Gebhard Fuchs, HTL Saalfelden

Laborübung: Bestimmung einer Ortskurve

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:
  Rechnen mit Komplexen Zahlen, Geradengleichung, Analytische Geometrie

- Kurzzusammenfassung
  **Im Fachgegenstand LABOR wurde den Schülern der 5. Elektrotechnik folgende Aufgabenstellung gegeben: Messen Sie die Charakteristischen Werte einer Asynchronmaschine und stellen Sie diese in einer Ortskurve dar.
  Für die Erstellung der Ortskurve müssen mindestens drei Punkte gemessen werden. Üblicherweise sind dies der Leerlaufpunkt, der Kurzschlusspunkt, und der Nennpunkt.**

  **(*Der Leerlaufpunkt ist jene Betriebsart, bei der der Motor nicht belastet wird. Es erfolgt somit keine Bremsung der Welle und damit kein Moment an der Welle.
  Der Kurzschlusspunkt wird erreicht, indem man die Welle des Motors im Stillstand hält und die Spannung so lange steigert bis der Nennstrom in den Motor fließt.
  Der Nennpunkt tritt bei Nennstrom und Nennspannung auf.*)**

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Diese Arbeit habe ich als Schüler des 5.Jahrganges Elektrotechnik fast zur Gänze selbständig durchgeführt.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):
  Laborübungen, 4./ 5.Jahrgang, Abteilung Elektrotechnik

- Literaturempfehlung:

  **Rolf Fischer: Elektrische Maschinen, HANSER Verlag, 11.Auflage.
  ISBN: 3-446-21810-6**

- Mathcad-Version:
  ab Version Mathcad 2001

Inhaltsübersicht:

Wichtiger Hinweis: Bei der Verarbeitung von Messwerten sollte die Anzahl der Dezimalstellen keine "sinnlose" Genauigkeit
vortäuschen, da die Messwerte mit Messfehlern behaftet sind.
Aus diesem Grund werden in diesem Mathcad File maximal 2 bis 3 Kommastellen dargestellt!

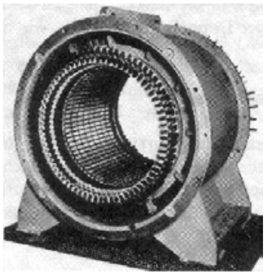
Asynchronmotor

Der Asynchronmotor ist heutzutage einer der am häufigsten verwendeten Motortypen.
Dieser Typ von Motor wird meist in Verbindung mit einem Freuquenzumrichter eingesetzt, durch diese Kombination werden die Vorteile der Asynchronmaschine (geringerer Preis und geringer Wartungsbedarf) mit der Elektronik des Frequenzumrichters und dessen stufenloser Steuerungsmöglichkeit mittels Variation der Frequenz ausgenützt.
Der Asynchronmotor kann somit in einem schier endlosen Bereich eingesetzt werden.
Als Beispiel sei erwähnt, Lastenaufzüge, Fertigungsstraßen...................
Die Namensgebung "Asynchron" kommt daher zustande, da der Läufer (also der rotierende Teil), mit dem Drehfeld des Ständers (äussere Teil) asynchron läuft. Das Ständerdrehfeld induziert somit bei angelegter Spannung am Ständer eine Spannung im Läufer die dem Drehfeld des Ständers nacheilt (asynchron).
Ein Maß für das Nacheilen des Läuferdrehfeldes ist der Schlupf. Der Schlupf ist des weiteren ein Maß für die Drehzahl des Motors. Wäre theoretisch der Schlupf gleich "0", so wären Läufer und Ständerdrehfeld synchron, es gäbe also keine Abweichung. Sollte ein Schlupf vorhanden sein, so gibt es eine Abweichung von dieser Synchrondrehzahl die mittels der folgenden Formeln definiert ist.

