

Franz Hubert Kainz

franz.kainz@htl-kapfenberg.ac.at

## Gestaltfestigkeit einer Welle



- **Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:**

**Grundlagen der Gegenstände Mechanik und Maschinenelemente, Kerbspannungstheorie, Ellipsengleichung, Lineare Interpolation**

- **Kurzzusammenfassung**

**Für die vorliegende Getriebewelle sind die Auflagerreaktionen (räumlicher Kraftangriff infolge der Schrägverzahnung des Zahnrades) zu bestimmen. Weiters sind die Wälzlager (Rillenkugellager) auszuwählen und auf Lebensdauer nachzurechnen, wobei eine Mindestlebensdauer von 10.000 Stunden gegeben sein soll.**

**Das Loslager "A" wird durch einen Seegerring gegen eine axiale Verschiebung gesichert, weshalb für diese Stelle "C" die Sicherheit gegen "Dauerbruch" unter Zugrundelegung des "Elliptischen Bruchgesetzes", zu ermitteln ist.**

- **Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):**

**Maschinenelemente, Konstruktionsübungen 3. Jahrgang Maschinenbau**

- **Mathcad-Version:**

**Mathcad 2001**

- **Literaturangaben:**

**Decker - Maschinenelemente, Hansa - Verlag**

**Adam - Festigkeitslehre und FEM-Anwendungen, Hüthig - Verlag**



Für die vorliegende Getriebewelle aus S 235 (St 360 , St 37) sind zu ermitteln :

- die Auflagerreaktionen  $F_A$  und  $F_B$
- das erforderliche Rillenkugellager für das Loslager (**A**)
- das erforderliche Rillenkugellager für das Festlager (**B**)  
(Mindestlebensdauer für die Lager : 10 000 h)
- das Biege- und Torsionsmoment an der Stelle **C** (Seeger-Ringnut -Lager A)
- die Spannungsausschläge
- die Kerbwirkungszahlen
- die Sicherheit gegen Dauerbruch ( $\sigma_b$  - wechselnd,  $\sigma_z$  und  $\tau_t$  - ruhend,  $S_{\text{erf}} = 2$ )
- die Dauerbruch-Ellipse (Graphik)

Farbencode :

