je nach angestrebter Tiefe auch Teile für den Unterricht verwendet werden.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  dem Lehrplan entsprechend für HTL Abteilungen (v.a. mit maschinenbaulichem Schwerpunkt);

- Mathcad-Version:

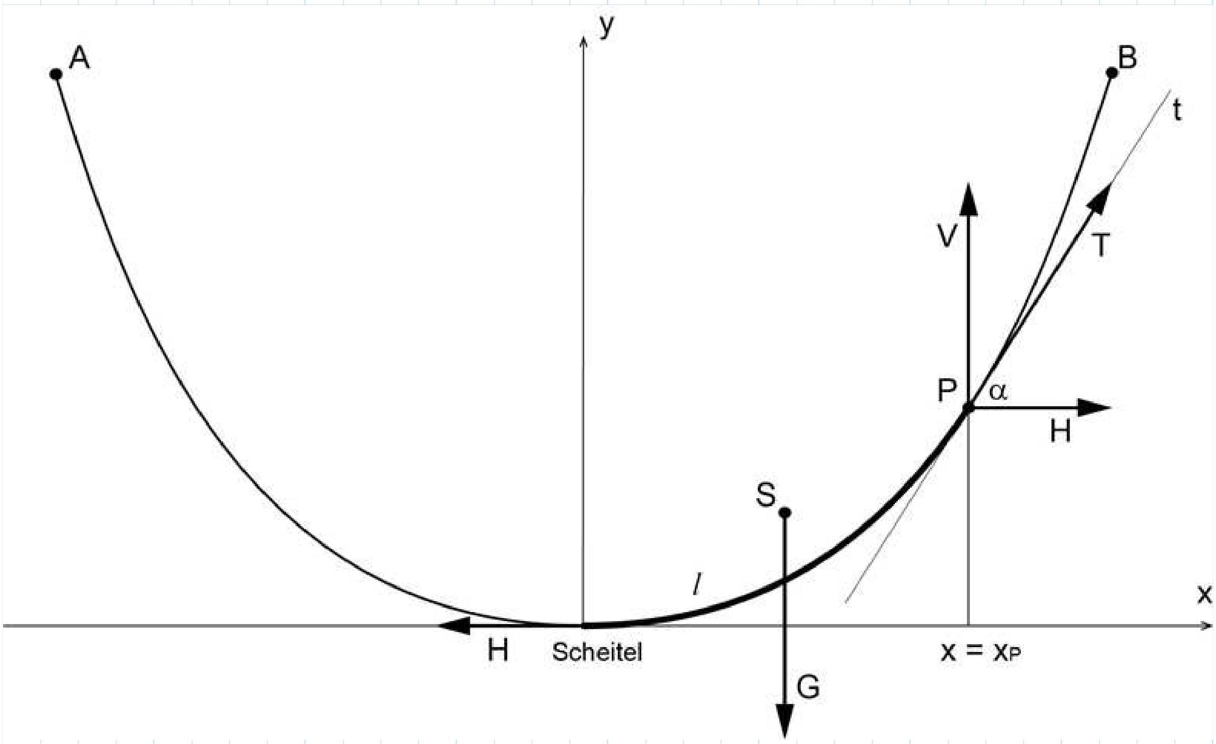
  Prime 3

Kettenlinie

1. Die Differentialgleichung der Kettenlinie

Die Kettenlinie beschreibt den Durchhang einer an beiden Enden (in den Punkten A und B) aufgehängten Kette (mit konstanter Masse pro Längeneinheit ρ) unter dem Einfluss der Schwerkraft (mit Erdbeschleunigung g).
In der Mechanik wird zwischen Seilen und Ketten meist nicht unterschieden. Für beide gilt die Kettenlinie unter der Voraussetzung, dass nur Zugkräfte (und keine Momente und Querkräfte) übertragen werden, die in jedem Punkt die Richtung der Tangente an die Kettenlinie haben und dass keine Dehnung auftritt ("biegeschlaff" und "dehnstarr").

Abbildung 1:



Die Differentialgleichung für die Kettenlinie ergibt sich aus folgender Kräftebetrachtung einer Kette: (Siehe Abbildung 1)

Auf ein Teilstück der Länge l (mit Gewichtskraft $G=\rho\cdot g\cdot l$) wirken jeweils tangential die Kräfte H und T.
Aus der Statik ergeben sich daher mit $\Sigma F=0$ die folgenden beiden Gleichungen:
(Anmerkung: Es muss auch $\Sigma M=0$ gelten, dies wird weiter unten nachgewiesen.)