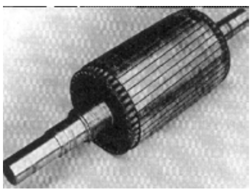
$$n_{synchron} = \frac{frequenz}{p} \qquad schlupf = \frac{n_{sychron} - n_{tatsächlich}}{n_{synchron}}$$

$$n_{tatsächlich} = n_{sychron}(1 - schlupf)$$

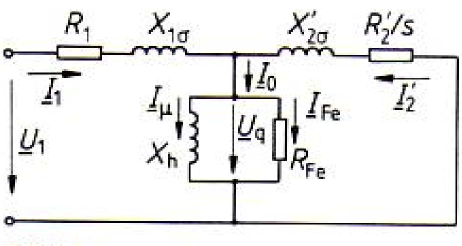
Durch diese Formeln ist ersichtlich, dass die Frequenz mit dem Schlupf und der Drehzahl in Zusammenhang stehen.



Ständer eines Asyncohronmoors (ASM)



Läufer eines ASM



Ersatzschaltbild eines ASM

Aus dem Ersatzschaltbild des ASM ist ersichtlich, dass der Läufer kurzgeschlossen ist.
Mithilfe des Verfahrens, dass in weiterer Folge in diesem File behandelt wird ist es möglich, mit drei Betriebsarten sämtliche Eisen, als auch Kupferverluste abzuschätzen und somit den Motor zu analysieren. Mit Hilfe dieser Ortskurve ist es ausserdem möglich einen gewünschten Bereich des ASM auszuwählen und die dafür notwendigen Betriebseigenschaften abzulesen.

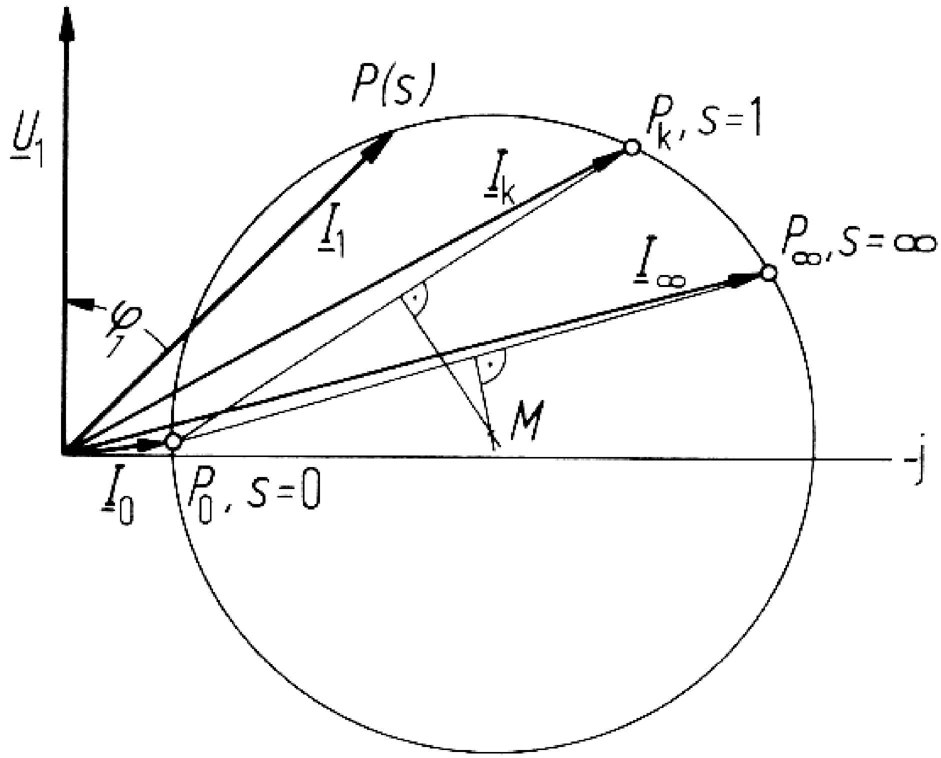
Der Heylandkreis: Eine spezielle Ortskurve in der Elektrotechnik

Ortskurven werden sowohl in der Mathematik, als auch in der Elektrotechnik sehr häufig eingesetzt.
Durch diese Ortskurven werden meist Systeme auf ihre Stabilität und ihr Verhalten untersucht.