**Eingabe - Zahlenwerte**

**Definitionen**

**Formeln**

**Ergebnisse**

$$kN := 1000 \cdot N$$

$$L_{hmin} := 10 \cdot 10^3 \cdot h$$

$$S_{erf} := 2$$

$$F_t := 1665 \cdot N$$

$$F_r := 635 \cdot N$$

$$F_a := 606 \cdot N$$

$$d := 42.6 \cdot mm$$

$$L_1 := 40 \cdot mm$$

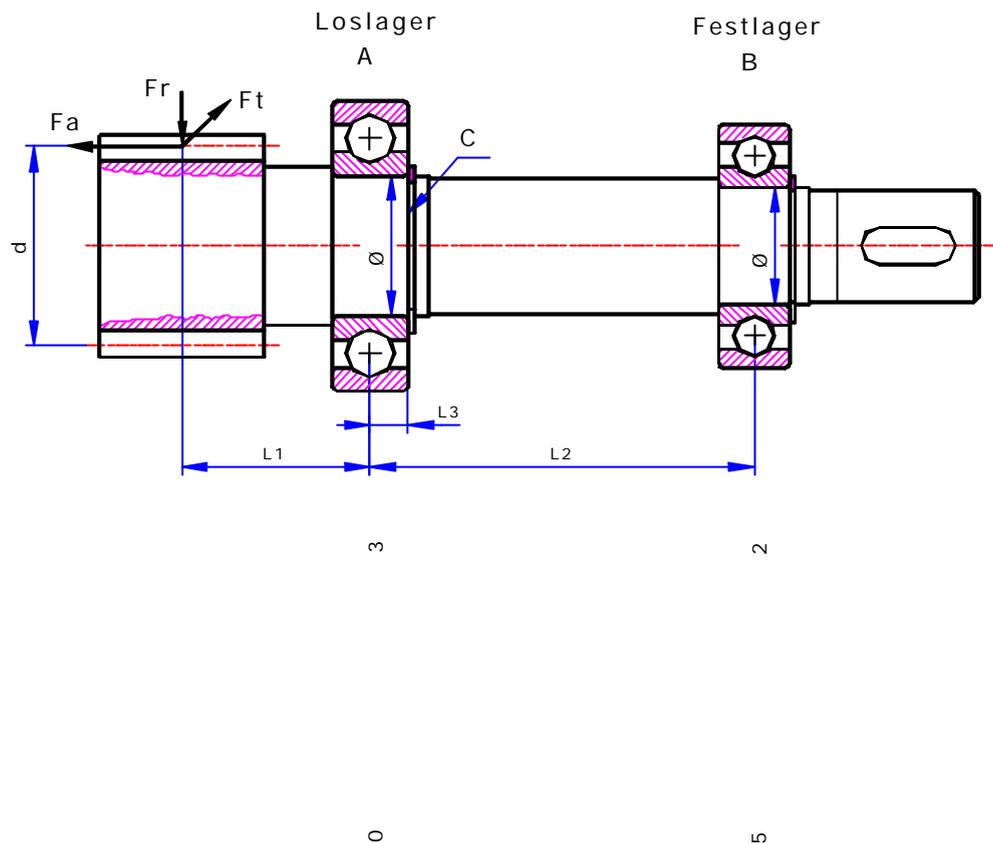
$$L_2 := 80 \cdot mm$$

$$n := 1500 \cdot min^{-1}$$

$$R_m := 340 \cdot \frac{N}{mm^2}$$

$$R_t = 10 \cdot \mu m$$

(Welle)



Berechnung der Auflagerreaktionen :

In der x-y Ebene gilt :

$$\sum_i M(A)_i = 0$$

$$F_r \cdot L_1 + F_a \cdot \frac{d}{2} - F_{B1} \cdot L_2 = 0$$

$$F_{B1} := \frac{\left( F_r \cdot L_1 + \frac{1}{2} \cdot F_a \cdot d \right)}{L_2}$$

$$F_{B1} = 0.479 \text{ kN}$$

$$\sum_i F_y = 0$$

$$-F_r - F_{B1} + F_{A1} = 0$$

$$F_{A1} := F_r + F_{B1}$$

$$F_{A1} = 1.114 \text{ kN}$$

In der x-z Ebene gilt :

$$\sum_i M(A)_i = 0$$

$$F_t \cdot L_1 - F_{B2} \cdot L_2 = 0$$

$$F_{B2} := F_t \cdot \frac{L_1}{L_2}$$

$$F_{B2} = 0.832 \text{ kN}$$

$$\sum_i F_y = 0$$

$$-F_t - F_{B2} + F_{A2} = 0$$

$$F_{A2} := F_t + F_{B2}$$

$$F_{A2} = 2.498 \text{ kN}$$

Resultierende Auflagerkräfte :

$$F_{Ar} := \sqrt{F_{A1}^2 + F_{A2}^2}$$

$$F_{Ar} = 2.735 \text{ kN}$$

$$F_{Br} := \sqrt{F_{B1}^2 + F_{B2}^2}$$

$$F_{Br} = 0.96 \text{ kN}$$

Auswahl und Berechnung der Wälzlager :

Loslager A :

$$P_A = X_A \cdot F_{Ar} + Y_A \cdot F_{Aa}$$

Äquivalente Lagerbelastung

$$F_{Aa} := 0 \cdot N$$

Loslager => kann keine Axialkraft aufnehmen

$$X_A := \text{wenn}(F_{Aa} = 0, 1, \text{"Fehler"})$$

$$X_A = 1$$

Radialfaktor

$$Y_A := \text{wenn}(F_{Aa} = 0, 0, \text{"Fehler"})$$

$$Y_A = 0$$

Axialfaktor

$$P_A := X_A \cdot F_{Ar} + Y_A \cdot F_{Aa}$$

$$P_A = 2.735 \text{ kN}$$

Lagerauswahl : **Rillenkugellager 6306 (Lagerkatalog)**

$$d_i = 30 \cdot \text{mm}$$

$$D = 72 \cdot \text{mm}$$

$$B_A := 19 \cdot \text{mm}$$

Lagerdaten

$$C_A := 29 \cdot \text{kN}$$

$$C_{A0} := 9.8 \cdot \text{kN}$$

Lebensdauer :