$H=T\cdot cos(\alpha)$ $V=T\cdot sin(\alpha)=G=\rho\cdot g\cdot l$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man im Punkt P durch Einsetzen in $y'(x) = tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(a)}$ die Differentialgleichung 1:

$$y'(x) = \frac{G}{H} = \frac{\rho \cdot g \cdot l}{H}$$ .... Differentialgleichung 1

1.1 Die Parabel als Näherungslösung der Kettenlinie

s ist die Länge des Seils vom Scheitel bis zum Punkt P, bei geringem Durchhang kann daher näherungsweise angenommen werden, dass x = l gilt.
Daraus ergibt sich eine direkt integrierbare lineare Differentialgleichung 1. Ordung, deren Lösung eine Parabel ist.

$y'(x) = \frac{\rho \cdot g}{H} \cdot x$ mit der allgemeinen Lösung: $y(x) = \frac{\rho \cdot g}{2 \cdot H} \cdot x^2 + C$

mit y(0)=0 ergibt sich: $y(x) = \frac{\rho \cdot g}{2 \cdot H} \cdot x^2$

Diese Lösung gilt auch für das Seil einer Hängebrücke, bei der das Seil als masselos angenommen wird und die Brücke eine konstante Streckenlast aufweist.

1.2 Die exakte Lösung der Kettenlinie

Die exakte Lösung der Differentialgleichung ergibt sich durch nochmaliges Differenzieren von Gleichung 1 und Verwendung der Bogenlänge $dl = \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$.

$$y''(x) = \frac{\rho \cdot g}{H} \cdot \frac{dl}{dx} = \frac{\rho \cdot g}{H} \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$$ .... Differentialgleichung 2

Diese nichtlineare DGL 2.Ordnung kann mit der Substitution p(x) = y'(x) auf eine DGL 1.Ordnung zurückgeführt werden, die mit Trennen der Variablen lösbar ist.

$$\frac{dp}{dx} = p'(x) = \frac{\rho \cdot g}{H} \cdot \sqrt{1+p(x)^2}$$

mit

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,\mathrm{d}p \rightarrow \operatorname{asinh}(p)$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\rho \cdot g}{H} \cdot dx$$

$$asinh(p) = \frac{\rho \cdot g}{H} \cdot x + C$$

$$p(x) = sinh\left(\frac{\rho \cdot g}{H} \cdot x + C\right)$$

allgemeine Lösung für p = y'(x).
Da die Steigung im Scheitel waagrecht ist (y'(0) = p(0) = 0) ist auch C = 0.

Durch nochmalige Integration ergibt sich mit $\int \sinh\left(\frac{\rho \cdot g}{H} \cdot x\right)\mathrm{d}x \rightarrow \frac{H \cdot \cosh\left(\frac{g \cdot x \cdot \rho}{H}\right)}{g \cdot \rho}$

$$y(x) = \frac{H}{g \cdot \rho} \cdot cosh\left(\frac{g \cdot \rho}{H} \cdot x\right) + C$$

Der Scheitel befindet sich im Ursprung. Daher ist die Anfangsbedingung:
y(0) = 0 (mit cosh(0) = 1) ergibt $C = -\frac{H}{g \cdot \rho}$.

$$y(x) = \frac{H}{g \cdot \rho} \cdot \left(cosh\left(\frac{g \cdot \rho}{H} \cdot x\right) - 1\right)$$

1.3 Die Lösungen im Vergleich (mit einer numerischen Lösung)

Beispiel 1: Ein Seil aus Stahl ($d := 2\ mm$) wird unter dem Einfluss der Schwerkraft betrachtet. Es gelten die untenstehenden Werte für die Konstanten der Differentialgleichung.

$H := 1\ N$ $\quad g = 9.807\ \frac{m}{s^2}$ $\quad \rho := \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot 8\ \frac{kg}{L}$ $\quad \rho = 0.025\ \frac{kg}{m}$

Als Anfangsbedingungen werden die Eigenschaften im Scheitel verwendet.
(y(0) = 0, y'(0) = 0)

Exakte Lösung:

$$y_e(x) := \frac{H}{g \cdot \rho} \cdot \left(\cosh\left(\frac{g \cdot \rho}{H} \cdot x \right) - 1 \right)$$

$$x_e := -5\ m, -4.9\ m .. 5\ m$$

Näherungslösung 1 (Parabel)

$$y_p(x) := \frac{\rho \cdot g}{2 \cdot H} \cdot x^2$$

Näherungslösung 2 (Numerisch)

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$y''(x) = \frac{\rho \cdot g}{H} \cdot m \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