Bei dieser Sonderanwendung (Umgang mit Elektrischen Aktoren wie beispielsweise der Asynchronmaschine) werden diese bekannten Techniken für den jeweils nötigen Verwendungszweck verändert.

Die Konstuktion der Ortskurve oder auch Kreisdiagramm genannt erfolgt aufgrund einiger bekannter Werte, als Beispiel seien die Ströme I_k, I_0, $I\infty$ genannt, die üblicherweise in Bezug auf die in der reellen Achse liegenden Spannung stehen .

Das folgende Diagramm ist dem Buch von Fischer (siehe oben) entnommen und zeigt die Bestimmung der Ortskurve des Ständerstromes aus den Punkten P_0 , P_k und $P\infty$.



Dieses Kreisdiagramm wurde um die vorige Jahrhundertwende von Heyland und Osanna entwickelt und trägt daher auch die Bezeichnung Heylandkreis.

Der Heylandkreis wird neben der Graphischen Überprüfung auch für die Graphische Bestimmung des Schlupfes, des Momentes und der Leistungsaufteilung von Blind- und Wirkleistung eingesetzt.
Diese Graphische Bestimmung wäre für dieses File jedoch zu aufwendig.
Etwaige Interessenten ist jenes Fachbuch zu empfehlen, das auf dieser Seite angeführt wird.

Aus diesem Grund entsprechen die Beschriftungen der X bzw. Y Achsen nicht dem gewohnten Standard jener Beschriftungen der üblichen Ortskurven, bei denen der Realteil auf der X-Achse und der Imaginärteil auf der Y-Achse liegen.

Leerlaufpunkt

Wie man aus der Kurzzusammenfassung entnehmen kann mussten wir für den Leerlaufpunkt die Spannung, den Strom und die Leistung messen.. Mit digitalen Wattmetern kann der Winkel ϕ ebenfalls gemessen werden. Der Wert, welcher von diesen Wattmetern gemessen wird ist meistens jedoch falsch!

Aus unserer Messung haben wir folgende Daten erhalten

Die Leerlaufspannung

$U_L := 220V$

Den Leerlaufstrom

$I_L := 9.86 \cdot A$

Die Leerlaufleistung

$P_L := 89W$

Aufgrund der Formel P = U * I * cos ϕ kann man den Winkel ϕ berechnen

$$\phi_L := \mathrm{acos}\left(\frac{P_L}{U_L \cdot I_L}\right)$$

$\phi_L = 87.65\,\mathrm{Grad}$

Kurzschlusspunkt

Die Besonderheit beim Kurzschlusspunkt ist, das die Welle des Motors gehalten wird. Es wird die Spannung des Motors bis zu jenem Wert erhöht, bei dem Nennstrom in die Maschine fließt.

Es wurden 6 Messungen aufgenommen, bei denen die Kurzschlussspannung , der Kurzschlussstrom (Nennstrom), und die Leistung der Stränge L1 und L2.

Die Kurzschlussspannung

$$U_{k\_n.SPG} := \begin{pmatrix} 49.4 \cdot V \\ 49.6 \cdot V \\ 50 \cdot V \\ 49.8 \cdot V \\ 48.5 \cdot V \\ 50 \cdot V \end{pmatrix}$$

Der Kurzschlussstrom = Nennstrom

$I_{k\_n.SPG} := 12A$

Die Kurzschlussleistung der Stränge L1 und L2

$$P_{Str\_L1} := \begin{pmatrix} 192 \cdot W \\ 197 \cdot W \\ 203 \cdot W \\ 195 \cdot W \\ 192 \cdot W \\ 204 \cdot W \end{pmatrix} \quad P_{Str\_L2} := \begin{pmatrix} 194 \cdot W \\ 195 \cdot W \\ 199 \cdot W \\ 200 \cdot W \\ 193 \cdot W \\ 201 \cdot W \end{pmatrix}$$

