Peter Fischer pe.fischer@atn.nu

Konvergenzradius von Taylorreihen

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Taylorreihen, Konvergenzradius, beständige Konvergenz

- Kurzzusammenfassung

  Zuerst wird der Satz von Taylor angegeben und 2 kurze Beispiele für 2 verschiedene Entwicklungsstellen angegeben. Sodann wird der Konvergenzradius r definiert und für einige spezielle Funktionen berechnet. Der Begriff der beständigen Konvergenz wird an Beispielen demonstriert.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, Angewandte Physik, alle Abteilungen, 4. bzw. 5. Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

1. Satz von Taylor

Eine in einem bestimmten Intervall D definierte und beliebig oft differenzierbare Funktion läßt sich als Summe von Potenzfunktionen schreiben, wobei die Koeffizienten mit Hilfe der Ableitungsfunktionen an der Entwicklungsstelle und der Fakultät berechnet werden. Wählt man für die Entwicklungsstelle den Nullpunkt (0 Element D) so ergibt sich folgende Taylorreihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{d^n}{dx^n} f(0)}{n!} \cdot x^n \right)$$

Wählt man für die Entwicklungsstelle den Wert x_0 (x_0 Element D) so ergibt sich folgende Taylorreihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\frac{d^n}{dx^n} f(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \right]$$

Die Koeffizienten a_n der Taylorreihen ergeben sich somit zu

$$a(n) = \frac{\frac{d^n}{dx^n} f(x_0)}{n!}$$

wobei x_0 die Entwicklungsstelle ist.

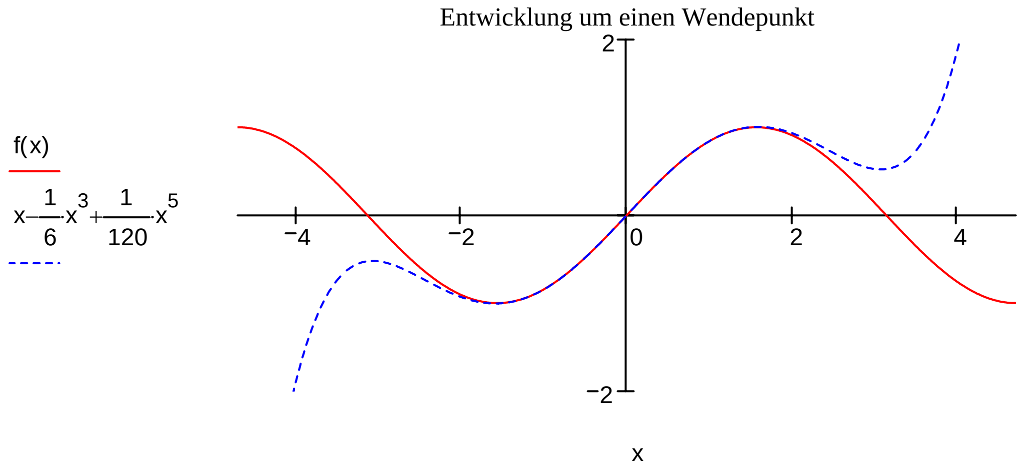
Es wird zur Kontrolle ein Taylorpolynom der Sinusfunktion um die Entwicklungsstelle 0 sowie um die Entwicklungsstelle $\pi/2$ angegeben.

