DI Dr. techn. Klaus LEEB
klaus.leeb@schule.at

"Strömungsmaschinen - Francis-Turbine: Auslegung und Darstellung der Geschwindigkeitsdreiecke"

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Darstellung von Geschwindigkeitsdreiecken mit "Vektoren":

- Kurzzusammenfassung

  Bestimmung der Laufradgeometire einer Francis-Turbine

  Anwendung der "Euler'schen Impulsmomentengleichung" oder der "Turbinenhauptgleichung"

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  1) Auslegung mit Hilfe von Diagrammen
  2) Euler'sche Impulsmomentengleichung
  3) Darstellung von Vektoren (Geschwindigkeitsdreiecke)
  4) Variieren der Auslegungsparameter und deren Auswirkugen auf die Laufradgeometrie

  Zeitaufwand: Ein gut vorbereiteter Schüler dürfte für diese Berechnung - ohne Formatierung und Kommentare - in etwa 1 1/2 h benötigen.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Strömungsmaschinen, Abteilung für Maschineningenieurwesen

- Mathcad-Version: **Mathcad 14**
- Literaturangaben:

  Willi Bohl "Strömungsmaschinen 2", Vogel-Buchreihe

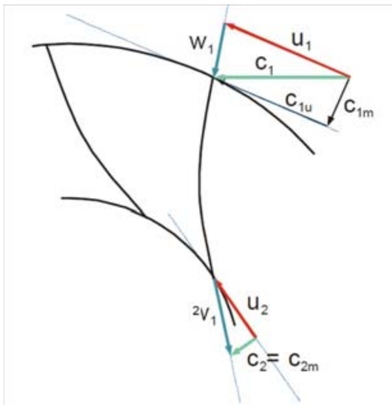
- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  ... als Aufgabenstellung für die Fachtheorie geeignet

Francis - Turbine: Auslegung

Aufgabenstellung: Es soll das Laufrad einer Francis-Turbine mit den untenstehenden Angaben entwickelt werden. Der Austritt soll **drallfrei** erfolgen.

Zur Veranschaulichung, was passiert, wenn man an den Auslegungsparametern dreht, wird am Ende der Berechnung eine Grafik mit den **Geschwindigkeitsdreiecken** am Ein- und Austritt des Laufrades für den Meridianschnitt dargestellt.
Durch **Verändern der Drehzahl, des Volumstromes und/oder der Fallhöhe** kann deren **Auswirkung auf die Winkel der Geschwindigkeitsdreiecke** studiert werden. Man sieht sehr schön, was man unter "drallfreier" Abströmung versteht.



Angabe:

Volumenstrom $V_{Punkt} := 4.5 \cdot \frac{m^3}{s}$

Fallhöhe $H_{Brutto} := 200 \cdot m$

Drahzahl der Turbine $n_{Turbine} := 500 \cdot \frac{1}{min}$

$Nm := N \cdot m$

$kJ := 10^3 \cdot J$

$\rho_{Wasser} := 1000 \cdot \frac{kg}{m^3}$

angenommener Bestwirkungsgrad im Auslegungspunkt $\eta_{Turbine} := 0.85$

$\omega := 2 \cdot \pi \cdot n_{Turbine}$

hydraulische Leistung $P_{Hydr} := \rho_{Wasser} \cdot g \cdot H_{Brutto} \cdot V_{Punkt}$ $P_{Hydr} = 8825.985 \cdot kW$

mechanische oder abgegebene Leistung: $P_{Turbine} := P_{Hydr} \cdot \eta_{Turbine}$ $P_{Turbine} = 7502.087 \cdot kW$

tatsächliche Fallhöhe (abzüglich der Leitungsverluste) $H_{Netto} := \frac{P_{Turbine}}{\rho_{Wasser} \cdot g \cdot V_{Punkt}}$ $H_{Netto} = 170\,m$

Die folgende Auslegung ist dem Lehrbuch **"Willi Bohl, Strömungsmaschinen 2"** entnommen.