Die Berechnung des Winkels ϕ erfolgt mit der Formel P = U * I * cos ϕ
Durch die Aufnahme von 6 Messungen müssen die Werte gemittelt werden

$U_{k\_MW} := \text{mittelwert}(U_{k\_n.SPG})$ $\quad U_{k\_MW} = 49.55\,V$

$P_{Str\_L1} := \text{mittelwert}(P_{Str\_L1})$ $\quad P_{Str\_L1} = 197.17\,W$

$P_{Str\_L2} := \text{mittelwert}(P_{Str\_L2})$ $\quad P_{Str\_L2} = 197\,W$

Aus diesen Mittelwerten lässt sich der Winkel aus der obig genannten Formel berechnen

$$\phi_k := \text{acos}\left(\frac{P_{Str\_L1}}{I_{k\_n.SPG} \cdot U_{k\_MW}}\right) \qquad \phi_k = 70.63\,\text{Grad}$$

Die Spannung wurde bis zum Nennstrom erhöht, deshalb muss der Strom auf
die eigentliche Nennspannung aufgerechnet werden.

Aufrechnung auf 220Volt

$U_k := 220V$

$$I_k := \frac{U_k \cdot I_{k\_n.SPG}}{U_{k\_MW}} \qquad I_k = 53.28\,A$$

Der Winkel ϕ bleibt trotz der Spannungsaufrechnung gleich!

$P_k := U_k \cdot I_k \cdot \cos(\phi_k)$ $\quad P_k = 3.89\,kW$

Nennpunkt mit Generatorbelastung

Bei diesem Messaufbau wird der Motor bei Nennspannung, Nennstrom und Nenndrehzahl mit einem Generator belastet.
Aufgrund der Belastung entstanden geringfügige Abweichungen der Nenndaten

Die Spannung
$U_N := 229V$

Der Strom
$I_N := 12.1A$

Die Leistung
$P_N := 1.6kW$

Wir berechnen erneut den Winkel ϕ bei Generatorbelastung des Asynchronmotors

$$\phi_N := \text{acos}\left(\frac{P_N}{U_N \cdot I_N}\right) \qquad \phi_N = 54.73\,\text{Grad}$$

Ortskurve

Für die Ortskurve ist die Trennung des Imaginär- und des Realteiles notwendig - diese werden auf den Achsen aufgetragen.

Definition des Stromes im Karthesischen Koordinatensystem der komplexen Zahlenebene:

$I_N := I_N \cdot e^{j \cdot \phi_N}$ $I_k := I_k \cdot e^{j \cdot \phi_k}$ $I_L := I_L \cdot e^{j \cdot \phi_L}$

Ein Kreis kann durch drei Punkte definiert werden. Es ist somit möglich mittels der drei zuvor gemessenen Punkte die Lage des Mittelpunktes und den Radius zu errechnen. Hierfür müssen die Punkte mit einer Geraden verbunden werden.

Der Mittelpunkt entsteht durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf die Geraden der Punkte (**Sehnen des Kreises!) .**

Berechnung des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten zur Geraden

$$MP_{Nk} := \frac{I_k + I_N}{2}$$

$$MP_{Lk} := \frac{I_k + I_L}{2}$$

Erläuterung : I_k und I_N werden als VEKTOREN in der komplexen Zahleneben angesehen. Es sind daher Ortsvektoren.
Der Mittelpunkt der Strecke AB errechnet sich allgemein nach der Formel $m = \frac{a+b}{2}$, wenn a bzw. b die Ortsvektoren zu A bzw. B sind.

