Franz Hubert Kainz franz.kainz@htl-kapfenberg.ac.at

Statisch unbestimmtes System

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Grundlagen der Mechanik, Arbeitssatz (Castigliano, Menabrea), Integralrechnung

- Kurzzusammenfassung

Im Rahmen dieser Aufgabe sind das axiale Flächenmoment 2. Grades und daher auch das axiale Widerstandsmoment im Abschnitt I (B => C) als Funktionen der Länge "x" zu definieren.
Diese Funktionalität hat zur Folge, dass der Biegespannungsverlauf nicht linear ist, sondern entlang des geraden Balkenabschnittes I ein Maximum aufweist.
Die Lösung der "Statischen Unbestimmtheit" (1-fach - Einspannung und Loslager) erfolgt aufgrund der Theorien von Castigliano und Menabrea.
Die Verformungen (Durchbiegung und Biegewinkel an der Stelle C) werden nach den Arbeitssätzen von Castigliano ermittelt.
Die Balkenkrümmung im Abschnitt II (A => B) wird vernachlässigt

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Mechanik, Betriebslabor, Mathematik-Fachtheorie / 5. Jahrgang Maschinenbau

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

- Literaturangaben:

  Steger Bd. 3 (1, 2) - Teubner-Verlag

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Diese Aufgabe wurde bereits als ME-Übung (Berechnung, Messung mit DMS, Berechnung mit FEM) im Betriebslabor und im Rahmen der Mathematik-Fachtheorie - Klausurarbeit, behandelt.

Für den vorliegenden Balken (1-fach statisch unbestimmt) sind zu ermitteln :

- die axialen Flächenmomente 2. Grades in den Abschnitten I (B=>C) und II (A=>B)
- die axialen Widerstandsmomente in den Abschnitten I und II
- der Verlauf des axialen FM. 2.Gr. im Abschnitt I (Graphik)
- die Auflagerkraft F_B (F_{BH}) (Castigliano, Menabrea)
- die Biegespannungen an den Stellen 1 bis 4 (an den Stellen 1, 2 und 3 befinden sich am Modell DMS (Dehnmeßstreifen) - Vernachlässigung der Krümmung an den Stellen 2 und 3)
- die maximale Biegespannung im Abschnitt I
- der Biegespannungsverlauf im Abschnitt I entlang des Balkens (Graphik)
- der Biegespannungsverlauf im Abschnitt II entlang der Balkenkrümmung (Graphik)
- die Verformung in y-Richtung an der Stelle C (Castigliano)
- der Biegewinkel an der Stelle C

Farbencode :

Eingabe - Zahlenwerte Definitionen Formeln Ergebnisse

$° := \text{Grad}$

$F := 200 \cdot N$

$h_1 := 3 \cdot mm$

$h_2 := 20 \cdot mm$

$b := 15 \cdot mm$

$L := 200 \cdot mm$

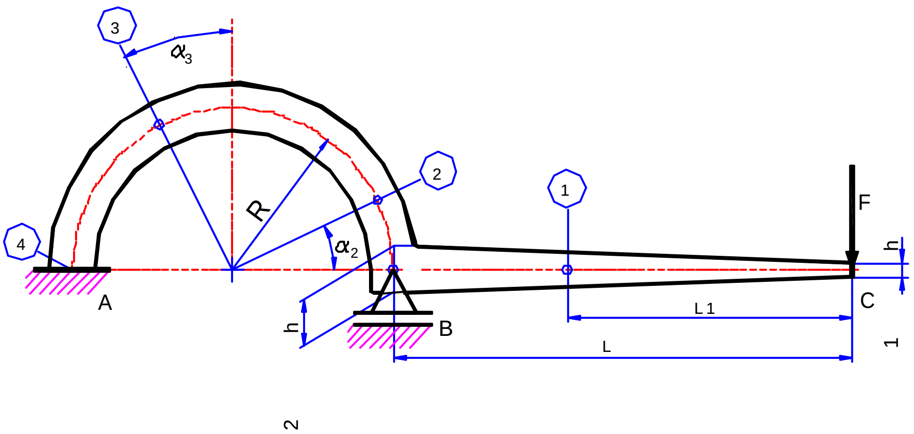
$L_1 := 124 \cdot mm$

$R := 70 \cdot mm$

$\alpha_2 := 25.4 \cdot °$

$\alpha_3 := 27.2 \cdot °$

$E := 2.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{N}{mm^2}$



Berechnungsdurchführung :

$ug := 0 \cdot mm \qquad sw := 1 \cdot mm \qquad og := L$

Laufvariable

$x := ug, sw .. og \qquad \alpha := 0, \frac{\pi}{100} .. \pi$

Abschnitt I (B => C) :