Grundlagen: die spezifische Drehzahl

$$n_q := n_{Turbine} \cdot \frac{\sqrt{\dfrac{V_{Punkt}}{\dfrac{m^3}{s}}}}{\left(\dfrac{H_{Netto}}{m}\right)^{0.75}}$$

$$n_q = 22.529 \cdot \frac{1}{min}$$

Mit Hilfe der spezifischen Drahzahl kann laut untenstehen Auslegungsdiagrammen die Laufradkontur festgelegt werden.

Die Abmessungen des Laufrades

Bohl 2 S19 Bild 1.8 --> die Laufradkontur

$k_{u1a} := 0.7$

$$D_{1a} := \frac{84.6 \cdot k_{u1a} \cdot \sqrt{\dfrac{H_{Netto}}{m}}}{\dfrac{n_{Turbine}}{\dfrac{1}{min}}} \cdot m$$

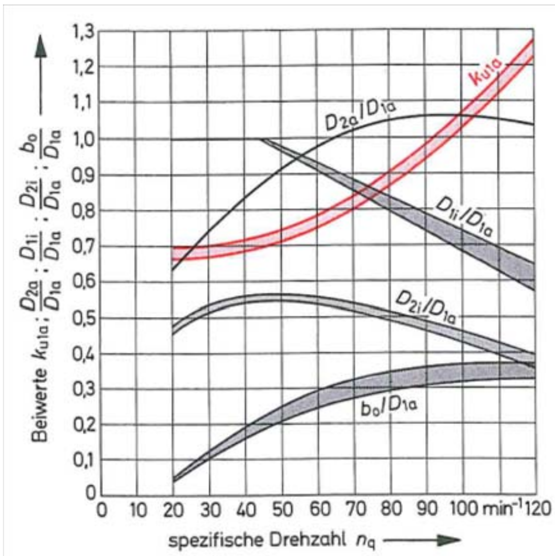


Bild 1.8 Auslegewerte für Francisturbinen

Der Außendurchmesser $D_{1a} = 1.544 \cdot m$

Bezeichnugn der anderen Werte siehe Bild 1.7

$D_{1i} := 1 \cdot D_{1a}$ $D_{1i} = 1.544 \cdot m$

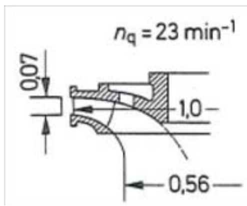
$b_0 := 0.06 \cdot D_{1a}$ $b_0 = 0.093 \cdot m$

$D_{2a} := 0.65 \cdot D_{1a}$ $D_{2a} = 1.004 \cdot m$

$D_{2i} := 0.48 \cdot D_{1a}$ $D_{2i} = 0.741 \cdot m$

aus Bild 1.9 abgemessen

$b_2 := \frac{3}{2} \cdot b_0$ $b_2 = 0.139 \cdot m$



Das Laufrad wird für die gegebene spez. Drehzahl ~23 U/min annähernd diese Kontur aufweisen.

Geschwindigkeitsdreiecke

Der mittlere Eintritts- und Austrittsdurchmesser an der Meridianstromlinie
(Diese teilt den Kanal in zwei volumenstromgleiche "Teilfluten")

$D_1 := \dfrac{D_{1a} + D_{1i}}{2}$ $\qquad D_2 := \dfrac{D_{2a} + D_{2i}}{2}$ $\qquad D_1 = 1.544 \cdot m$ $\qquad D_2 = 0.873 \cdot m$

Meridiangeschwindigkeit c_{m1} am Laufradeintritt:

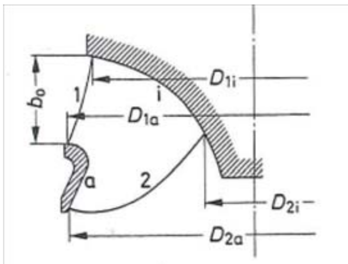


Bild 1.7 Hydraulisches Profil des Francisturbinenlaufrades

Eintrittsquerschnitt ist ein Zylindermantel

$A_1 := D_1 \cdot \pi \cdot b_0$ $\qquad A_1 = 0.45\,m^2$

$c_{m1} := \dfrac{V_{Punkt}}{A_1}$ $\qquad c_{m1} = 10.011 \dfrac{m}{s}$

Meridiangeschwindigkeit c_{m2} am Laufradaustritt:

Austrittsquerschnitt ist ein Kegelstumpfmantel

$s_{Kegel} := \sqrt{b_2^{\,2} + \left(\dfrac{D_{2a}}{2} - \dfrac{D_{2i}}{2}\right)^2}$ $\qquad s_{Kegel} = 0.191\,m$

$A_2 := \pi \cdot (D_{2a} + D_{2i}) \cdot s_{Kegel}$ $\qquad A_2 = 1.048\,m^2$

$c_{m2} := \dfrac{V_{Punkt}}{A_2}$ $\qquad c_{m2} = 4.294 \dfrac{m}{s}$

8.10 Gerader Kreiskegelstumpf

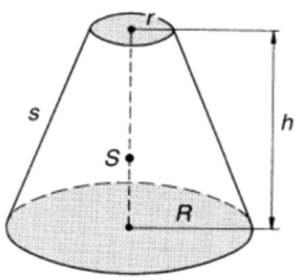
Die beiden kreisförmigen Schnittflächen mit den Radien r und R sind *parallel*.

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2)$$
$$M = \pi (R + r)\, s$$
$$O = \pi [R^2 + r^2 + (R + r) s]$$
$$s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

Schwerpunkt S:
Auf der Symmetrieachse im Abstand

$$\frac{h(R^2 + 2Rr + 3r^2)}{4(R^2 + Rr + r^2)}$$

von der Grundfläche (Radius R)



Euler'sche Impulsmomentengleichung oder Turbinenhauptgleichung:

$P_{Turbine} = a_u \cdot m_{Punkt}$ $\qquad$ $a_u = u_1 \cdot c_{u1} - u_2 \cdot c_{u2}$

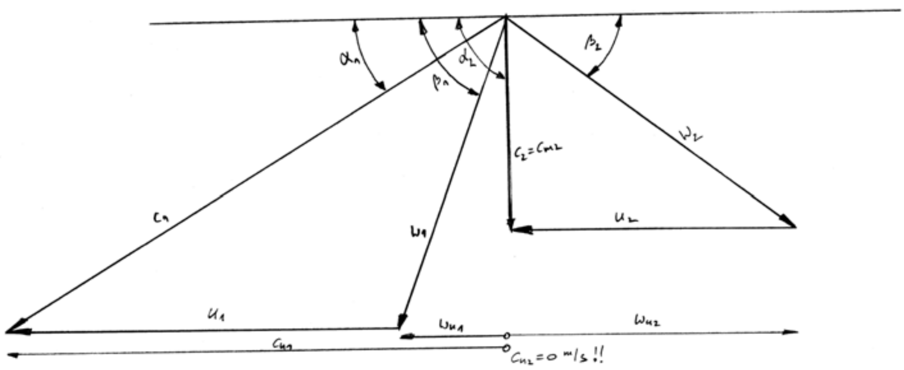
Die Umfangsarbeit $\qquad a_u := \dfrac{P_{Turbine}}{V_{Punkt} \cdot \rho_{Wasser}}$ $\qquad a_u = 1.667 \cdot \dfrac{kJ}{kg}$

Umfangsgeschwindigkeiten $\qquad u_1 := \dfrac{D_1}{2} \cdot \omega$ $\qquad u_1 = 40.429 \dfrac{m}{s}$

$u_2 := \dfrac{D_2}{2} \cdot \omega$ $\qquad u_2 = 22.842 \dfrac{m}{s}$

drallfreier Austritt ! $\qquad c_{u2} := 0 \cdot \dfrac{m}{s}$

$c_{u1} := \dfrac{a_u + u_2 \cdot c_{u2}}{u_1}$ $\qquad c_{u1} = 41.236 \dfrac{m}{s}$



Durch Anwendung der trigonometrischen Grundfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens lassen sich die Bestimmungsgrößen der Dreiecke berechnen.