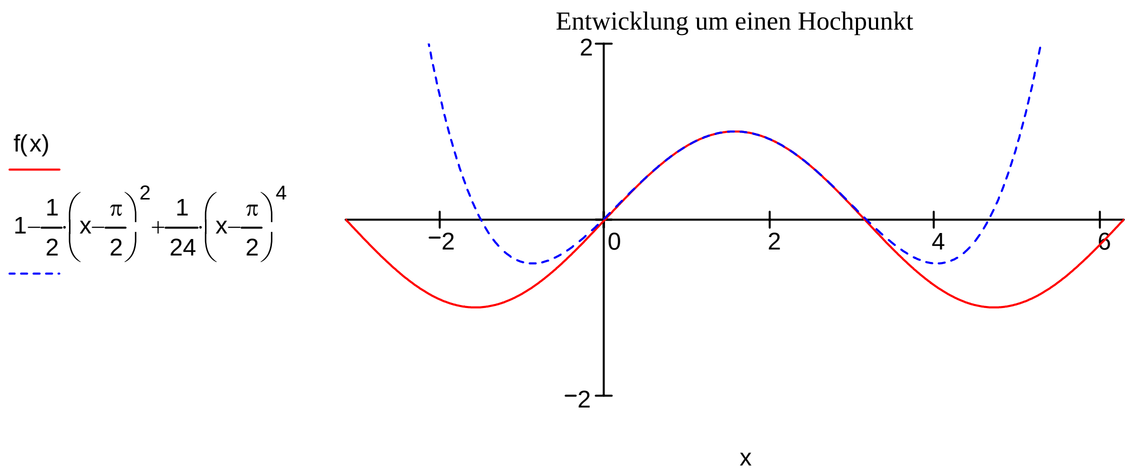
$f(x) := \sin(x)$

$f(x)$ reihe, x, 6 $\rightarrow 1 \cdot x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5$

$f(x)$ reihe, x = $\frac{\pi}{2}$, 6 $\rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)^2 + \frac{1}{24} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)^4$

Man erkennt sofort die unterschiedliche Symmetrie der beiden Polynome. Die erste Enwicklungsstelle ist ein Wendepunkt, sodass das Polynom punktsymmetrisch um die Entwicklungsstelle ist; die zweite hingegen ein (lokaler) Hochpunkt, sodass dieses Polynom achsialsymmetrisch zur Entwicklungsstelle ist.





2. Der Konvergenzradius r

Es gilt folgender Satz für die Konvergenz von unendlichen Potenz- und damit auch unendlichen Taylorreihen:
Wenn der Grenzwert des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Koeffizienten existiert, so konvergiert die Reihe im Intervall]-r;r[, falls nicht eine Einschränkung durch die Definitionsmenge vorliegt. Als Formel für den Konvergenzradius r ergibt sich damit.

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a(n)}{a(n+1)} \right|$$

Eine Taylorreihe, welche für alle reellen x konvergiert, nennt man beständig konvergent. Angenehmerweise sind sowohl die Sinus- als auch die Cosinusreihe und die Exponentialreihe beständig konvergent. Für die Sinus- und die Exponentialreihe wird das nachfolgend gezeigt.

3. Die beständige Konvergenz der Sinusreihe

Wir betrachten dazu die Entwicklung der Sinusfunktion in eine Taylorreihe um den Koordinatenursprung.

$$f(x) \text{ reihe}, x, 11 \;\rightarrow 1 \cdot x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7 + \frac{1}{362880} \cdot x^9$$

Man erkennt, dass die Koeffizienten der geraden Potenzen allesamt verschwinden und die der ungeraden Potenzen alternierendes Vorzeichen besitzen und mit 1/n! skalieren.
Damit ergibt sich folgende Koeffizientenschreibweise:

$$a(n) := \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$$

Zur Kontrolle können die ersten fünf Koeffizienten berechnet werden.

$n\_ := 1..5 \quad a(n\_) =$

1/1
-1/6
208333333/24999999961
-95390/480765601
685/248572793

Nun ermitteln wir den Quotienten der aufeinanderfolgenden Koeffizienten:

$$\frac{a(n)}{a(n+1)} \rightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{(2 \cdot n - 1)! \cdot (-1)^{n+2}} \cdot (2 \cdot n + 1)!$$