$$L_{hA} := \left( \frac{C_A}{P_A} \right)^3 \cdot \frac{10^6}{n}$$

$$L_{hA} = 1.325 \times 10^4 \text{ h}$$

$$L_{hmin} = 1 \times 10^4 \text{ h}$$

Festlager B : **Rillenkugellager 6205 (Lagerkatalog)**

$$P_B = X_B \cdot F_{Br} + Y_B \cdot F_{Ba}$$

$$F_{Ba} := F_a$$

Axialbelastung

$$d_i = 25 \cdot \text{mm}$$

$$D = 52 \cdot \text{mm}$$

$$B_B := 15 \cdot \text{mm}$$

Lagerdaten

$$C_B := 14.3 \cdot \text{kN}$$

$$C_{Bo} := 6.95 \cdot \text{kN}$$

Lineare Interpolation des Y-Faktors für Rillenkugellager :  
(normale Lagerluft - Faktoren aus FAG-Lagerkatalog)

$$x := \begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.04 \\ 0.07 \\ 0.13 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.24 \\ 0.27 \\ 0.31 \\ 0.37 \\ 0.44 \end{pmatrix} \quad y_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1.8 \\ 1.6 \\ 1.4 \\ 1.2 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

$$e := \text{linterp}\left(x, y, \frac{F_{Ba}}{C_{Bo}}\right)$$

$$e = 0.281$$

Hilfsfaktor

$$Y_B := \text{wenn}\left(\frac{F_{Ba}}{F_{Br}} > e, \text{linterp}(y, y_1, e), 0\right)$$

$$Y_B = 1.543$$

Axialfaktor

$$X_B := \text{wenn}[(Y_B \geq 1), 0.56, 1]$$

$$X_B = 0.56$$

Radialfaktor

$$P_B := X_B \cdot F_{Br} + Y_B \cdot F_{Ba}$$

$$P_B = 1.473 \text{ kN}$$

Lebensdauer :

$$L_{hB} := \left(\frac{C_B}{P_B}\right)^3 \cdot \frac{10^6}{n}$$

$$L_{hB} = 1.017 \times 10^4 \text{ h}$$

$$L_{hmin} = 1 \times 10^4 \text{ h}$$

Dauerbruchgefährdeter Querschnitt der Welle aus S 235 (St 360 , St 37) unmittelbar nach dem Loslager A (Seeger-Ringnut)

$\sigma_b$  - wechselnd,  $\sigma_z, \tau_t$  - ruhend

$$L_3 := \frac{B_A}{2}$$

$$L_3 = 9.5 \text{ mm}$$

Biege- und Torsionsmoment an dieser Stelle :

Biegemoment :

$$M_b := F_{Br} \cdot (L_2 - L_3)$$

$$M_b = 67.708 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Torsionsmoment :

$$T := F_t \cdot \frac{d}{2}$$

$$T = 35.465 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Daten der Seeger-Ringnut :  
(Tabelle)

$$d_n := 30 \cdot \text{mm}$$

$$d_2 := 28.6 \cdot \text{mm}$$

$$st := 1.5 \cdot \text{mm}$$

Widerstandsmomente :

$$W_z := \frac{\pi \cdot d_2^3}{32}$$

$$W_z = 2.297 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_t := \frac{\pi \cdot d_2^3}{16}$$

$$W_t = 4.593 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Querschnittsfläche :

$$A := \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4}$$

$$A = 642.424 \text{ mm}^2$$

Spannungen :

$$\sigma_b := \frac{M_b}{W_z}$$

$$\sigma_b = 29.481 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_t := \frac{T}{W_t}$$

$$\tau_t = 7.721 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_z := \frac{F_a}{A}$$

$$\sigma_z = 0.943 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Mittenspannungen :

$$\sigma_m := \sigma_z$$

$$\sigma_m = 0.943 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_m := 0 \cdot \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Spannungsausschläge :

$$\sigma_a := \sigma_m + \sigma_b$$

$$\sigma_a = 30.424 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_a := \tau_m + \tau_t$$

$$\tau_a = 7.721 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Formzahlen :

(Datenblätter)

Für eine Seeger-Ringnut gilt :

$$t_s := \frac{d_n - d_2}{2}$$

$$t_s = 0.7 \text{ mm}$$

$$\rho := 0.1 \cdot st$$

$$\alpha_{kb} := 1.14 + 1.08 \cdot \sqrt{10 \cdot \frac{t_s}{st}}$$

$$\alpha_{kb} = 3.473 \quad \text{Formzahl für Biegung}$$

$$\alpha_{kt} := 1.48 + 0.45 \cdot \sqrt{10 \cdot \frac{t_s}{st}}$$

$$\alpha_{kt} = 2.452 \quad \text{Formzahl für Torsion}$$

Zugfestigkeit

$$R_m := 340 \cdot \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Biegewechselfestigkeit  
(lt. Dauerfestigkeitsschaubild)

$$\sigma_w := 170 \cdot \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Torsionswechselfestigkeit (ruhend)  
(lt. Dauerfestigkeitsschaubild)

$$\tau_{tw} := 135 \cdot \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\rho_x := \left( \frac{140}{R_m \cdot \frac{\text{mm}^2}{N}} \right)^2$$

$$\rho_x = 0.17 \quad \text{Radius der fiktiven Ersatzkerbe}$$

Biegung eines Rundstabes (Tabellenwerte) :