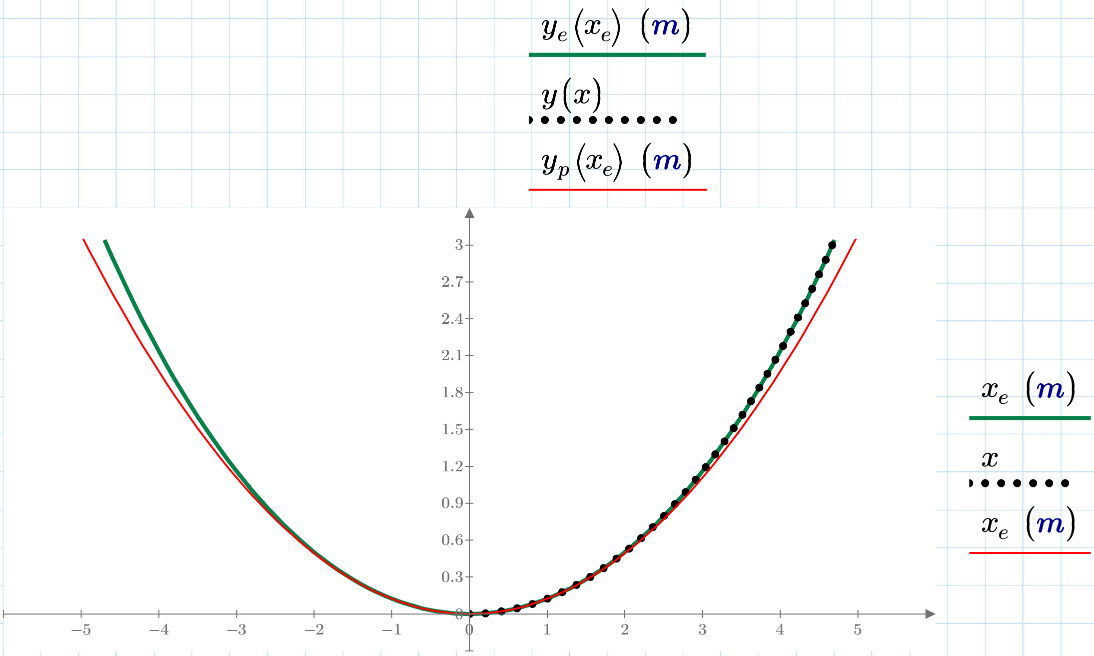
Gleichungslöser

$$y := \text{odesolve}(y(x), 5)$$

Anmerkung: Da für die Konstanten Einheiten verwendet werden, muss um Lösungsblock die Einheit Meter (m) eingefügt werden um eine Zahlengleichung zu erhalten.

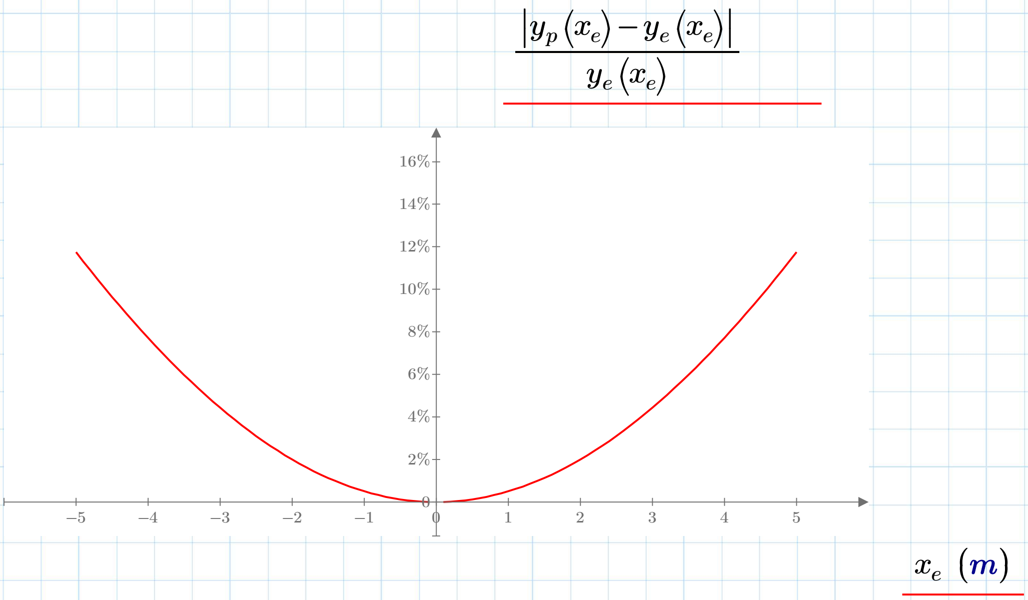
$$\frac{g \cdot \rho}{H} = 0.246\ \frac{1}{m}$$

Graphischer Vergleich der unterschiedlichen Lösungen



Die Kettenlinie wird im Diagramm im Bereich -5 m bis 5 m dargestellt (die numerische Lösung nur in einer Hälfte). Durch den großen Durchhang ist der Unterschied zur Parabel (rote Linie) auffällig. Die Kraft H bescheibt die (Zug)-Spannung im Seil. Wird H vergrößert, so verringert sich daher der Durchhang und der Unterschied zur Parabel wird geringer.

relativer Fehler der Parabel



1.4 Die Erhaltung der Momente für die exakte Lösung

Bei der Erstellung der Differentialgleichung wurde verwendet, dass die Summe der Kräfte auf ein Seilstück Null ergeben muss. Zusätzlich muss auch die Summe der Momente Null ergeben. Dies wird nun für die Lösung in Beispiel 1 numerisch nachgewiesen: (siehe Abbildung 1)

Die Masse und der Schwerpunkt des Seilstücks vom Scheitel (x = 0) bis zu einer beliebigen Stelle x_P müssen berechnet werden.

