Peter Fischer pe.fischer@atn.nu

Harmonische Schwingungen und deren Überlagerungen - Lissajous'sche Figuren

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Trigonometrische Funktionen, Zusammensetzung von Funktionen; Interferenz, Lissajous'sche Figuren, Fourierreihen

- Kurzzusammenfassung

  Untersuchung von harmonischen Schwingungen und deren Überlagerung. Dabei wird zuerst die harmonische Schwingung auf ihre Parameter - Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung - untersucht. Sodann wird die Überlagerung von zwei bzw. mehreren harmonischen Schwingungen längs einer Geraden (der x-Achse) präsentiert, wobei das Interesse auch auf die im 4-ten Jahrgang zu untersuchenden Fourierreihen gelenkt wird. Schließlich werden noch Schwingungen, welche in zueinander senkrecht liegenden Achsen (jeweils die x- und y-Achse) ablaufen und die bekannten Lissajous'schen Figuren ergeben, untersucht.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik und Angewandte Physik, alle Abteilungen, 2. Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001

Inhaltsübersicht *(Gewünschten Bereich anklicken)*

Harmonische Schwingungen - Grundlagen

zurück zur Inhaltsübersicht

In der Technik spielen periodische (vor allem zeitlich aber auch räumlich periodische) Vorgänge eine bedeutende Rolle. Am Beispiel der harmonischen Schwingung können die wichtigen Begriffe **Amplitude, Frequenz** bzw. **Periodendauer** und **Phasenwinkel** (bzw. **Phasenverschiebung)** anschaulich erklärt und graphisch dargestellt werden.

Bezeichnungen

$y(t)$	momentane Auslenkung oder Elongation
r	maximale Auslenkung oder Amplitude
ω	Winkelgeschwindigkeit bzw. Kreisfrequenz
f	Frequenz, also die Anzahl der vollen Schwingungen pro Sekunde
T	Periodendauer, also die Zeit für eine volle Schwingung (bei einem Fadenpendel eine Hin- und Herbewegung; bei einer rotierenden Scheibe eine Umdrehung um 360°)
ϕ_0	(Null-)Phasenwinkel, also der Phasenwinkel zur Zeit t = 0

$r := 1$ Die Amplitude wird auf 1 gesetzt;

$f := 1$ Diese Frequenz entspricht einer vollen Umdrehung pro Zeiteinheit.

$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f$

$\phi_0 := 0$ Die Schwingung hat damit zur Zeit t = 0 keine Momentanauslenkung, falls eine sinusförmige Schwingung betrachtet wird; für eine Cosinusschwingung wäre die momentane Auslenkung für t = 0 damit gleich der Amplitude.

Folgender Zusammenhang gilt weiters: $f := \frac{1}{T}$

Da es für das (mathematische) Verständnis nicht von Bedeutung ist, wird auf Einheiten verzichtet.

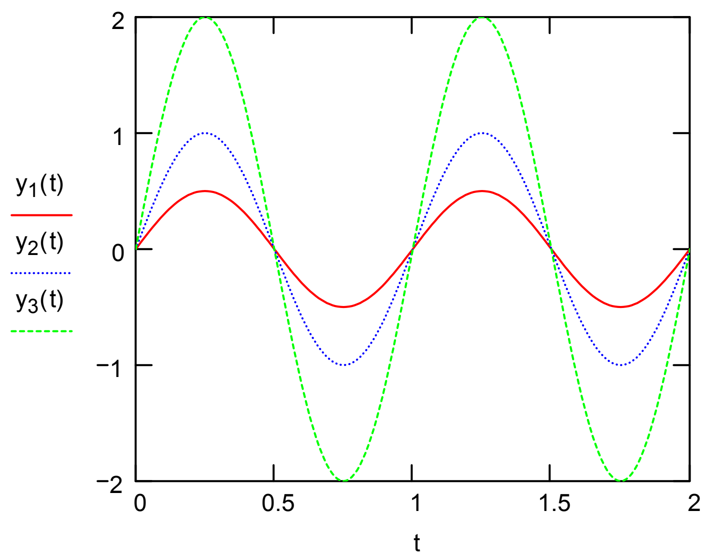
Die allgemeine **harmonische** (sinusförmige) Schwingungsgleichung lautet:

$$y(t) := r \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \phi_0\right)$$

$t := 0, 0.01 .. 2$ Durch diese Festlegung werden für die obige Frequenz jeweils 2 volle Schwingungen gezeigt.

Die 3 folgenden Schwingungen unterscheiden sich nur in ihrer **Amplitude**, wie der nachfolgende Graph zeigt.

$y_1(t) := \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot t)$ $\quad y_2(t) := \sin(2\pi \cdot t)$ $\quad y_3(t) := 2\sin(2 \cdot \pi \cdot t)$



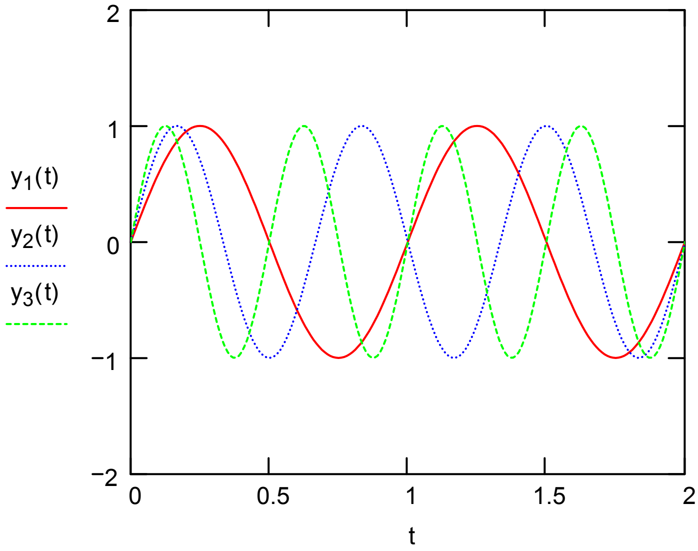
Da die Sinusfunktion sin(t) zwischen -1 und +1 beschränkt ist, ergibt sich für die harmonische Schwingung folglich eine Beschränkung zwischen -r und r.

Wie oben bereits geschrieben, werden hier je 2 volle Schwingungen gezeigt. Für die Physik sei der Begriff der (räumlichen) Wellenlänge erwähnt.

Für jede Schwingung sind also 2 Wellenlängen abgebildet.

Nun wird die Amplitude konstant gelassen und die **Frequenz** variiert.