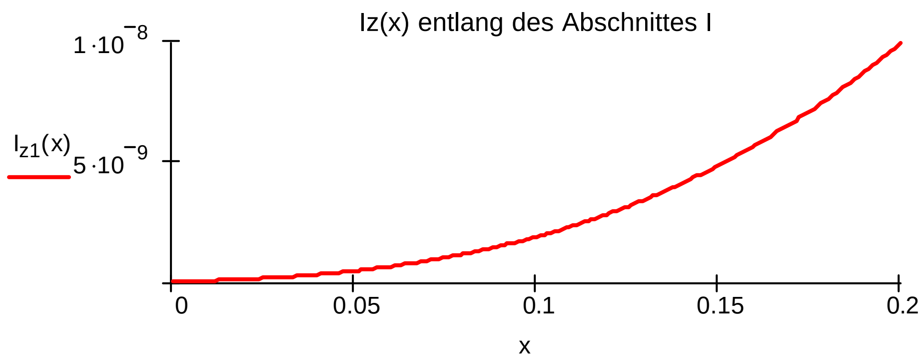
Axiales Flächenmoment 2. Grades :

$$I_{z1}(x) := \frac{b}{12} \cdot \left(h_1 + \frac{h_2 - h_1}{L} \cdot x\right)^3$$

Änderung der Balkenhöhe von h_1 auf h_2

$I_{z1}(L_1) = 3.103 \times 10^3\, mm^4$ Stelle 1

$I_{z1}(L) = 1 \times 10^4\, mm^4$ Stelle B



Axiales Widerstandsmoment :

$$W_{z1}(x) := \frac{b}{6} \cdot \left(h_1 + \frac{h_2 - h_1}{L} \cdot x\right)^2$$

$W_{z1}(L_1) = 458.329\, mm^3$ Stelle 1

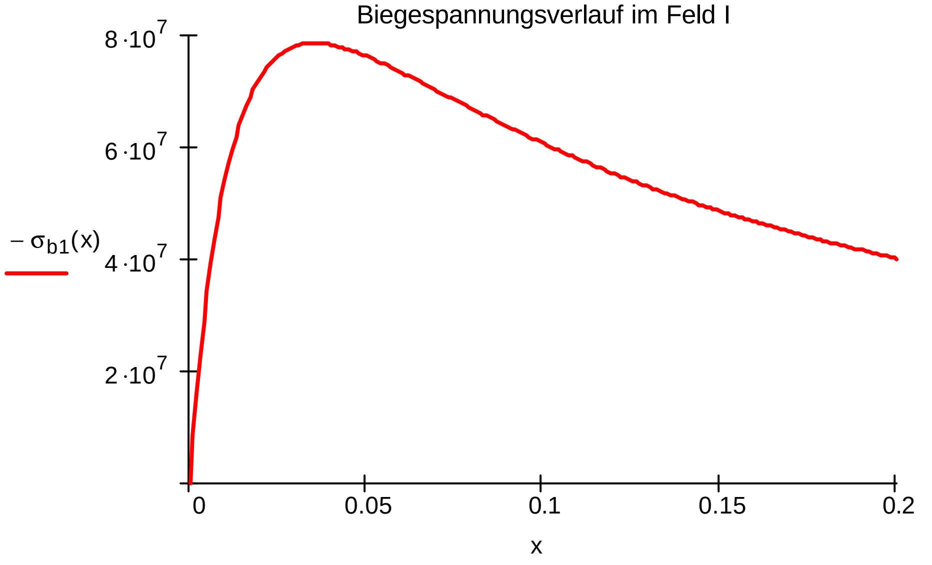
$W_{z1}(L) = 1 \times 10^3\, mm^3$ Stelle B

Biegespannung, Biegespannungsverlauf im Abschnitt I :

$\sigma_{b1}(x) := \dfrac{-F \cdot x}{W_{z1}(x)}$

$\sigma_{b1}(L) = -40 \dfrac{N}{mm^2}$ Stelle 1

$\sigma_{b1}(L_1) = -54.11 \dfrac{N}{mm^2}$ Stelle B



Maximale Biegespannung im Abschnitt I :

$x_{start} := 26 \cdot mm$

$null(x) := wurzel\left(\dfrac{d}{dx}\sigma_{b1}(x), x\right)$

$x_{max} := null(x_{start})$

$x_{max} = 35.294\,mm$

$\sigma_{b1}(x_{max}) = -78.431 \dfrac{N}{mm^2}$

Aufgrund der veränderlichen Steghöhe entlang des Balkens ist das axiale Widerstandsmoment nicht konstant und somit tritt das Maximum der Biegespannung auch nicht an der Stelle des maximalen Biegemomentes auf, sondern an der Stelle x_{max} = 35.3 mm von der Stelle C entfernt.