Eintrittsdreieck

$\alpha_1 := \operatorname{atan}\left(\dfrac{c_{m1}}{c_{u1}}\right)$ $\qquad \alpha_1 = 13.645 \cdot °$

$c_1 := \dfrac{c_{m1}}{\sin(\alpha_1)}$ $\qquad c_1 = 42.434 \dfrac{m}{s}$

$w_{u1} := c_{u1} - u_1$ $\qquad w_{u1} = 0.807 \dfrac{m}{s}$

$\beta_1 := \operatorname{atan}\left(\dfrac{c_{m1}}{w_{u1}}\right)$ $\qquad \beta_1 = 85.389 \cdot °$

$$w_1 := \frac{c_{m1}}{\sin(\beta_1)}$$

$u_1 = 40.429\,\frac{m}{s}$ $w_{u1} = 0.807\,\frac{m}{s}$ $w_1 = 10.043\,\frac{m}{s}$

$c_{u1} = 41.236\,\frac{m}{s}$ $c_1 = 42.434\,\frac{m}{s}$ $\alpha_1 = 13.645 \cdot °$

Austrittsdreieck

$\alpha_2 := 90 \cdot °$ drallfreier Austritt = 90° $c_2 := c_{m2}$

$w_2 := \sqrt{u_2^{\,2} + c_{m2}^{\,2}}$ $w_2 = 23.242\,\frac{m}{s}$

$\tan(\beta_2) = \frac{c_{m2}}{u_2}$ $\beta_2 := \operatorname{atan}\left(\frac{c_{m2}}{u_2}\right)$

$w_{u2} := \frac{-c_{m2}}{\tan(\beta_2)}$ $w_{u2} = -22.842\,\frac{m}{s}$ $\beta_2 = 10.646 \cdot \mathrm{Grad}$