Um diese im Koordinatensystem darstellen zu können muss eine Trennung von Imaginärteil und Realteil erfolgen

$\mathrm{Re}(MP_{Nk}) = 12.327\,A$ $\mathrm{Re}(MP_{Lk}) = 9.036\,A$

$\mathrm{Im}(MP_{Nk}) = 30.072\,A$ $\mathrm{Im}(MP_{Lk}) = 30.058\,A$

Gerade zwischen den Punkten

Die Geradengleichung lautet y = k*x +d
k entspricht der Steigung und errechnet sich deshalb aus der Differenz der beiden y -Koordinaten durch die Differenz der x -Koordinaten.

$$k_{Nk} := \left(\frac{\mathrm{Re}(I_k) - \mathrm{Re}(I_N)}{\mathrm{Im}(I_k) - \mathrm{Im}(I_N)}\right) \qquad k_{Lk} := \left(\frac{\mathrm{Re}(I_k) - \mathrm{Re}(I_L)}{\mathrm{Im}(I_k) - \mathrm{Im}(I_L)}\right)$$

$k_{Nk} = 0.264$ $k_{Lk} = 0.427$

d entspricht der Koordinatenlage auf der imaginären Achse , also dem **Offset** wie es in der Elektronik auch bezeichnet wird.

$d_{Nk} := \mathrm{Re}(I_N) - \mathrm{Im}(I_N) \cdot k_{Nk}$ $d_{Lk} := \mathrm{Re}(I_L) - \mathrm{Im}(I_L) \cdot k_{Lk}$

$d_{Nk} = 4.374\,A$ $d_{Lk} = -3.804\,A$

Definition der Geradengleichung

$y(x, k, d) := k \cdot x + d$

Normale auf die Gerade

Die Normalen auf die Geraden haben folgende Steigung:

$k_L := -\frac{1}{k_{Lk}}$ $k_N := -\frac{1}{k_{Nk}}$

$k_L = -2.341$ $k_N = -3.781$

Berechnung der Koordinatenlage der Normalen

$\mathrm{Re}(MP_{Nk}) = k_N \cdot \mathrm{Im}(MP_{Nk}) + d_{nN}$ $d_{nN} := \mathrm{Re}(MP_{Nk}) - k_N \cdot \mathrm{Im}(MP_{Nk})$

$d_{nN} = 126.04\,A$

$\mathrm{Re}(MP_{Lk}) = k_L \cdot \mathrm{Im}(MP_{Lk}) + d_{nL}$ $d_{nL} := \mathrm{Re}(MP_{Lk}) - k_L \cdot \mathrm{Im}(MP_{Lk})$

$d_{nL} = 79.405\,A$

Schnittpunkt

Der Schnittpunkt der beiden Normalen ist der Mittelpunkt des Kreises

$Pos_x := 30 \cdot A$

Vorgabe

$k_N \cdot Pos_x + d_{nN} = k_L \cdot Pos_x + d_{nL}$

$Pos_x := \mathrm{Suchen}(Pos_x)$

$Pos_x = 32.379\,A$

Nachdem man den Punkt Pos_x kennt kann man mittels der Geradengleichung den Punkt Pos_y berechnen.

$Pos_y := k_L \cdot Pos_x + d_{nL}$

$Pos_y = 3.603\,A$

Radius

Durch die drei Punkte können die Mittelpunktskoordinaten Pos ausgerechnet werden.
Nachdem der Mittelpunkt bekannt ist, ist für die Berechnung des Radius somit nur noch ein Punkt erforderlich in diesem Falle wurde der Strom Ik zufällig ausgewählt.

Die Ankathete vom Ursprung aus gesehen zum Punkt Pk entspricht

$\mathrm{Ankathete} := \mathrm{Im}(I_k) - Pos_x$

$\mathrm{Ankathete} = 17.886\,A$

Die Gegenkathete ist deshalb die selbe Funktion, jedoch mit den y Koordinaten

$\mathrm{Gegenkathete} := \mathrm{Re}(I_k) - Pos_y$

$\mathrm{Gegenkathete} = 14.065\,A$

Der resultierende Winkel vom Mittelpunkt des Kreises zum Punkt Pk ist demnach

$\mathrm{Winkel} := \mathrm{atan}\left(\frac{\mathrm{Gegenkathete}}{\mathrm{Ankathete}}\right)$ $\tan = \frac{\mathrm{Gegenkathete}}{\mathrm{Ankathete}}$