$x_P := 2\ m$ Wert gegebenenfalls verändern !!!

$$l := \int_{0\ m}^{x_P} \sqrt{1 + y_e'(x)^2}\ \mathrm{d}x \qquad l = 2.082\ m$$

Länge des Seilstücks

$$G := l \cdot \rho \cdot g \qquad G = 0.513\ N$$

Gewichtskraft des Seilstücks

$$Sx := \frac{\int_{0\ m}^{x_P} x \cdot \sqrt{1 + y_e'(x)^2}\ \mathrm{d}x}{l} \qquad Sx = 1.02\ m$$

Schwerpunkt des Seilstücks bei (Sx | Sy)

$$Sy := \frac{\int_{0\ m}^{x_P} y_e(x) \cdot \sqrt{1 + y_e'(x)^2}\ \mathrm{d}x}{l} \qquad Sy = 0.172\ m$$

Nachweis der Momente (um den Punkt P): (siehe Abbildung 1)
Das Moment durch die Gewichtskraft G muss gleich dem durch die Kraft H hervorgerufenen Moment sein.

$$y1(x) := y_e'(x) \rightarrow \sinh\left(\frac{8 \cdot \pi \cdot g \cdot x \cdot kg \cdot mm^2}{L \cdot N}\right)$$

Die erste Ableitung der Kettenlinie entspricht dem Tangens des Steigungswinkels.

$$M_G := G \cdot (x_P - Sx) = 0.5029985641\ N \cdot m$$

Moment durch G

$$M_H := \frac{G}{y1\left(x_P\right)} \cdot \left(y_e\left(x_P\right)\right) = 0.5029985641\ N \cdot m$$

Moment durch H

$\left(H = \frac{G}{\tan(\alpha)} = \frac{G}{y1\left(x_P\right)}\right)$

Da beide Momente gleich sind ist das Seilstück momentenfrei.
(Anmerkung: Die Differenz der beiden Momente gibt nicht exakt Null, sondern durch die Numerik bedingt ein sehr kleinen Wert, der hier als Null interpretiert werden kann.
$M_G - M_H = \left(1.11 \cdot 10^{-16}\right)\ N \cdot m$)

1.5 Die Erhaltung der Momente für die Parabel

Da die Parabel nur eine Näherungslösung darstellt, ist die Erhaltung der Momente nicht gegeben, wie in der nachfolgenden Rechnung numerisch gezeigt. (siehe Abbildung 1)

Die Masse und der Schwerpunkt des Seilstücks vom Scheitel (x = 0) bis zu einer beliebigen Stelle x_P müssen berechnet werden.

$x_P := 2\ m$ Wert gegebenenfalls verändern !!!

$$l := \int_{0\ m}^{x_P} \sqrt{1 + y_p'(x)^2}\, \mathrm{d}x \qquad l = 2.078\ m$$

Länge des Seilstücks

$G := l \cdot \rho \cdot g \qquad G = 0.512\ N$

Gewichtskraft des Seilstücks

$$Sx := \frac{\int_{0\ m}^{x_P} x \cdot \sqrt{1 + y_p'(x)^2}\, \mathrm{d}x}{l} \qquad Sx = 1.019\ m$$

Schwerpunkt des Seilstücks bei (Sx | Sy)

$$Sy := \frac{\int_{0\ m}^{x_P} y_p(x) \cdot \sqrt{1 + y_p'(x)^2}\, \mathrm{d}x}{l} \qquad Sy = 0.169\ m$$

Nachweis der Momente (um den Punkt P): (siehe Abbildung 1)
Das Moment durch die Gewichtskraft G muss gleich dem durch die Kraft H hervorgerufenen Moment sein.

$$y1(x) := y_p'(x) \rightarrow \frac{8 \cdot \pi \cdot g \cdot x \cdot kg \cdot mm^2}{L \cdot N}$$

Die erste Ableitung der Parabel entspricht dem Tangens des Steigungswinkels.

$$M_G := G \cdot (x_P - Sx) = 0.503\ N \cdot m$$

Moment durch G

$$M_H := \frac{G}{y1(x_P)} \cdot (y_p(x_P)) = 0.512\ N \cdot m$$

Moment durch H
$\left(H = \frac{G}{tan(\alpha)} = \frac{G}{y1(x_P)}\right)$

Die beiden Momente unterscheiden sich um so deutlicher, je größer x_P gewählt wird.
Die Differenz der beiden Momente steigt mit x_P. $(M_G - M_H = -0.01\ N \cdot m)$

1.6 Die Erhaltung der Momente für die numerische Lösung

Die numerische Lösung liefert nur einzelne Punkt der Lösung. MCD verbindet diese zu einer stetigen Lösung, wodurch die Anwendung der Analysis auf diese Lösung möglich ist.