$y_2(t) := \sin(3\pi \cdot t)t)$ $y_2(t) := \sin(3\pi \cdot t)$ $y_3(t) := \sin(4 \cdot \pi \cdot t)$

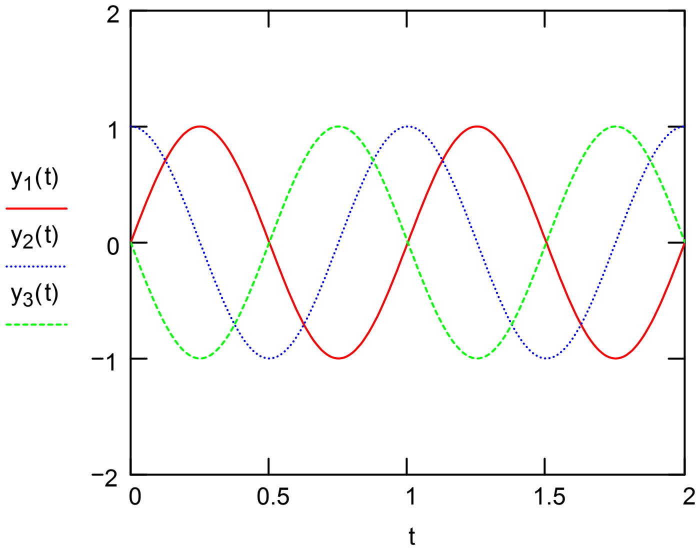


Die dritte Schwingung ist doppelt so schnell wie die erste; vollführt also in der gleichen Zeit doppelt so viele Schwingungen wie die erste.

Man erkennt, dass die erste Schwingung für die gewählte Zeitdauer wiederum 2 volle Schwingungen, die zweite, da ihre Frequenz das 1,5-fache der ersten Schwingung ist, 3 und die dritte, welche die doppelte Frequenz der ersten besitzt, doppelt so viele Schwingungen also genau 4 volle Schwingungen ausführt.

Der folgende Graph zeigt den Einfluss des **Nullphasenwinkels** auf den zeitlichen Verlauf der Schwingungen bei gleicher Amplitude r und gleicher Frequenz f.

$y_3(t) := \sin(4\pi \cdot t)t)$ $y_2(t) := \sin\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$ $y_3(t) := \sin(2 \cdot \pi \cdot t + \pi)$



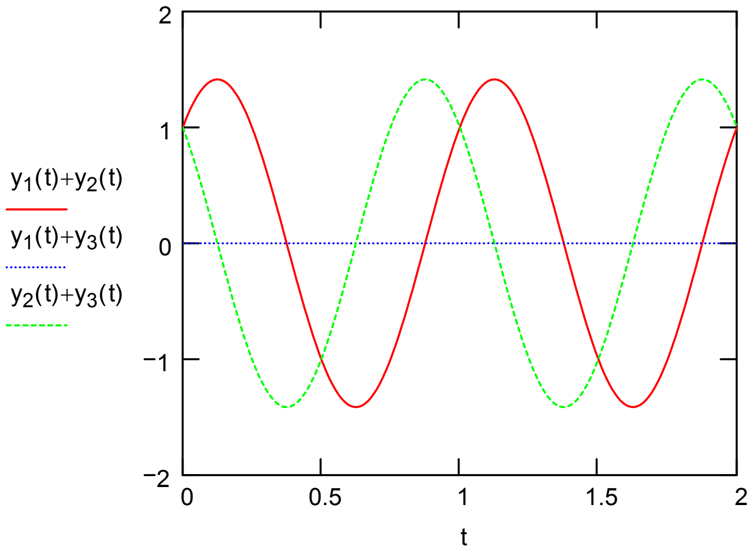
Man erkennt, dass die zweite Schwingung gerade die Cosinusfunktion $\cos(2\pi t)$ ist, da die Sinus- und Cosinusfunktion um 90° phasenverschoben sind. Der Cosinus eilt dem Sinus um 90° bzw. $\pi/2$ voraus. Es sei hier bereits darauf hingewiesen, dass die Sinusfunktion sin(t) eine ungerade - also zum Koordinatenursprung (bzw. sogar zu jedem Nullpunkt) punktsymmetrische Funktion ist, die Cosinusfunktion cos(t) hingegen eine gerade - also eine achsialsymmetrische Funktion zur y-Achse (bzw. sogar zu jeder Parallelen zur y-Achse durch einen Extremwert) darstellt.

Die 3 Schwingungen sind jeweils um 90° bzw. $\pi/2$ gegeneinander verschoben; üblich ist (insbesondere in der Elektrotechnik) ebenfalls die Bezeichnung der Nach- bzw. Vorauseilung; die Schwingungen eilen der vorangehenden jeweils um 90° voraus. Die erste eilt daher der dritten um 180° voraus bzw. ist um 180° phasenverschoben bzw. ist zur dritten gegenphasig.
Es wird bereits an dieser Stelle auf die Bedeutung der Gegenphasigkeit bei der Überlagerung von Schwingungen hingewiesen. Der nachfolgende Graph wird das sogleich belegen!

Überlagerung von jeweils zwei harmonischen Schwingungen längs einer Geraden

zurück zur Inhaltsübersicht

1. Überlagerung mit **gleichen** Frequenzen



Während also die Uberlagerung der ersten und zweiten und die der zweiten und dritten jeweils wiederum eine harmonische Schwingung **gleicher Frequenz** ergibt, löschen sich die beiden gegenphasigen Schwingungen 1 und 3 aus. Die Physiker sprechen von **vollständiger destruktiver Interferenz**.

Interessant ist nun jeweils die Funktionsgleichung dieser Überlagerungen:

Betrachten wir speziell die Überlagerung der ersten und der zweiten harmonischen Schwingung.

$r_1 := 1 \qquad r_2 := 1 \qquad \phi := \frac{\pi}{2}$

Wie die obigen Graphen zeigen, vermutet man also, dass die Überlagerung zweier Sinusschwingungen gleicher Frequenz aber beliebiger Phasenverschiebung wiederum eine Sinusschwingung der gleichen Frequenz ergeben. Diese Vermutung lässt sich mit Hilfe der trigonometrischen Summensätze elegant beweisen (was untenstehend kurz angedeutet wird), also für allgemeine Schwingungen der Amplitude r_1 und Frequenz f bzw. der Amplitude r_2 und der gleichen Frequenz f aber der Phasenverschiebung ϕ berechnen. Der Fall, dass beide Schwingungen einen Nullphasenwinkel besitzen, kann durch Koordinatentransformation auf den eben beschriebenen zurückgeführt werden.

$g(t) := r_1 \sin(2\pi f \cdot t) \qquad h(t) := r_2 \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi)$

$$g(t) + h(t) = r_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + r_2 \cdot \sin[(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \phi]$$

$$r_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + r_2 \cdot \sin[(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \phi] = r_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \ldots$$
$$+ r_2 \cdot (\sin(2\pi \cdot f \cdot t) \cdot \cos(\phi) + \cos(2\pi \cdot f \cdot t) \cdot \sin(\phi)$$

Hebt man die Sinusfunktion heraus und formt noch weiter um, so erhält man schließlich für die Amplitude r der Überlagerung und deren Phasenverschiebung ε:

$$r := \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\phi)}$$

folgt auch - wie man am Ergebnis sieht - durch Anwendung des Kosinussatzes aus dem Zeigerdiagramm

$$\tan(\varepsilon) := \frac{r_2 \cdot \sin(\phi)}{r_1 + r_2 \cdot \cos(\phi)}$$

Für die betrachteten zwei ersten Sinunsschwingungen folgt damit:

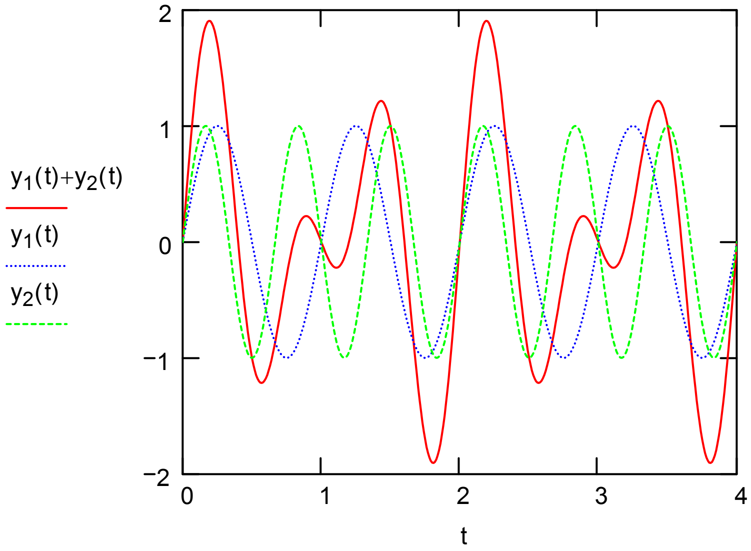
$r = 1.414$

Also die Quadratwurzel aus 2 was sich auch durch Kopfrechnen an Hand obiger Formel einfach überprüfen läßt. Für den Winkel ε erhält man den Arcustangens von 1 also 45 Grad, was ebenfalls mit der obigen graphischen Darstellung übereinstimmt.

2. Überlagerung mit **unterschiedlichen** Frequenzen

$y_1(t) := \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$ $\quad$ $y_2(t) := \sin(3\pi \cdot t)$ $\quad$ $y_3(t) := \sin(4 \cdot \pi \cdot t)$

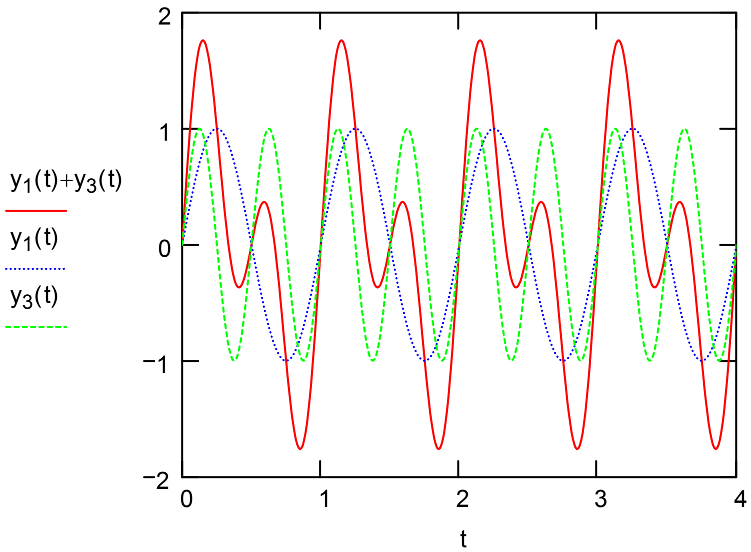
$t := 0, 0.01 .. 4$ Die Zeitachse wird über einen größeren Bereich dargestellt, um die Periodizität klar zu erkennen.



Man erkennt, dass die Überlagerung zweier sinusförmiger Schwingungen unterschiedlicher Frequenz eine zwar periodische aber nicht mehr sinusförmige - also eine anharmonische - Schwingung ergibt.

Die Periodendauer der nebenstehenden anharmonischen Schwingung beträgt 2 Zeiteinheiten.

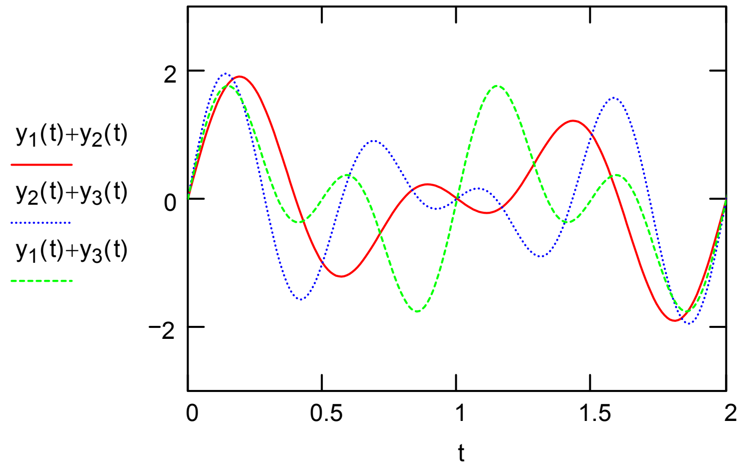
Diese fundamentale Erkenntnis, dass die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen **unterschiedlicher** Frequenz eine **anharmonische Schwingung** liefert kann in der Umkehrung als der geniale Gedanke von J. B. Fourier gesehen werden, der in seiner Arbeit "Theorie analytique de la chaleur" 1822 zeigte, dass sich ein beliebiger periodischer Vorgang aus harmonischen Schwingungen zusammensetzen lässt. Man nennt das Zerlegen einer periodischen Funktion in ihre harmonischen Bestandteile die harmonische Analyse oder die Fourieranalyse.



Man erkennt, dass die Überlagerung zweier sinusförmiger Schwingungen unterschiedlicher Frequenz eine zwar periodische aber nicht mehr sinusförmige - also eine anharmonische - Schwingung ergibt.

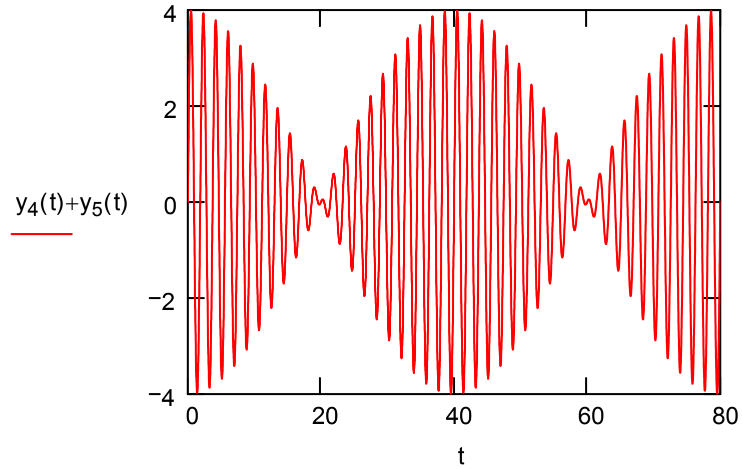
Die Periodendauer dieser anharmonischen Schwingung beträgt eine Zeiteinheit.