Berechnung der Auflagerkraft F_B (nach Castigliano und Menabrea) :

$$M_{bx} = \left[-F \cdot (L + R - R \cdot \cos(\alpha)) + F_B \cdot (R - R \cdot \cos(\alpha))\right]$$

Biegemomentenfunktion - nur Abschnitt II
- im Abschnitt I => Null

$$\overline{M_{bx}} = \frac{d}{dF_B} M_{bx}$$

Ableitung der Biegemomentenfunktion nach der gesuchten Auflagerkraft

$$\overline{M_{bx}} = \frac{d}{dF_B}\left[-F \cdot (L + R - R \cdot \cos(\alpha)) + F_B \cdot (R - R \cdot \cos(\alpha))\right]$$

$$\overline{M_{bx}} = R - R \cdot \cos(\alpha)$$

$$y_b = \frac{1}{E_S \cdot I_z} \cdot \int_0^{L_{ges}} M_{bx} \cdot \overline{M_{bx}} \, dx$$

Arbeitssatz von Castigliano

$$y_b = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int_0^{\pi} \left[-F \cdot (L + R - R \cdot \cos(\alpha)) + F_B \cdot (R - R \cdot \cos(\alpha))\right] \cdot (R - R \cdot \cos(\alpha)) \cdot R \, d\alpha$$

$$y_b = \frac{-1}{2} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \frac{(3 \cdot F \cdot R + 2 \cdot F \cdot L - 3 \cdot F_B \cdot R)}{(E \cdot I_z)}$$

y_b ist an der Stelle B gleich Null ; daher wird $y_b = 0$ .gesetzt und F_B ermittelt - nach Menabrea

$$F_B = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3 \cdot F \cdot R + 2 \cdot F \cdot L)}{R}$$

$$F_B := \frac{1}{3} \cdot \frac{(3 \cdot F \cdot R + 2 \cdot F \cdot L)}{R}$$

$$F_B = 580.952\,N$$

Berechnung der Hilfsauflagerkraft F_{BH} :

$$F_H := 1$$

$$F_{BH} := \frac{1}{3} \cdot \frac{(3 \cdot F_H \cdot R + 2 \cdot F_H \cdot L)}{R}$$

$$F_{BH} = 2.905$$

Biegespannungen im Abschnitt II :
(Balkenkrümmung an den Stelle 2 und 3 vernachlässigt)

$I_{z2} := I_{z1}(L)$ $\qquad I_{z2} = 1 \times 10^4\,mm^4$

$W_{z2} := W_{z1}(L)$ $\qquad W_{z2} = 1 \times 10^3\,mm^3$

$A_2 := R - R \cdot \cos(\alpha_2)$ $\qquad A_2 = 6.767\,mm$ Hilfsgröße

$M_{b2} := -F \cdot (L + A_2) + F_B \cdot A_2$

$\sigma_{b2} := \frac{M_{b2}}{W_{z2}}$ $\qquad \sigma_{b2} = -37.422\,\frac{N}{mm^2}$ Meßstelle 2

$A_3 := R - R \cdot \cos(\alpha_3 + 90 \cdot °)$ $\qquad A_3 = 101.997\,mm$ Hilfsgröße

$M_{b3} := -F \cdot (L + A_3) + F_B \cdot A_3$

$\sigma_{b3} := \frac{M_{b3}}{W_{z2}}$ $\qquad \sigma_{b3} = -1.144\,\frac{N}{mm^2}$ Meßstelle 3

$A_4 := R - R \cdot \cos(180 \cdot °)$ $\qquad A_4 = 140\,mm$ Hilfsgröße

$M_{b4} := -F \cdot (L + A_4) + F_B \cdot A_4$

$\sigma_{b4} := \frac{M_{b4}}{W_{z2}}$ $\qquad \sigma_{b4} = 13.333\,\frac{N}{mm^2}$ Einspannstelle

Biegespannungsverlauf im Abschnitt II :

$x := R, R - sw .. -R$ $\quad$ $x1 := 0 \cdot mm, 1 \cdot mm .. L$

$$S_{b1}(x1) := \frac{mm^3}{N} \cdot \sigma_{b1}(x1)$$

Hilfswerte für das Zeichnen des Balkens (blau) und des Biegemomentenverlaufes (rot)