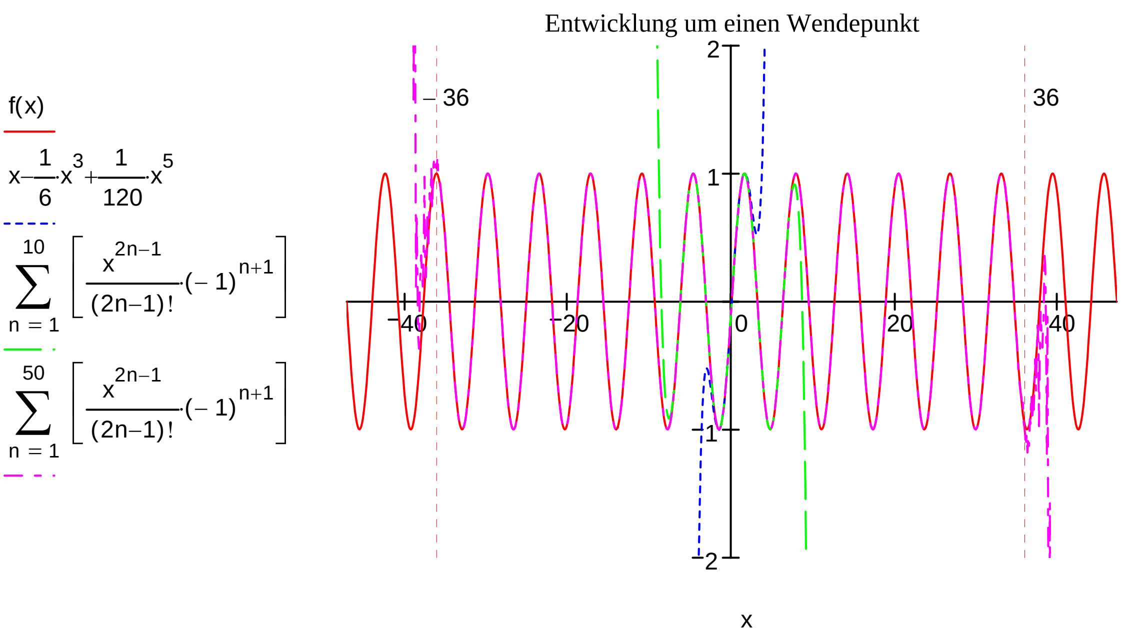
Damit ergibt sich der Konvergenzradius r als Limes des Betrags des vorangehenden Terms zu

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a(n)}{a(n+1)} \right| \rightarrow \infty$$

womit die beständige Konvergenz der Sinusreihe gezeigt ist.

Man kann sich das auch noch graphisch für einen größeren Bereich anschauen.

$$p_m(x) := \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot (-1)^{n+1} \right]$$



Man erkennt sehr gut, dass das Taylorpolynom der 99ten Ordnung bereits in einem sehr großen Bereich (ungefähr von -36 bis 36) eine perfekte Übereinstimmung mit der Sinusfunktion liefert.

Man kann schließlich noch den Grenzwert selbst berechnen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot (-1)^{n+1} \right] \rightarrow \sin(x)$$

und mit Freude die Sinusfunktion erkennen.