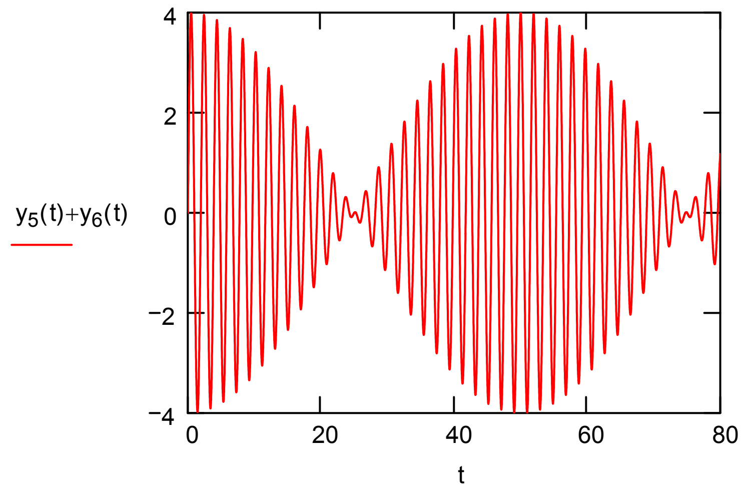
Zum Vergleich werden mehrere anharmonische Überlagerungen dargestellt.

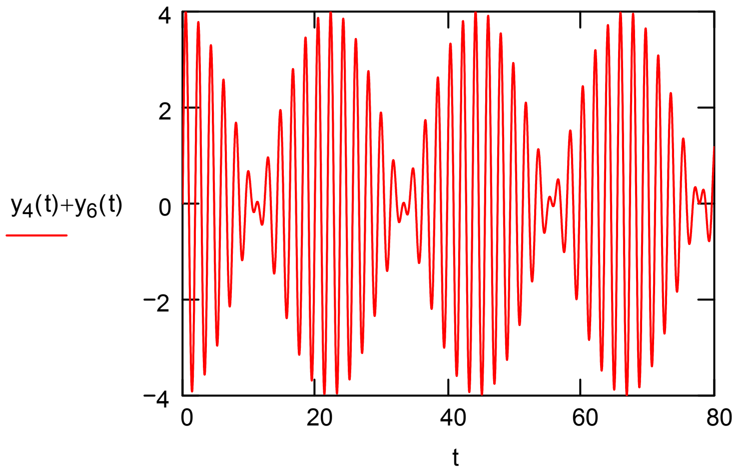


Unterscheiden sich die Frequenzen nur sehr wenig, so erhält man eine sogenannte **Schwebung**.

$y_4(t) := 2 \cdot \sin(1.1 \cdot \pi \cdot t)$ $y_5(t) := 2 \cdot \sin(1.05 \cdot \pi \cdot t)$ $y_6(t) := 2 \cdot \sin(1.01 \cdot \pi \cdot t)$ $t := 0, 0.01 .. 80$







Wie die obigen Graphen zeigen, vermutet man also, dass die Überlagerung zweier Sinusschwingungen nur wenig unterschiedlicher Frequenz eine mulitiplikative Verknüpfung einer Cosinus- und Sinusschwingung ergeben. Diese Vermutung lässt sich mit Hilfe der trigonometrischen Summensätze elegant beweisen, was untenstehend für den Spezialfall gleicher Amplituden, also für allgemeine Schwingungen der Amplitude r und Frequenz f_1 bzw. der Frequenz f_2 kurz angedeutet wird.

$$r \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + r \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t) = r(\sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t))$$

$$r(\sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t)) = 2 \cdot r \cdot \cos[\pi \cdot (f_1 - f_2) \cdot t] \cdot [\sin[\pi \cdot (f_1 - f_2) \cdot t]]$$

Schwebungen sind vor allem den Physikern und den Musikern bekannt. Beispielsweise ergibt sich beim Stimmen von Streichinstrumenten das charakteristische An- und Abschwellen der Lautstärke, wenn die beiden Töne sich nur wenig in der Tonhöhe (der Frequenz) unterscheiden.

zurück zur Inhaltsübersicht

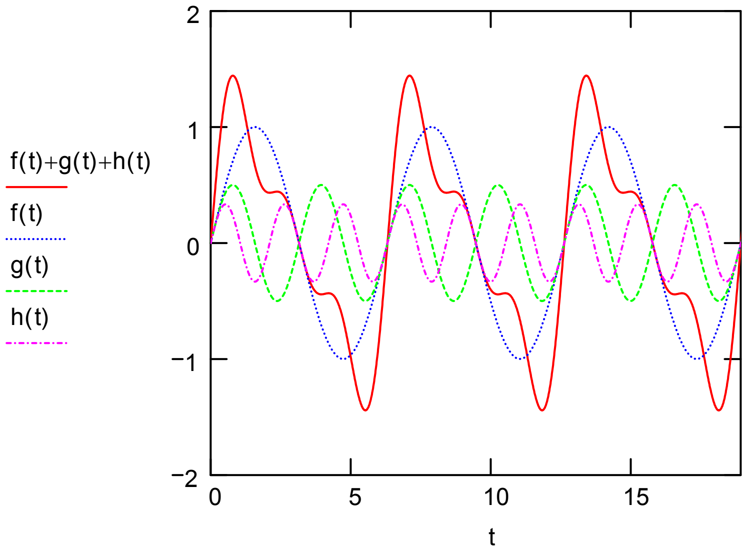
Überlagerung von mehr als zwei harmonischen Schwingungen längs einer Geraden

zurück zur Inhaltsübersicht

Im folgenden soll den SchülerInnen ein Einblick in die faszinierende Welt der Fourierreihen gewährt werden, wobei das punktweise Zusammensetzen von Funktionen sehr gut veranschaulicht werden kann. Im Hinblick auf diese Allgemeinheit wird im folgenden die Bezeichnung f(t), g(t) und h(t) als eigenständige Funktionen verwendet und das Argument ohne dem Faktor 2π angegeben. Zusätzlich werden im Folgenden jeweils 3 volle Schwingungen der sogenannten Grundschwingung - also derjenigen mit der geringsten Frequenz - gezeigt. In der Akustik stellt diese Schwingung den Grundton dar, welcher die Tonhöhe festlegt. Die vorhandenen Obertöne sorgen schließlich für den Klang bzw. die sogenannte Klangfarbe.

Drei harmonische Schwingungen f, g und h mit unterschiedlicher Amplitude und unterschiedlicher Frequenz werden überlagert. Im folgenden Graphen werden die Überlagerung und ihre einzelnen Komponenten dargestellt, um die punktweise Addition der Funktionswerte demonstrieren zu können. Die (gemeinsamen) Nullstellen eignen sich dafür besonders.

$$f(t) := \sin(t) \qquad g(t) := \frac{\sin(2t)}{2} \qquad h(t) := \frac{\sin(3t)}{3}$$

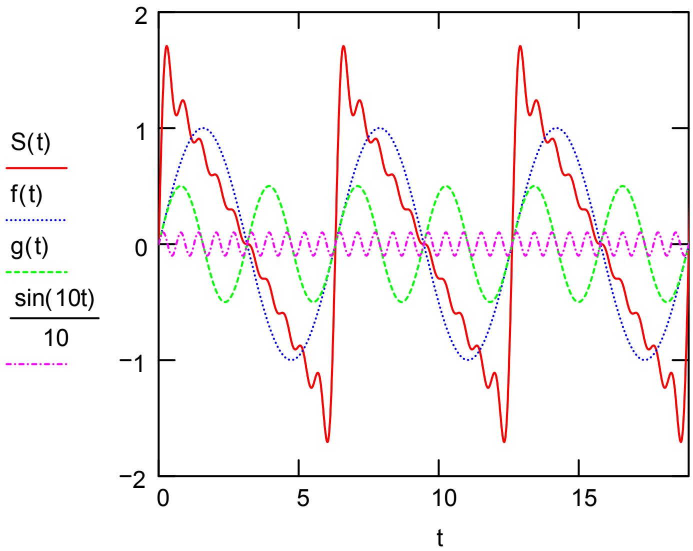


Man erkennt eindeutig, dass die anharmonische Überlagerung die Periode der Schwingung mit der geringsten Frequenz besitzt.