Die Masse und der Schwerpunkt des Seilstücks vom Scheitel (x = 0) bis zu einer beliebigen Stelle x_P müssen berechnet werden.

$x_P := 3$ Wert gegebenenfalls verändern !!!

$$l := \int_0^{x_P} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx \qquad l = 3.281$$

Länge des Seilstücks

$$G := l \cdot m \cdot \rho \cdot g \qquad G = 0.809\ N$$

Gewichtskraft des Seilstücks

$$Sx := \frac{\int_0^{x_P} x \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x}{l}$$ $Sx = 1.565$

Schwerpunkt des Seilstücks bei (Sx | Sy)

$$Sy := \frac{\int_0^{x_P} y(x) \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x}{l}$$ $Sy = 0.407$

Nachweis der Momente (um den Punkt P): (siehe Abbildung 1)
Das Moment durch die Gewichtskraft G muss gleich dem durch die Kraft H hervorgerufenen Moment sein.

$y1(x) := y'(x)$

Die erste Ableitung der Parabel entspricht dem Tangens des Steigungswinkels.

$M_G := G \cdot (x_P - Sx) \cdot m = 1.1605671559\ N \cdot m$ Moment durch G

$M_H := \frac{G}{y1(x_P)} \cdot (y(x_P)) \cdot m = 1.1605694541\ N \cdot m$ Moment durch H
$\left(H = \frac{G}{tan(\alpha)} = \frac{G}{y1(x_P)}\right)$

Die beiden Momente unterscheiden sich relativ wenig, was für die Qualität des numerischen Verfahrens spricht. Die Differenz der beiden Momente ist klein aber deutlich größer als bei der exakten Lösung. ($M_G - M_H = -2.298 \cdot 10^{-6}\ N \cdot m$)

2. Anwendungen der Kettenlinie

2.1 Modellierung des Verlaufs einer Halskette

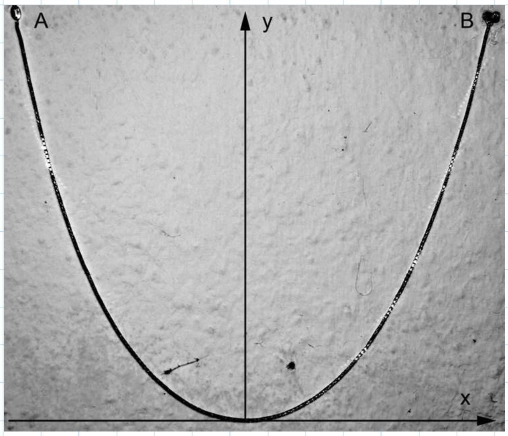


Abbildung 2

Der Scheitel einer Halskette liegt im Ursprung. Die Befestigungspunkte (in cm) sind A = (-9,5 | 16) und B = (9,5 | 16) (Siehe Abbildung 2)

Die exakte Lösung lautet mit $a = \frac{g \cdot \rho}{H}$:

$$y_e(x) = \frac{1}{a} \cdot (cosh(a \cdot x) - 1)$$

Einsetzen von B ergibt a (numerisch mit Lösungsblock):