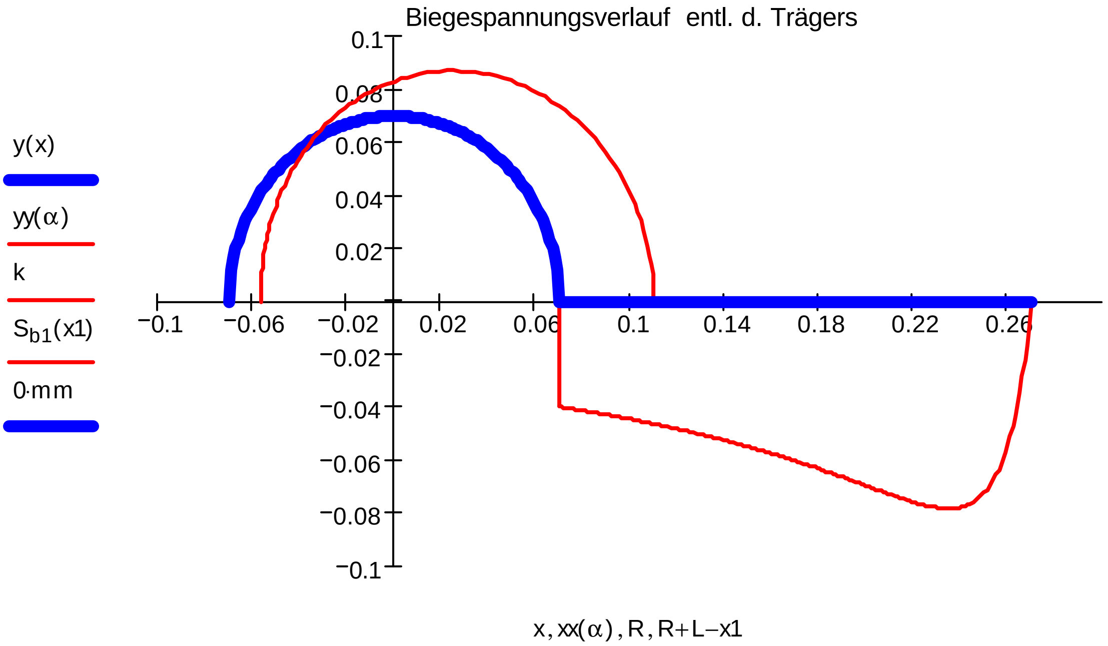
$k := 0 \cdot mm, -1 \cdot mm .. S_{b1}(L)$

$$y(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\sigma_b(\alpha) := \frac{1}{W_{z2}} \cdot \frac{mm^3}{N} \cdot \left[-F \cdot [L + R \cdot (1 - \cos(\alpha))] + F_B \cdot R \cdot (1 - \cos(\alpha))\right]$$

$$xx(\alpha) := \left(R - \sigma_b(\alpha)\right) \cdot \cos(\alpha)$$

$$yy(\alpha) := \sqrt{\left(R - \sigma_b(\alpha)\right)^2 - \left[\left(R - \sigma_b(\alpha)\right) \cdot \cos(\alpha)\right]^2}$$



Biegemomentenwechsel :

$$\alpha := \frac{\pi}{2}$$

$\alpha_o := \text{wurzel}\left(\sigma_b(\alpha), \alpha\right)$ $\quad$ $\alpha_o = 118.648°$

$$\sigma_b(\alpha_o) \cdot \frac{N}{mm^3} = -0.549 \frac{N}{mm^2}$$

Aufgrund der statischen Unbestimmtheit kommt es zu einem Wechsel des Biegemomentenverlaufes im Bereich der Meßstelle 3

Verformungen an der Stelle C :

Durchbiegung (nach Castigliano) :

$$A(\alpha) := L + R - R \cdot \cos(\alpha)$$ Hilfsfunktion

$$B(\alpha) := R - R \cdot \cos(\alpha)$$ Hilfsfunktion

$$I1 := \int_0^L \frac{F \cdot x^2}{I_{z1}(x)} \, dx$$ Hilfswert

$$I2 := \int_0^\pi \left(-F \cdot A(\alpha) + F_B \cdot B(\alpha)\right) \cdot \left(-A(\alpha) + F_{BH} \cdot B(\alpha)\right) \cdot R \, d\alpha$$ Hilfswert

$$y_C := \frac{1}{E} \cdot \left(I1 + \frac{I2}{I_{z2}}\right)$$

$$y_C = 1.13\,\mathrm{mm}$$ Durchbiegung an der Stelle C

Biegewinkel :

$$\beta_C := \frac{1}{E} \cdot \left(\int_0^L \frac{F \cdot x}{I_{z1}(x)} \, dx + \int_0^\pi \frac{-F \cdot A(\alpha) + F_B \cdot B(\alpha)}{I_{z2}} \cdot R \, d\alpha\right)$$ Biegewinkel nach Castigliano

$$\beta_C = 0.648\,°$$ Biegewinkel