Einige werden bereits hier eine stückweise lineare Funktion als Überlagerung beliebig vieler Sinusfunktionen gemäß dem obigen Bildungsgesetz erkennen.

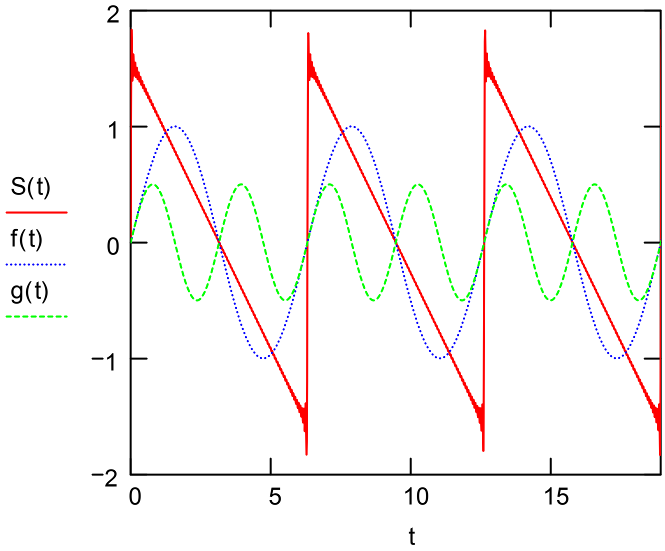
Wie schnell man an die ideale fallende Sägezahnfunktion - welche mit S(t) bezeichnet wird - gerät, sollen die folgenden Beispiele zeigen, wobei jeweils nur mehr die Grund- und die erste Oberschwingung angegeben werden.

$$S(t) := \sum_{k=0}^{10} \frac{\sin(k \cdot t)}{k}$$



Im nebenstehenden Graphen ist auch noch die letzte harmonische Teilfunktion sin(10t)/10 dargestellt, um ihren Einfluss auf die Gesamtfunktion s aufzuzeigen.

$$S(t) := \sum_{k=0}^{100} \frac{\sin(k \cdot t)}{k}$$



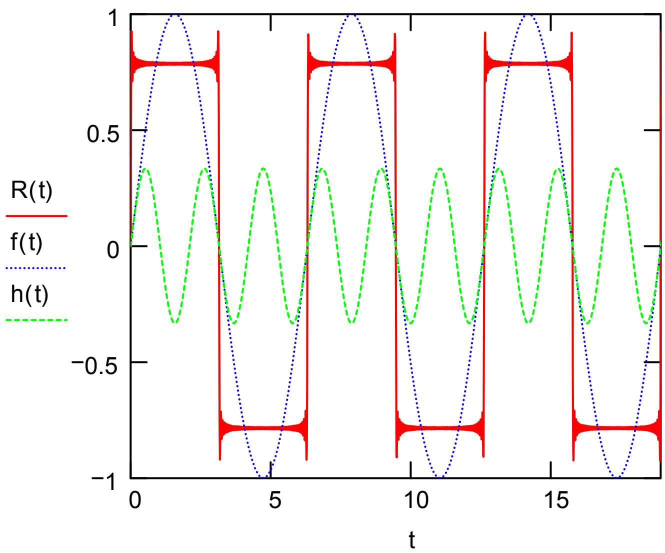
Die Annäherung an die fallende Sägezahnfunktion ist bereits - abgesehen von den Spitzen bei den Nullstellen - sehr gut.

Will man diese Spitzen auch noch beseitigen, so empfiehlt sich ein oberer Summenindex von rund 2000, was hier aber auf Grund der zu langen Rechenzeit nicht angeführt wird.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass diese Sägezahnfunktion - so wie ihre Bauteile - ebenfalls ungerade ist.

Ein schönes Beispiel für die Überlagerung von harmonischen Funktionen stellt auch die Rechtecksfunktion R(t) dar, welche auch in der Elektrotechnik und Elektronik eine bedeutsame Rolle spielt.

$$R(t) := \sum_{k=0}^{50} \frac{\sin[(2k+1) \cdot t]}{2k+1}$$



Bei der nebenstehenden Rechtecksfunktion tragen nur mehr Sinusfunktionen mit ungeraden ganzzahligen Frequenzen bei, während bei der obigen Sägezahnfunktion alle ganzzahligen Frequenzen vertreten sind.

Dies könnte im sogenannten Frequenzspektrum dargestellt werden, worauf aber hier nicht weitereingegangen wird.

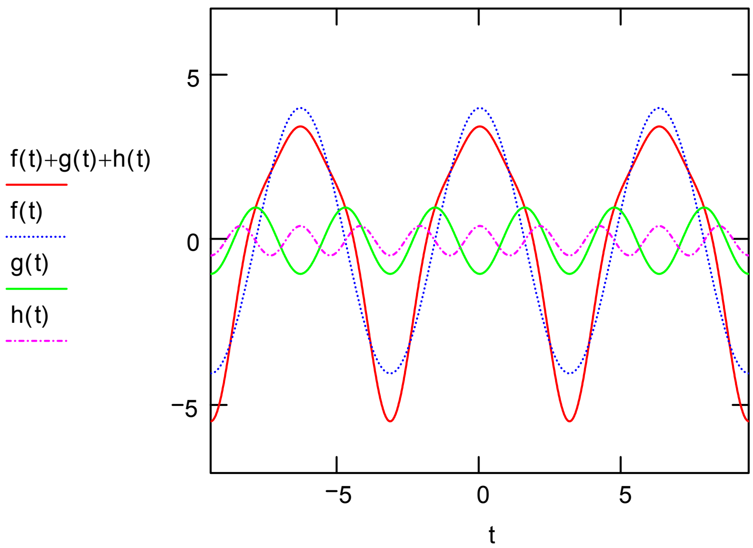
Es folgen noch Beispiele für **gerade** Funktionen als harmonische Bestandteile bzw. als Gesamtfunktion.

$\Delta t := 0.01$

$t := -3\pi, -3\pi + \Delta t .. 3\pi$

Drei harmonische (cosinusförmige) Schwingungen f, g und h mit unterschiedlicher Amplitude und unterschiedlicher Frequenz werden überlagert. Im folgenden Graphen werden die Überlagerung und ihre einzelnen Komponenten dargestellt, um die punktweise Addition der Funktionswerte demonstrieren zu können. Die (gemeinsamen) Nullstellen eignen sich dafür besonders.