Schätzwerte

$$a := 1$$

Nebenbedingungen

$$16 = \frac{1}{a} \cdot (cosh(a \cdot 9.5) - 1)$$

Gleichungslöser

$$a := \mathbf{find}(a)$$

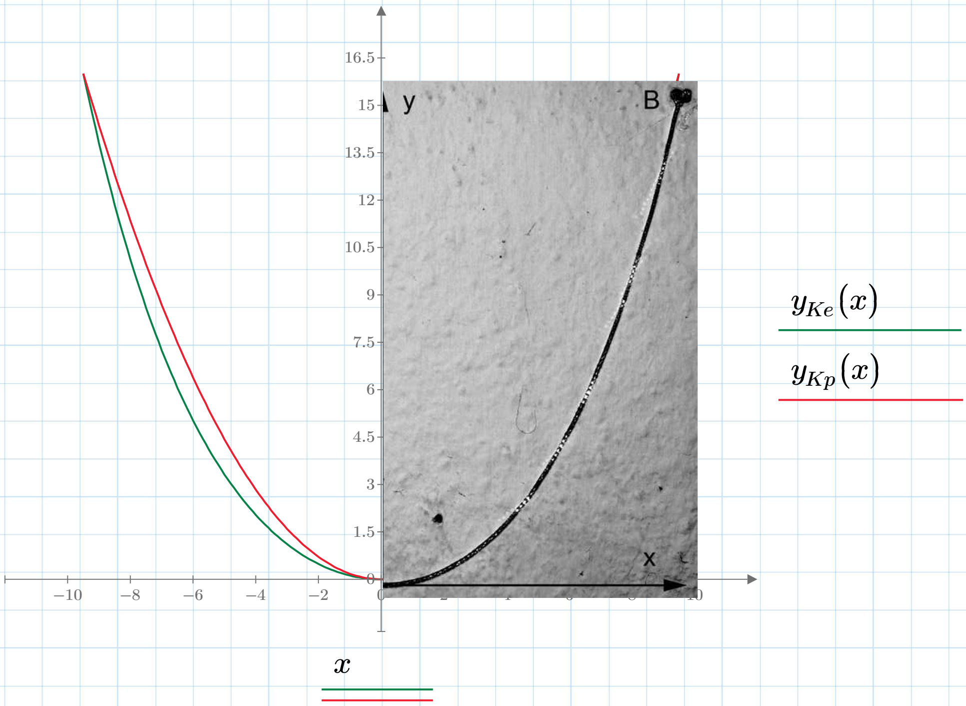
$$a = 0.236593$$

$y_{Ke}(x) := \dfrac{\cosh(a \cdot x) - 1}{a}$ $\qquad x := -9.5, -9.4 .. 9.5$

Die Näherungslösung (Parabel) lautet mit $b = \dfrac{\rho \cdot g}{2 \cdot H}$: $\qquad y_p(x) = b \cdot x^2$

$b := 16 = b \cdot 9.5^2 \xrightarrow{solve,\, b} 0.17728531855955678670$

$y_{Kp}(x) := b \cdot x^2$

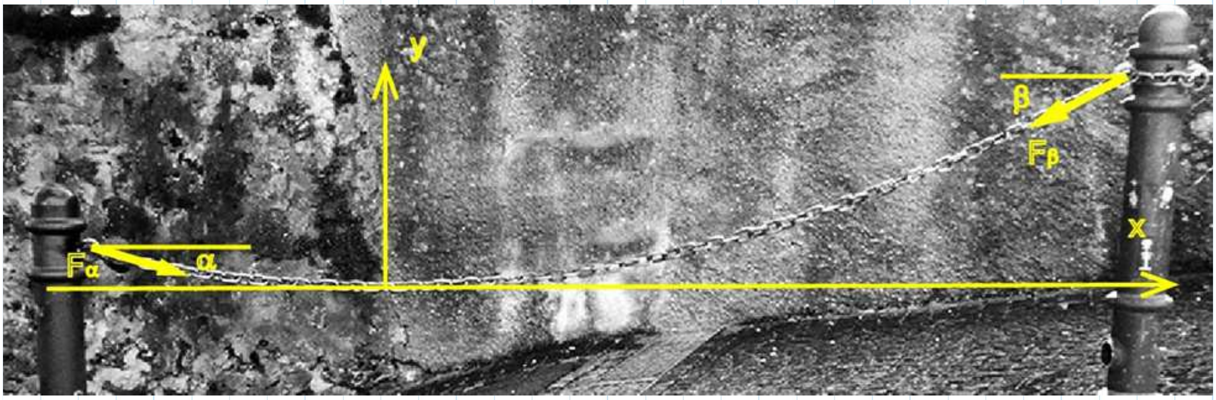


Durch Klicken auf das Diagramm wird das Bild transparent.
Die sehr gute Übereinstimmung des Kettenverlaufs kann auch auf einer Pinwand/ Tafel... sehr gut gezeigt werden.
zB mit einer Halskette im Vergleich zum tatsächlichen Verlauf (punktweise zeichnen oder als Ausdruck)

Die exakte Lösung folgt dem tatsächlichen Verlauf sehr gut, während die Parabel etwas zu "schmal" ist.

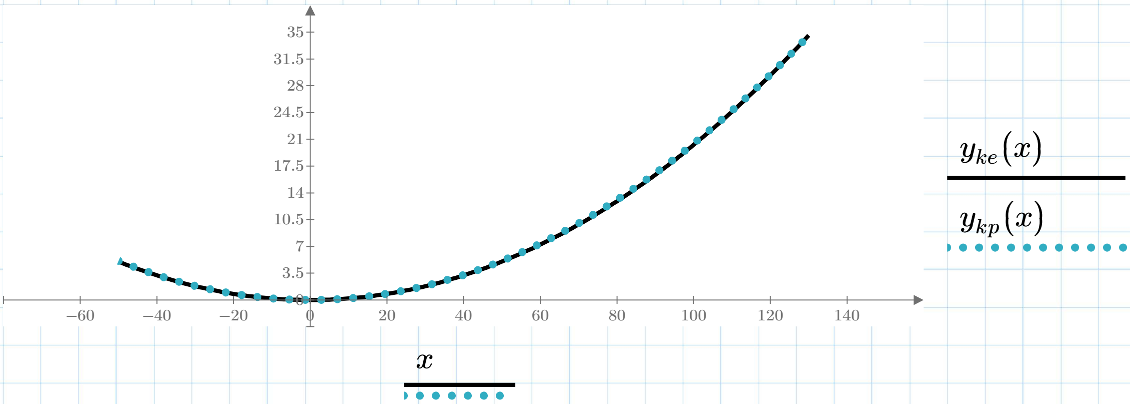
2.2 "flacher" Verlauf einer Kette/Seilkräfte