4. Die beständige Konvergenz der Exponentialreihe

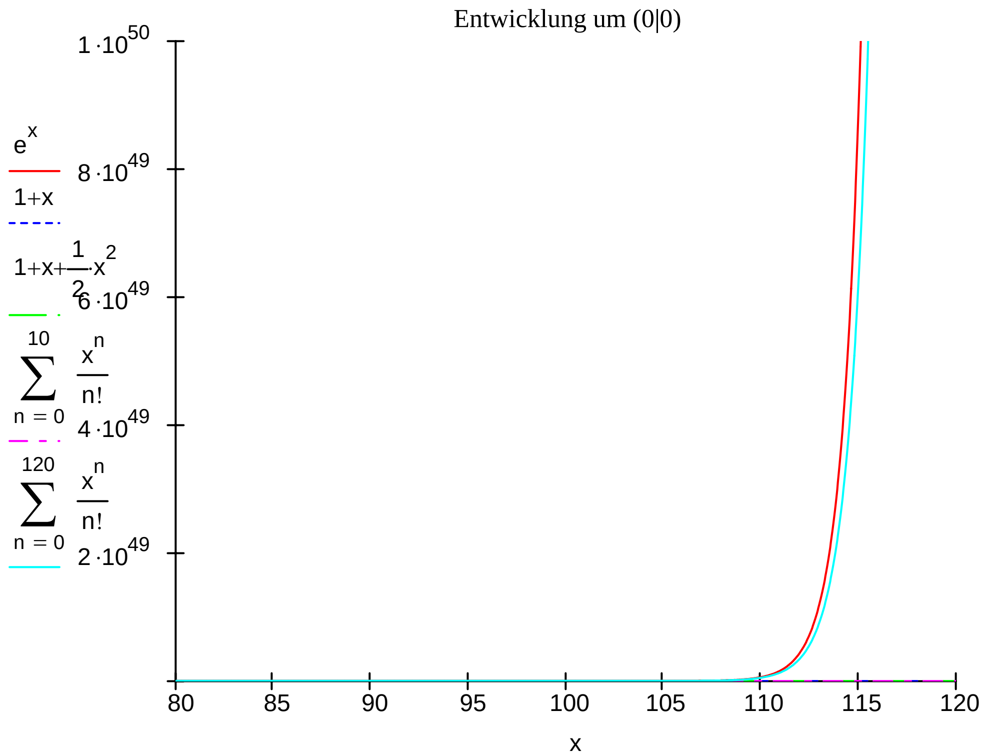
Auch die Exponentialreihe ist - wie bereits oben geschrieben - angenehmerweise beständig konvergent.

$$e^x \text{ reihe}, x, 9 \rightarrow 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + \frac{1}{720} \cdot x^6 + \frac{1}{5040} \cdot x^7 + \frac{1}{40320} \cdot x^8$$

Man kann den Konvergenzradius zu

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| \rightarrow \infty$$

berechnen.



Dieser Graph zeigt sehr beeindruckend, dass man bei Berücksichtigung von "lediglich" 121 Potenzfunktionen bereits einen enormen Bereich wunderbar approximiert. Man beachte die Skalierung der y-Achse. Da befindet man sich schon in "kosmologischen" Dimensionen.

Man kann schließlich noch den Grenzwert selbst berechnen:

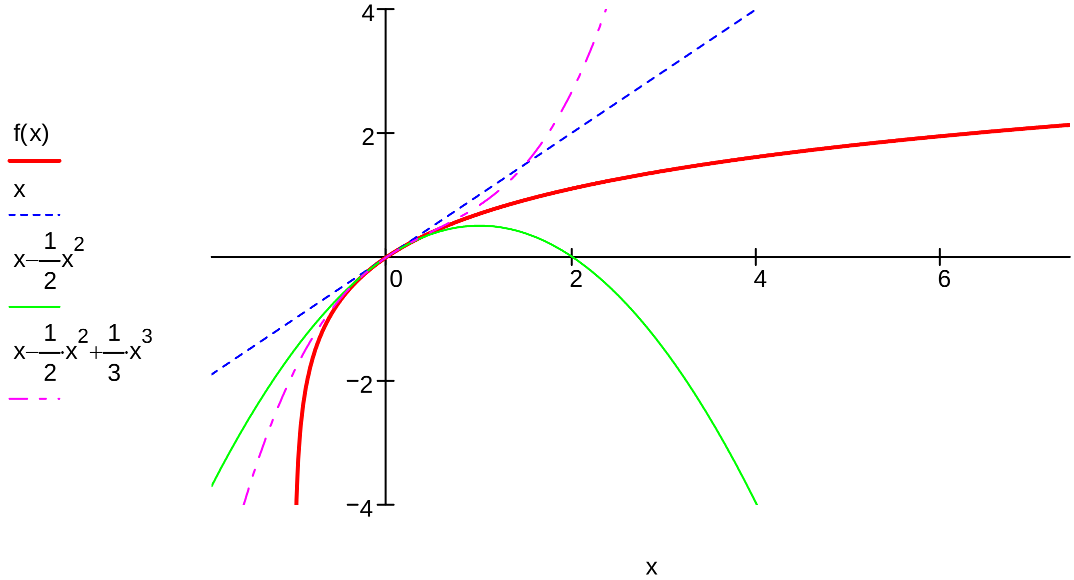
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow \exp(x)$$

5. Der Konvergenzradius r für eine bestimmte Logarithmusreihe

$f(x) := \ln(1 + x)$

$f(x) \text{ reihe}, x, 6 \rightarrow 1 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{5} \cdot x^5$

Wir verschaffen uns zuerst einen graphischen Überblick durch Darstellung der ersten 3 Taylorpolynome mit der Funktion selbst.