$c_{u2} := w_{u2} + u_2$ $c_{u2} = 0\,\frac{m}{s}$

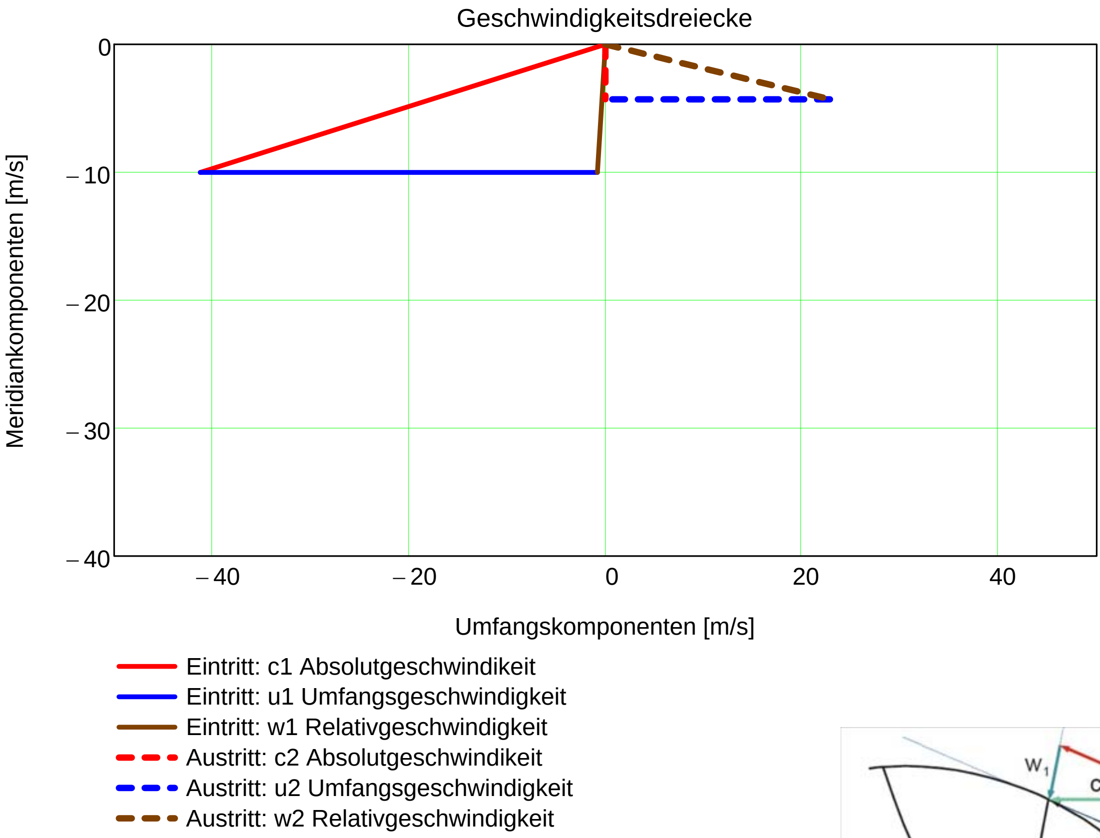
Darstellung der Geschwindigkeitsdreiecke (vektoriell dargestellt!)

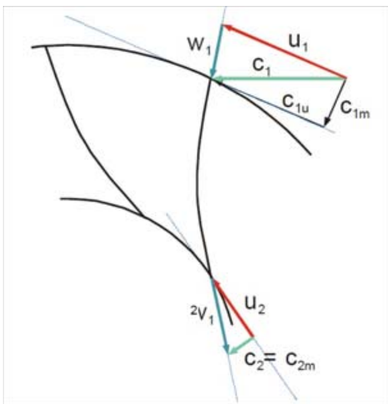
Eintrittsdreieck

$$c_{mc1} := \begin{pmatrix} 0 \\ c_{m1} \end{pmatrix} \qquad c_{11} := \begin{pmatrix} 0 \\ c_{u1} \end{pmatrix} \qquad w_{11} := \begin{pmatrix} 0 \\ w_{u1} \end{pmatrix} \qquad c_{mu1} := \begin{pmatrix} c_{m1} \\ c_{m1} \end{pmatrix} \qquad u_{11} := \begin{pmatrix} w_{u1} \\ w_{u1} + u_1 \end{pmatrix}$$

Austrittsdreieck

$$c_{mc2} := \begin{pmatrix} 0 \\ c_{m2} \end{pmatrix} \qquad c_{22} := \begin{pmatrix} 0 \\ c_{u2} \end{pmatrix} \qquad w_{22} := \begin{pmatrix} 0 \\ w_{u2} \end{pmatrix} \qquad c_{mu2} := \begin{pmatrix} c_{m2} \\ c_{m2} \end{pmatrix} \qquad u_{22} := \begin{pmatrix} w_{u2} \\ w_{u2} + u_2 \end{pmatrix}$$





Anleitung: Werte variieren und schauen, was im Diagramm passiert!

$V_{Punkt} \equiv 4.5 \cdot \frac{m^3}{s}$ $\qquad H_{Brutto} \equiv 200 \cdot m$ $\qquad n_{Turbine} \equiv 500 \cdot \frac{1}{min}$

$P_{Turbine} = 7502 \cdot kW$

Mit den Relativgeschwindigkeiten (bzw. deren Winkeln) kann das Laufrad im Meridianschnitt konstruiert werden.