Abbildung 3



Der Verlauf der Kette ($\rho_k := 0.05$ kg/cm) kann exakt durch
$y_{ke}(x) := 250 \cdot (\cosh(0.004 \cdot x) - 1)$ mit $x := -50, -49 .. 130$ beschrieben werden.
(x, y ... Koordinaten in cm)
Die hier - durch den flachen Verlauf - gute näherungsweise Beschreibung durch eine Parabel lautet: $y_{kp}(x) := \dfrac{x^2}{489}$ (siehe nachfolgende Graphik)

Vergleich Kettenlinie - Parabel



Die Kräfte in den seitlichen Aufhängungspunkten A und B sind zu berechnen.

$$G := \rho_k \cdot 9.81 \cdot \int_{-50}^{130} \sqrt{1 + y_{ke}'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

$G = 91.367$ Gewichtskraft der Kette in Newton

Alternativ kann die Gewichtskraft auch aus der Konstante a berechnet werden.

$$a=\frac{g\cdot\rho}{H}=\frac{g\cdot\rho\cdot y'\left(x_p\right)}{G}$$ wegen (siehe Abbildung 1): $$H=\frac{G}{tan\left(\alpha\right)}=\frac{G}{y'\left(x_P\right)}$$

$$\frac{9.81\cdot\rho_k\cdot y_{ke}'(130)}{0.004}+\frac{9.81\cdot\rho_k\cdot\left|y_{ke}'(-50)\right|}{0.004}=91.367$$

Der Scheitel teilt die Kette in zwei Teile !!!!

$$\alpha:=\left|\operatorname{atan}\left(y_{ke}'(-50)\right)\right|=11.384\ °$$

$$\beta:=\operatorname{atan}\left(y_{ke}'(130)\right)=28.535\ °$$

Winkel an den Kettenenden zur Waagrechten (siehe Abbildung 3)

$$F_\alpha:=\frac{G}{\sin\left(\alpha+\beta\right)}=\frac{F_\alpha}{\cos\left(\alpha\right)}\xrightarrow{solve,F_\alpha \atop float,3}\frac{91.4\cdot\cos\left(11.4\cdot°\right)}{\sin\left(39.9\cdot°\right)}$$ $$F_\alpha=139.679$$

$$F_\beta:=\frac{G}{\sin\left(\alpha+\beta\right)}=\frac{F_\beta}{\cos\left(\beta\right)}\xrightarrow{solve,F_\beta \atop float,3}\frac{91.4\cdot\cos\left(28.5\cdot°\right)}{\sin\left(39.9\cdot°\right)}$$ $$F_\beta=125.222$$

Die Aufteilung einer Kraft in zwei Komponenten nach dem obigen Verfahren ist nur zulässig, wenn sich die Kräfte in einem Punkt schneiden.

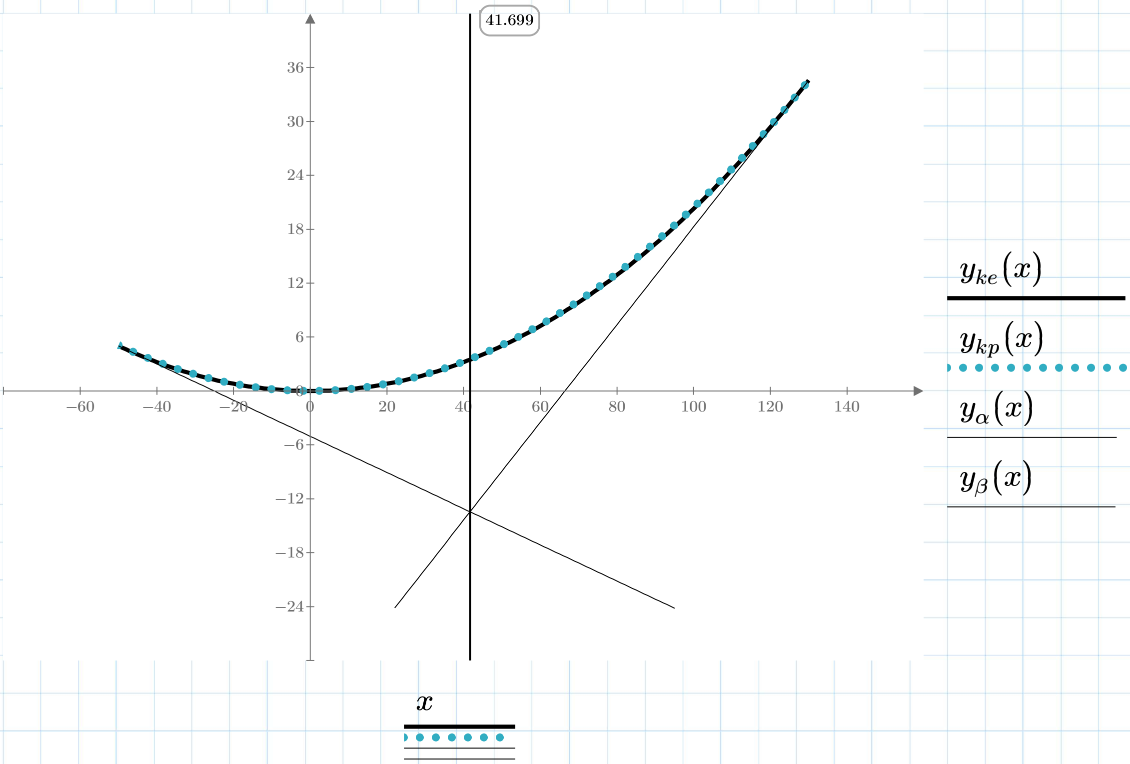
$$y_\alpha(x):=y_{ke}'(-50)\cdot(x+50)+y_{ke}(-50)$$ $$y_\alpha(xx)\xrightarrow{float,3}-0.201\cdot xx-5.05$$