Man erkennt sehr schön das Bildungsgesetz der Koeffizeinten der zugehörigen Taylorreihe:

$a(n) := \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Zur Probe wieder einige Werte: $n\_ := 1 .. 5$

n_ =	a(n_) =
1.00	1/1
2.00	-1/2
3.00	1/3
4.00	-1/4
5.00	1/5

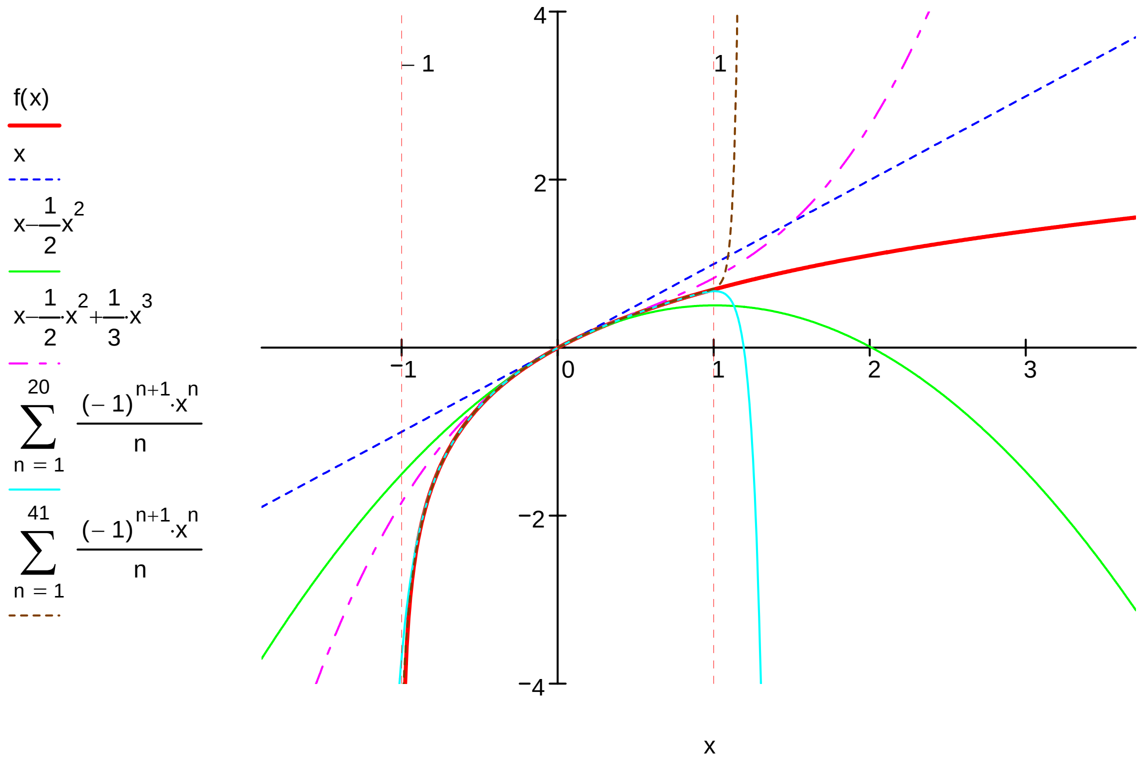
Nun ermitteln wir den Quotienten der aufeinanderfolgenden Koeffizienten:

$$\frac{a(n)}{a(n+1)} \rightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot (-1)^{n+2}} \cdot (n + 1)$$

Damit ergibt sich der Konvergenzradius r als Limes des Betrags des vorangehenden Terms zu

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a(n)}{a(n+1)} \right| \rightarrow 1$$

Man kann sich das ganz auch noch graphisch für einen größeren Bereich anschauen.