$f(t) := 4\cos(t) \qquad g(t) := -\frac{4\cos(2t)}{2^2} \qquad h(t) := \frac{4\cos(3t)}{3^2}$

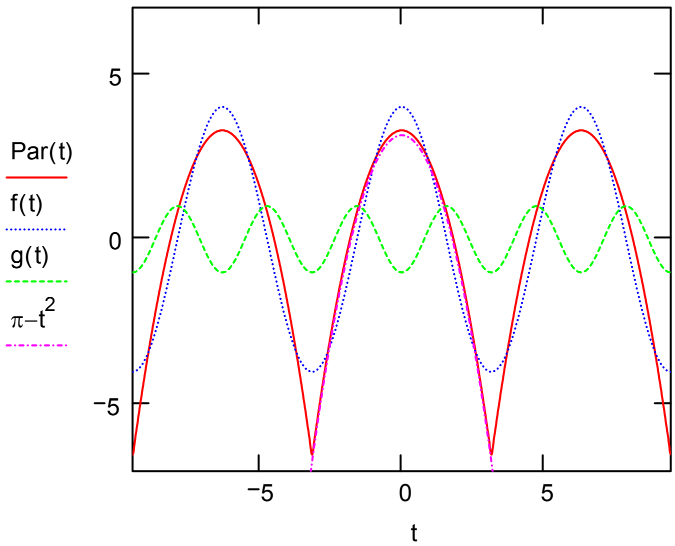


Man erkennt eindeutig, dass die anharmonische Überlagerung die Periode der Schwingung mit der geringsten Frequenz besitzt.

Einige werden bereits hier eine interessante Funktion als Überlagerung beliebig vieler Cosinusfunktionen gemäß dem obigen Bildungsgesetz erkennen.
Dass es sich um eine gerade Funktion handelt ist ebenfalls klar erkennbar.

Wie schnell man an die ideale Funktion - welche mit Par(t) bezeichnet wird - gerät, soll das folgende Beispiel zeigen, wobei nur mehr die Grund- und die erste Oberschwingung angegeben werden.

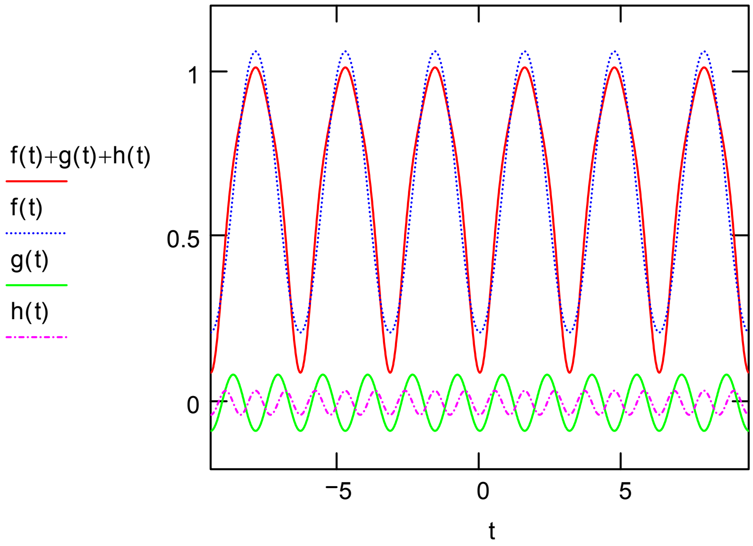
$$Par(t) := \sum_{k=1}^{50} \frac{4\cos(k \cdot t)}{k^2} \cdot (-1)^{k+1}$$



Zum Vergleich wird hier die um π nach oben verschobene und nach unten geöffnete Einheitsparabel gezeichnet, um zu zeigen, dass die Fourierreihendarstellung einer parabolischen Funktion Par(t) angegeben ist. Spätestens jetzt dürfte sich die Namensgebung rechtfertigen.

Wieder werden drei harmonische cosinusförmige Schwingungen f, g und h mit unterschiedlicher Amplitude und unterschiedlicher Frequenz überlagert. Wobei nur mehr gerade ganzzahlige Frequenzen auftreten.

$$f(t) := \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\,\frac{\cos(2t)}{1 \cdot 3} \qquad g(t) := -\frac{4\cos(4t)}{\pi \cdot 3 \cdot 5} \qquad h(t) := \frac{-4\cos(6t)}{\pi \cdot 5 \cdot 7}$$

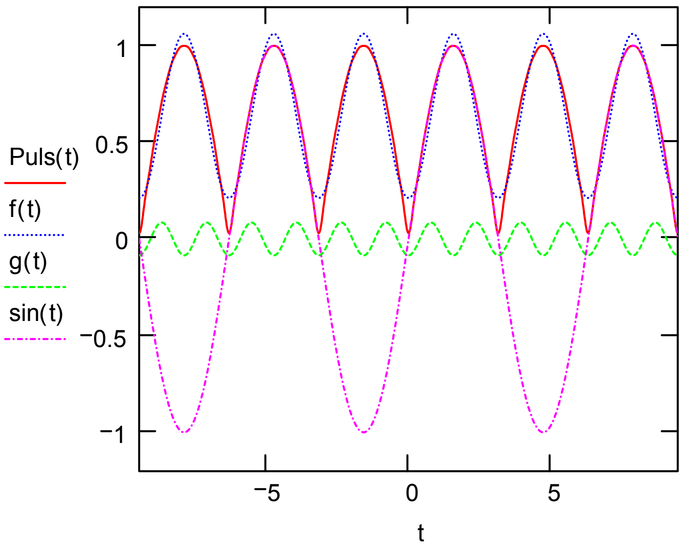


Man erkennt eindeutig, dass die anharmonische Überlagerung die Periode der Schwingung mit der geringsten Frequenz besitzt.

Einige werden bereits hier eine interessante Funktion aus der Elektrotechnik als Überlagerung beliebig vieler Cosinusfunktionen gemäß dem obigen Bildungsgesetz erkennen.
Dass es sich um eine gerade Funktion handelt ist ebenfalls klar erkennbar.