$$y_\beta(x):=y_{ke}'(130)\cdot(x-130)+y_{ke}(130)$$ $$y_\beta(xx)\xrightarrow{float,3}0.544\cdot xx-36.1$$

$$y_\alpha\left(x_s\right)=y_\beta\left(x_s\right)\xrightarrow{solve,x_s}41.698780421013101749$$

$$S_x := \frac{\int_{-50}^{130} x \cdot \sqrt{1+y_{ke}'(x)^2}\,\mathrm{d}x}{\int_{-50}^{130} \sqrt{1+y_{ke}'(x)^2}\,\mathrm{d}x} = 41.699$$

Darstellung der Kraftlinien



Berechnung der Kräfte bei Verwendung der Parabel.

Die Kräfte in den seitlichen Aufhängungspunkten A und B sind zu berechnen.

$$G := \rho_k \cdot 9.81 \cdot \int_{-50}^{130} \sqrt{1+y_{kp}'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$G = 91.348$ Gewichtskraft der Kette in Newton

Alternativ kann die Gewichtskraft auch aus der Konstante a berechnet werden.

$$a = \frac{g \cdot \rho}{H} = \frac{g \cdot \rho \cdot y'(x_p)}{G}$$ wegen (siehe Abbildung 1): $$H = \frac{G}{tan(\alpha)} = \frac{G}{y'(x_P)}$$

$$\frac{9.81 \cdot \rho_k \cdot y_{kp}'(130)}{0.004} + \frac{9.81 \cdot \rho_k \cdot |y_{kp}'(-50)|}{0.004} = 90.276$$

Der Scheitel teilt die Kette in zwei Teile !!!!

$$\alpha := |\operatorname{atan}(y_{kp}'(-50))| = 11.558\ °$$

$$\beta := \operatorname{atan}(y_{kp}'(130)) = 27.999\ °$$

Winkel an den Kettenenden zur Waagrechten (siehe Abbildung 3)

$$F_\alpha := \frac{G}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{F_{\alpha p}}{\cos(\alpha)} \xrightarrow[]{solve, F_{\alpha p} \quad float, 3} \frac{91.3 \cdot \cos(11.6 \cdot °)}{\sin(39.6 \cdot °)}$$ $$F_\alpha = 140.307$$

$$F_\beta := \frac{G}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{F_{\beta p}}{\cos(\beta)} \xrightarrow[]{solve, F_{\beta p} \quad float, 3} \frac{91.3 \cdot \cos(28.0 \cdot °)}{\sin(39.6 \cdot °)}$$ $$F_\beta = 126.467$$

Die Aufteilung einer Kraft in zwei Komponenten nach dem obigen Verfahren ist nur zulässig, wenn sich die Kräfte in einem Punkt schneiden.

$$y_\alpha(x) := y_{kp}'(-50) \cdot (x+50) + y_{kp}(-50)$$ $$y_\alpha(xx) \xrightarrow{float, 3} -0.204 \cdot xx - 5.11$$

$$y_\beta(x) := y_{kp}'(130) \cdot (x-130) + y_{kp}(130)$$ $$y_\beta(xx) \xrightarrow{float, 3} 0.532 \cdot xx - 34.6$$

$$y_\alpha(x_s) = y_\beta(x_s) \xrightarrow{solve, x_s} 40$$

$$S_x := \frac{\displaystyle\int_{-50}^{130} x \cdot \sqrt{1 + y_{kp}'(x)^2}\, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-50}^{130} \sqrt{1 + y_{kp}'(x)^2}\, \mathrm{d}x} = 41.661$$

Darstellung der Kraftlinien