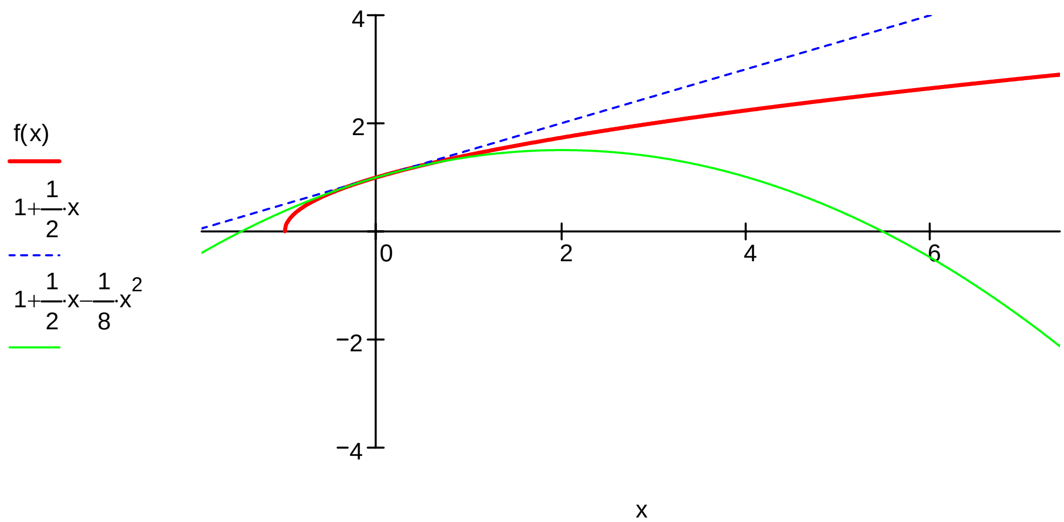


Wie auf Grund der alternierenden Koeffizientenvorzeichen nicht anders zu erwarten, "schlagen die Polynome einmal nach oben und im nächsten Näherungsschritt nach unten aus". Bei den Taylorpolynomen 20ter bzw. 41ter Ordnung erkennt man bereits sehr gut, dass die Näherung ausserhalb des Bereichs]-1; 1[keine sinnvolle Näherung mehr liefert.

6. Der Konvergenzradius r für eine bestimmte binomische Reihe

$f(x) := (1+x)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $f(x)$ reihe, x, 4 $\rightarrow 1+\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{8}\cdot x^2+\frac{1}{16}\cdot x^3+O\left(x^4\right)$

Wir verschaffen uns zuerst einen graphischen Überblick durch Darstellung zweier Taylorpolynome mit der Funktion selbst.



Man erkennt sehr schön das Bildungsgesetz der Koeffizienten der zugehörigen Taylorreihe wenn man den ersten Summanden extra anschreibt:

$$a(n) := \frac{\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{n!}$$

also: $f(x) = 1 + a(n) \cdot x^n$

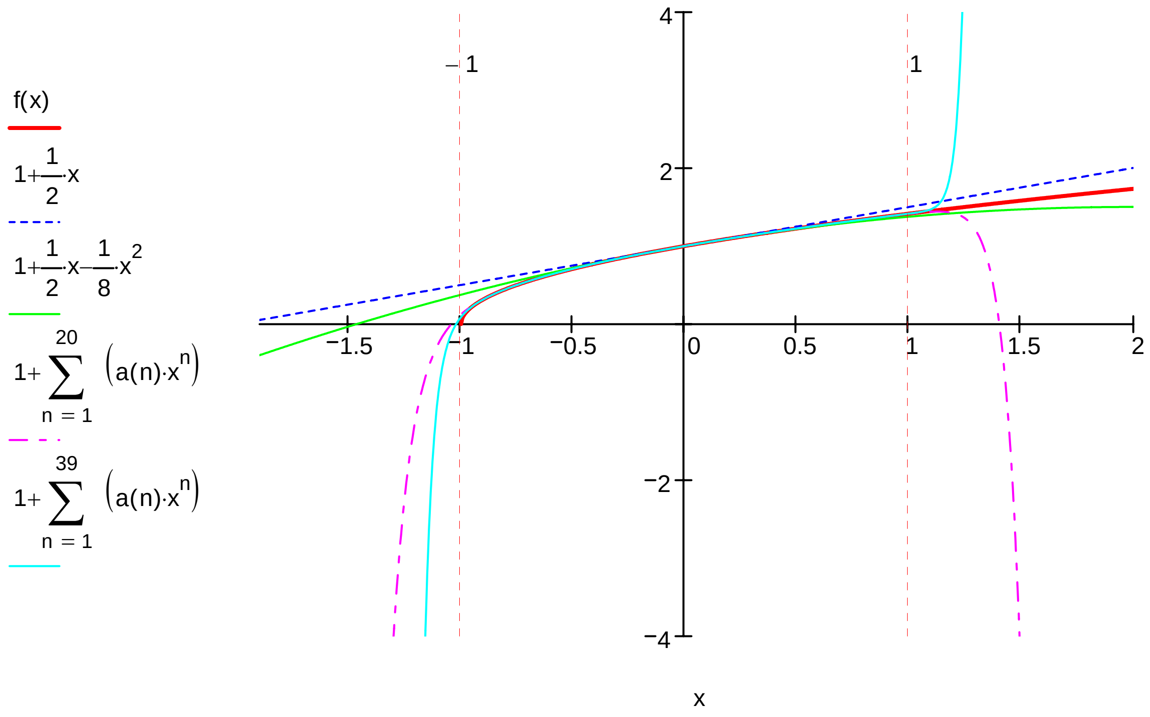
Zur Probe wieder einige Werte: $n\_ := 1 .. 5$

n_ =	a(n_) =
1.00	0.500
2.00	-0.125
3.00	0.063
4.00	-0.039
5.00	0.027

Damit ergibt sich der Konvergenzradius r als Limes des Betrags des vorangehenden Terms zu

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a(n)}{a(n+1)} \right| \to 1$$

Man kann sich das ganz auch noch graphisch für einen größeren Bereich anschauen.



Wie auf Grund der alternierenden Koeffizientenvorzeichen nicht anders zu erwarten, "schlagen die Polynome einmal nach oben und im nächsten Näherungsschritt nach unten aus". Bei den Taylorpolynomen 20ter bzw. 39ter Ordnung erkennt man bereits sehr gut, dass die Näherung ausserhalb des Bereichs]-1; 1[keine sinnvolle Näherung mehr liefert.

7. Konvergenz einer Taylorreihe bei x = -r bzw. x = + r

Wie bereits oben angeführt liefert der Konvergenzradius nur eine Konvergenz im beidseitig offenen Intervall]-r; r[.
Die Konvergenz in den Randstellen muss jeweils gesondert geprüft werden.
Das soll mit folgendem Beispiel der bereits oben um Null entwickelten Logarithmusfunktion gezeigt werden.
Zur Erinnerung:

$f(x) := \ln(1+x)$ besitzt die Reihenentwicklung $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n}$

Der Konvergenradius ist 1.

Nun berechnen wir den Reihenwert an der Stelle -r (= -1):

$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ .... wir erkennen die negative harmonische Reihe, welche bekanntlich divergiert.
Damit konvergiert die Taylorreihe an dieser Intervallgrenze nicht, was auch auf Grund des Definitionsbereichs nicht anders zu erwarten war.

Nun berechnen wir den Reihenwert an der Stelle r (= 1):

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ .... wir erkennen die Leibnizreihe, welche bekanntlich gegen ln2 konvergiert.
Damit konvergiert die Taylorreihe an dieser Intervallgrenze.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \rightarrow \ln(2)$$ Grenzwert der Leibnizreihe

Damit ergibt sich folgendes Konvergenzintervall für die Taylorreihe von ln(1+x):]-1 ; 1].

Abschließend noch einmal der Graph für das Taylorpolynom 80ter Ordnung und den markierten Konvergenzbereich.