Wie schnell man an die ideale Funktion - welche mit Puls(t) bezeichnet wird - gerät, soll das folgende Beispiel zeigen, wobei nur mehr die Grund- und die erste Oberschwingung angegeben werden.

$$\mathrm{Puls}(t) := \frac{2}{\pi} - \left[\sum_{k=1}^{10} \frac{4\cos(2k \cdot t)}{\pi[(2k-1)\cdot(2k+1)]}\right]$$

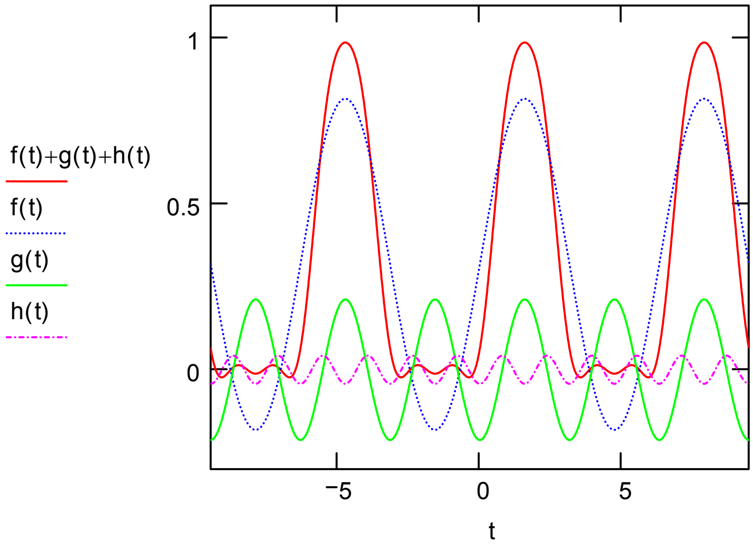


Zum Vergleich wird hier die Sinusfunktion gezeichnet, um zu zeigen, welche Fourierreihendarstellung die Funktion Puls(t) angibt. Spätestens jetzt dürfte sich die Namensgebung rechtfertigen, da diese Stromform als pulsierender Gleichstrom (z.B. in einem Vollweggleichrichter) bezeichnet wird.
Man beachte, dass nur bis n = 10 summiert wird. Somit sind lediglich fünf Cosinusfunktionen überlagert.

Zum Abschluss dieser Überlagerungen wird noch ein weiteres Beispiel aus der Elektrotechnik angeführt - die Einweggleichrichtung, da diese weder durch einen geraden (cos(nx)) noch durch einen ungeraden (sin(nx)) Funktionstyp alleine dargestellt werden kann.
Diese ergibt sich, wenn eine sinusförmige Wechselspannung an eine Diode, welche den Strom nur in eine Richtung durchlässt, gelegt wird. Man spricht dann von einem unterbrochenen Gleichstrom, der z.B. in einem Einweggleichrichter auftritt.

Folgende Funktionen werden überlagert.

$f(t) := \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) \qquad g(t) := \frac{-2}{\pi}\cdot\frac{1}{1\cdot 3}\cdot\cos(2t) \qquad h(t) := \frac{-2}{\pi}\cdot\frac{1}{3\cdot 5}\cdot\cos(4\cdot t)$



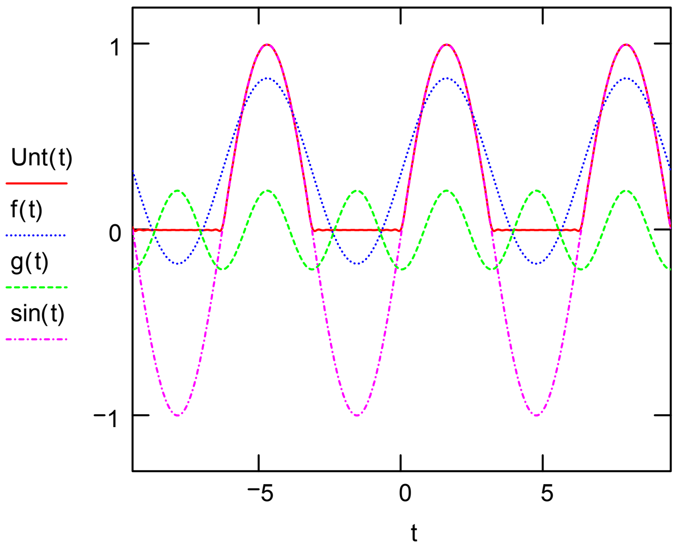
Man erkennt eindeutig, dass die anharmonische Überlagerung die Periode der Schwingung mit der geringsten Frequenz besitzt.

Der angekündigte unterbrochene Gleichstrom ist bereits erkennbar.

Auch die punktweise Zusammensetzung der Gesamtfunktion ist wieder eindrucksvoll zu erkennen.

Wie schnell man an die ideale Funktion - welche mit Unt(t) bezeichnet wird - gerät, soll das folgende Beispiel zeigen, wobei nur mehr die Grund- und die erste Oberschwingung angegeben werden.

$$\mathrm{Unt}(t) := \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cdot\sin(t) - \left[\sum_{k=1}^{10} \frac{2\cos(2k\cdot t)}{\pi[(2k-1)\cdot(2k+1)]}\right]$$



Zum Vergleich wird auch hier die Sinusfunktion gezeichnet.
Man beachte, dass auch hier nur bis n = 10 summiert wird. Somit sind lediglich 5 Cosinusfunktionen und eine Sinusfunktion überlagert.

Zum Abschluss dieses Ausflugs zu den Fourierreihen sei angemerkt, dass die Aufgabe im 4. Jahrgang in der Berechnung der Fourierkoeffizienten mittels Integralrechnung besteht, wobei die trigonometrischen Summensätze zur Anwendung gelangen. Meine Erfahrung zeigt aber, dass die Schüler sich an die Gedanken und Überlegungen, welche sie im 2ten Jahrgang zu diesem Kapitel angestellt haben, erinnern können und damit auf bereits bekanntes und damit nicht abschreckendes Gebiet geführt werden. Mittels Symmetrieüberlegungen (gerade; ungerade Funktionen) wird natürlich auch die Berechnung der Fourierkoeffizienten wesentlich vereinfacht bzw. beschleunigt.

Überlagerung harmonischer Schwingungen mit senkrecht zueinander stehender Schwingungsrichtung - Lissajous-Figuren

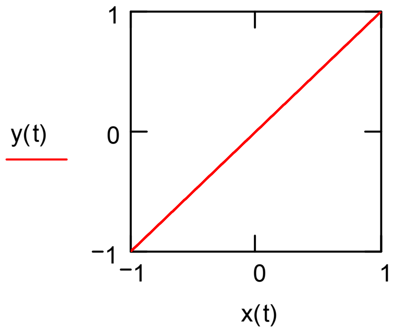
zurück zur Inhaltsübersich

Im folgenden soll die erste Schwingung stets längs der x-Achse und die zweite dazu senkrecht, also längs der y-Achse stattfinden, sodass die Bezeichnungen x(t) und y(t) gerechtfertigt scheinen.

1. **Gleiche** Frequenz

$x(t) := \sin(t)$

$y(t) := \sin(t)$



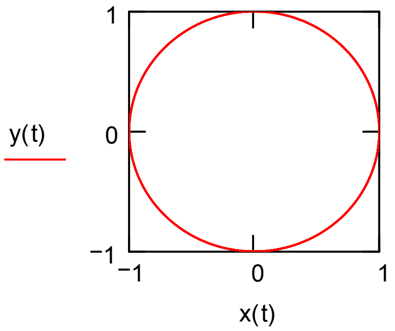
Wenn die beiden Schwingungen synchron im Nullpunkt starten, ergibt sich eine durch den Ursprung verlaufende Gerade deren Steigung gerade das Verhältnis der beiden Amplituden angibt. Für nebenstehenden Fall also die Steigung 1 und damit ein Steigungswinkel von 45 °.

Es empfiehlt sich, die SchülerInnen zur "händischen" Überprüfung all dieser Überlagerungen zu animieren. Das bedeutet, dass die rechte Hand die Schwingung in x-Richtung und die linke Hand diejenige in y-Richtung ausführen soll. So erhält man für jeden Zeitpunkt t die x- bzw. y-Koordinate der Gesamtschwingung und kann daraus die resultierende Bewegung zusammensetzen.