$\mathrm{Winkel} = 0.666$

Nachdem der Winkel bekannt ist kann der radius nach dem selben Prinzip der Winkelfunktionen errechnet werden

$r := 22 \cdot A$

Vorgabe

$$\cos(\text{Winkel}) = \left(\frac{\text{Ankathete}}{r}\right)$$

$r := \text{Suchen}(r)$

$r = 22.753\,A$

Graphische Darstellung

Um den Kreis zeichnen zu können ist ϕ erforderlich. Der Wert von ϕ soll von 0 bis 2π gehen und dabei 500 Punkte zeichnen, dies gewährleistet einen schönen Kurvenverlauf

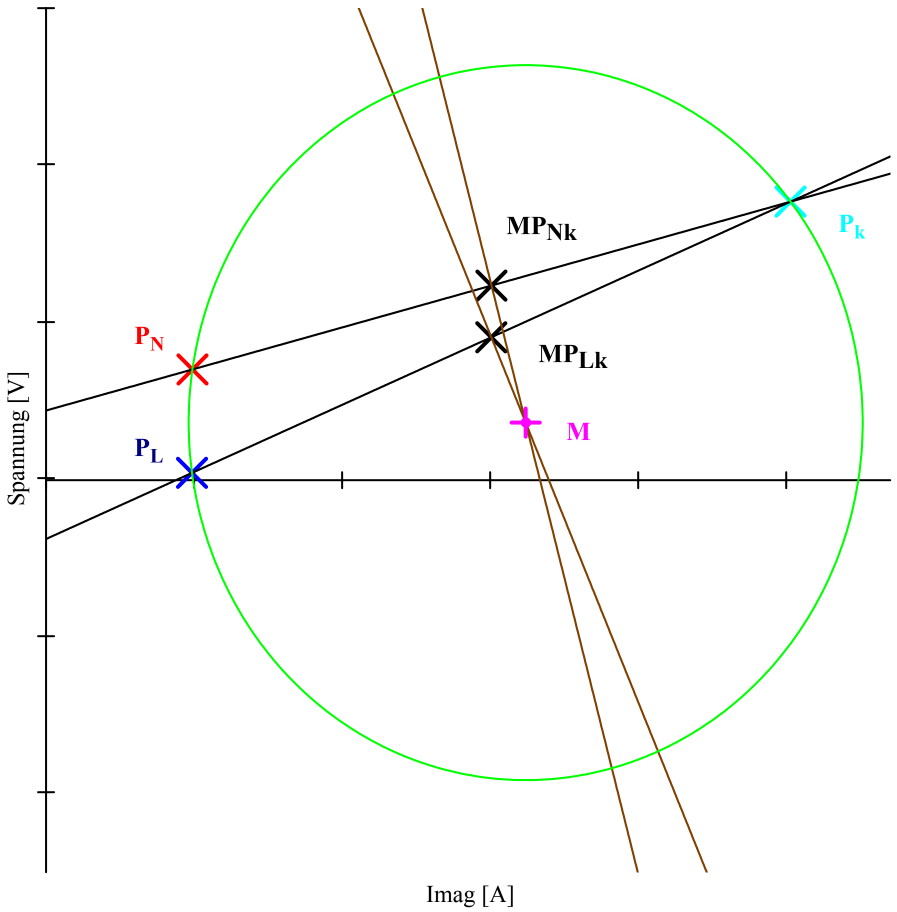
$$\phi := 0, \frac{2\pi}{500} .. 2\pi$$

Kreisfunktion

Es ist erforderlich $Pos_{x,y}$ zu addieren, da Mathcad das Diagramm vom Nullpunkt zeichnet

$I_i(\phi) := r \cdot \cos(\phi) + Pos_x$

$I_r(\phi) := r \cdot \sin(\phi) + Pos_y$



Bezüglich der speziellen Darstellung der Ortskurve siehe Punkt 2 dieses Artikels (Der Heylandkreis)