 $R := \rho$ 

$$X_{0b} := \frac{2}{d_2} \cdot \text{mm}$$

$$X_{0b} = 0.07$$

$$X_b := \frac{2}{d_2} \cdot \text{mm} + \frac{2}{R} \cdot \text{mm}$$

$$X_b = 13.403$$

Torsion eines Rundstabes (Tabellenwerte) :

$$X_{0t} := \frac{2}{d_2} \cdot \text{mm}$$

$$X_{0t} = 0.07$$

$$X_t := \frac{2}{d_2} \cdot \text{mm} + \frac{1}{R} \cdot \text{mm}$$

$$X_t = 6.737$$

Dynamische Stützziffern :

$$n_{xb} := \frac{1 + \sqrt{\rho_x \cdot X_b}}{1 + \sqrt{\rho_x \cdot X_{0b}}}$$

$$n_{xb} = 2.261$$

(Biegung)

$$n_{xt} := \frac{1 + \sqrt{\rho_x \cdot X_t}}{1 + \sqrt{\rho_x \cdot X_{0t}}}$$

$$n_{xt} = 1.866$$

(Torsion)

Kerbwirkungszahlen :

$$\beta_{kb} := \frac{\alpha_{kb}}{n_{xb}}$$

$$\beta_{kb} = 1.536$$

$$\beta_{kt} := \frac{\alpha_{kt}}{n_{xt}}$$

$$\beta_{kt} = 1.314$$

Oberflächenbeiwert :

$$b_0 := 0.91$$

Größenbeiwert :

$$b_G := 0.9$$

Zulässige Spannungen

$$\sigma_A := \frac{\sigma_w \cdot b_0 \cdot b_G}{\beta_{kb}}$$

$$\sigma_A = 90.651 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_A := \frac{\tau_{tw} \cdot b_0 \cdot b_G}{\beta_{kt}}$$

$$\tau_A = 84.119 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Sicherheit gegen Dauerbruch :  
(Elliptisches Bruchgesetz)

$$S := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_A}\right)^2}}$$

$$S = 2.874$$

$$S_{\text{erf}} = 2$$

$$\sigma_A = 90.651 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_A = 84.119 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_A := 90 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_A := 84 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

(gerundete Werte)

$$\sigma_a = 30.424 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_a = 7.721 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_a := 31 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_a := 8 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

(gerundete Werte)

$$u_g := 0 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$s_w := 0.1 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{A'} := u_g, s_w \dots \sigma_A$$

Ellipsengleichung :

$$\tau_{A'}(\sigma_{A'}) := \sqrt{\tau_A^2 - \left(\frac{\tau_A}{\sigma_A}\right)^2 \cdot \sigma_{A'}^2}$$

Hilfswerte :

$$k := \frac{\tau_a}{\sigma_a}$$

$$k = 0.258$$

Steigung der Hilfsgeraden

$$x_1 := u_g, s_w \dots \sigma_a$$

$$y_1 := u_g, s_w \dots \tau_a$$

Gleichsetzen der Geraden- und der Ellipsengleichung liefert das Wertepaar  $\tau_{A'}$  /  $\sigma_{A'}$ .

$$k \cdot \sigma_{AA} = \sqrt{\tau_A^2 - \left(\frac{\tau_A}{\sigma_A}\right)^2 \cdot \sigma_{AA}^2}$$

$$\begin{pmatrix} -\tau_A \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{\tau_A^2 + k^2 \cdot \sigma_A^2}} \\ \tau_A \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{\tau_A^2 + k^2 \cdot \sigma_A^2}} \end{pmatrix}$$

=>

$$\sigma_{AA} := \tau_A \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{\tau_A^2 + k^2 \cdot \sigma_A^2}}$$

$$\sigma_{AA} = 86.745 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{A'}(\sigma_{AA}) = 22.386 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$x_2 := u_g, s_w \dots \sigma_{AA}$

$$kk(x_2) := k \cdot x_2$$