Beim nächsten Beispiel ergeben sich bei diesem händischen Nachfahren bereits tolle Lösungsversuche beim Treffpunkt im Nullpunkt.

$x(t) := \sin(t)$

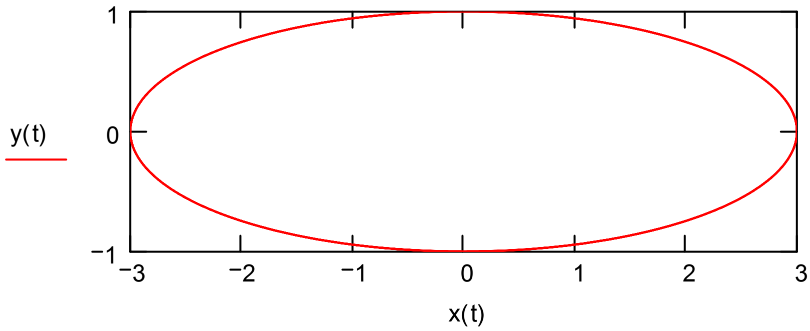
$y(t) := \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$



Wenn die beiden Schwingungen nicht mehr gleichzeitig im Nullpunkt starten, ergibt sich ein Kreis bzw. allgemeiner eine Ellipse deren Haupt- bzw. Nebenachse den beiden Amplituden entspricht. Dass zeigt das folgende Beispiel.

$x(t) := 3\sin(t)$

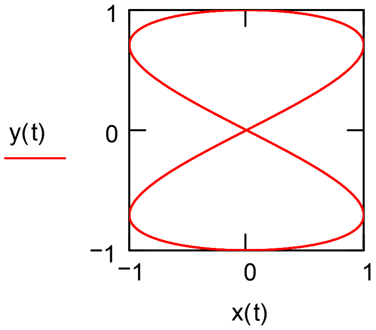
$y(t) := \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$



2. **Unterschiedliche** Frequenz

$x(t) := \sin(2t)$

$y(t) := \sin(t)$

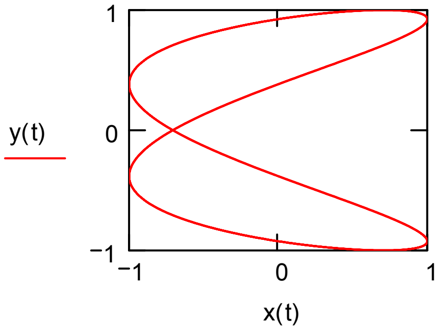


Wenn sich die Frequenzen der beiden Schwingungen unterscheiden, so ergibt sich für den Fall eines rationalen Frequenzverhältnissens jeweils eine geschlossene Figur. Diese Figuren werden nach dem französischen Physiker J. Lissajous (1822 - 1880) als Lissajousfiguren bezeichnet und dienen bespielsweise in der Elektrotechnik zum Bestimmen von Frequenzverhältnissen, welche dem Verhältnis der Anzahl der Berührungspunkte der Figur mit dem umschriebenen Rechteck mit den Amplituden als Seitenlängen entsprechen.
Auch der Kreis und die Ellipse zählen zu den Lissajousfiguren, welche aber durch das Frequenzverhältnis 1:1 ausgezeichnet sind.

Im folgenden Beispiel wird der Einfluss einer **Phasenverschiebung** gezeigt.

$x(t) := \sin(2t)$

$y(t) := \sin\left(t + \frac{\pi}{8}\right)$

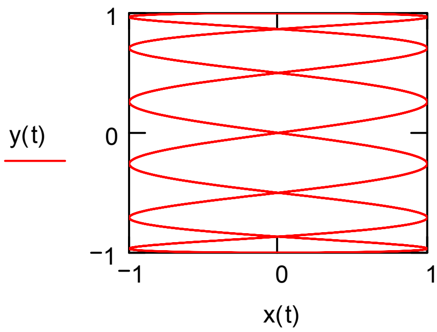


Die obere und untere Rechteckseite werden jeweils einmal berührt, wohingegen die linke und rechte Seite je 2mal von der Figur berührt werden, sodass sich das Frequenzverhältnis von 2:1 bestätigt.

Im folgenden Beispiel wird sowohl der Einfluss des **Frequenzverhältnisses** als auch eine Phasenverschiebung dargestellt.

$x(t) := \sin(6t)$

$y(t) := \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$

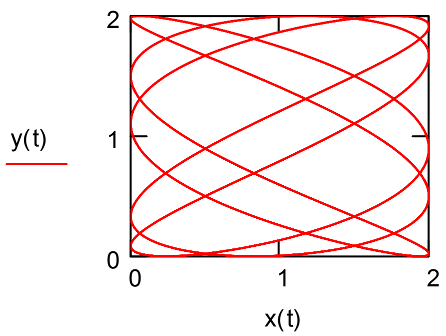


Durch die **Berührungspunkte** wird das Frequenzverhältnis wiederum bestätigt.

Im folgenden Beispiel wird sowohl der Einfluss des Frequenzverhältnisses als auch eine Phasenverschiebung und eine **Verschiebung** aus dem Koordinatenursprung als **Symmetriezentrum** dargestellt.

$$x(t) := 1 + \sin(5t)$$

$$y(t) := 1 + \sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$$

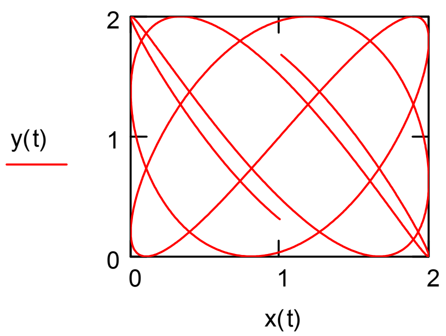


Durch die Berührungspunkte wird das Frequenzverhältnis wiederum bestätigt.

Im folgenden Beispiel wird obige Aussage überprüft, dass die Figur nur für **rationale** Frequenzverhältnisse **geschlossen** wird.

$$x(t) := 1 + \sin(t)$$

$$y(t) := 1 + \sin\left(\sqrt{2}\,t\right)$$

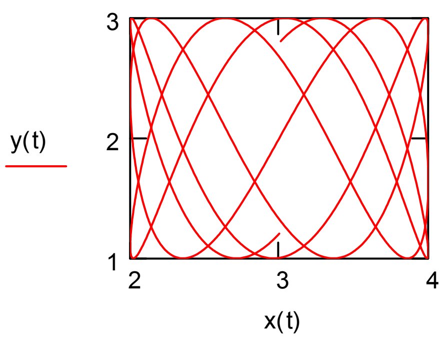


Da das Frequenzverhältnis nicht rational ist, ergibt sich keine geschlossene Figur.

Das wird auch durch das untenstehende Beispiel bestätigt.

$$x(t) := 3 + \sin(t)$$

$$y(t) := 2 + \sin\left(\sqrt{5}\,t\right)$$



zurück zur Inhaltsübersicht