Rechnen mit Vektoren

Einheitendef.: $° := \mathrm{Grad}$ $\quad kJ := 1000J$ $\quad$ Indizes: $x := 0 \quad y := 1 \quad z := 2$

Die folgenden Rechenregeln und Beispiele erklären das Rechnen mit Vektoren, wie sie u.a. für Berechnungen räumlicher Kräftesysteme benötigt werden.

Definition und Schreibweise

Vektoren sind Größen mit einem Betrag <u>und</u> einer Richtung.
Die meisten Größen in der Technik sind Vektoren, z.B. Kräfte, Momente, Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, ...

kartesische Schreibweise

Bei dieser Standardschreibweise werden die Anteile des Vektorbetrages in die 3 Koordinatenrichtungen angegeben. Um Vektoren von skalaren Größen (Beträge ohne Richtung) zu unterscheiden, verwendet man eine besondere Schreibweise. Hier werden Vektoren fett geschrieben.

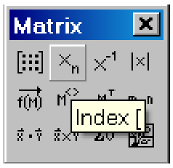
allgemein $\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \mathrm{Einheit}$

Beispiele: Kraft $\quad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} 120 \\ -50 \\ 80 \end{pmatrix} N$ $\qquad$ Geschwindigkeit $\quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$

Der Zugriff auf die einzelnen Werte des Vektors erfolgt über Indizes. Die Indizierung der Einträge beginnt bei "0".

Beispiel $\quad F_x := \mathbf{F}_0 \quad F_x = 120\,N \qquad F_y := \mathbf{F}_1 \quad F_y = -50\,N \qquad F_z := \mathbf{F}_2 \quad F_z = 80\,N$

Die Eingabe des Index erfolt mittels



Der Betrag eines Vektors in kartesischer Schreibweise wird nach dem pythagoräischen Lehrsatz berechnet.
Es wird die selbe Bezeichnung allerdings mit normaler Schreibweise verwendet.

allgemein $\quad v = |\mathbf{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$

Beispiele: $\quad F := |\mathbf{F}| \quad F = 152.643\,N \qquad v := |\mathbf{v}| \quad v = 3.606\,\frac{m}{s}$

Betrag und Raumwinkel

Bei dieser Schreibweise werden der Betrag des Vektors sowie zwei Winkel zwischen Vektor und zwei Koordinatenachsen angegeben.

allgemein Betrag v

Winkel zur x-Achse α
Winkel zur y-Achse β
Winkel zur z-Achse γ

Es müssen nur zwei der drei Winkel angegen werden. Die Winkelsumme der beiden gewählten Winkel muss größer oder gleich 90° sein.

Beispiel Hebel

Länge (=Betrag) $\quad h := 150mm$

Raumwinkel zur x-Achse $\quad \alpha := 43°$ $\qquad$ Raumwinkel zur z-Achse $\quad \gamma := 68°$

Umrechnung zwischen den beiden Schreibweisen

Die Umrechnung von der Schreibweise mit Raumwinkel in kartesische Schreibweise soll anhand von Beispielen exemplarisch gezeigt werden.

kartesische Schreibweise des Hebels

$$\mathbf{h} := h \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sqrt{1-\cos(\alpha)^2-\cos(\gamma)^2} \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 109.703 \\ 85.486 \\ 56.191 \end{pmatrix} \mathrm{mm}$$

Der Anteil der zum fehlenden Raumwinkel gehörenden Koordinate wird aus den bekannten Raumwinkeln mit dem oben gezeigten Wurzelausdruck berechnet.

Betrag und Raumwinkel des Hebels **h**

Betrag $h := |\mathbf{h}|$ $\quad h = 150\,\mathrm{mm}$

Raumwinkel

$$\alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{\mathbf{h}_x}{h}\right) \qquad \beta := \operatorname{acos}\left(\frac{\mathbf{h}_y}{h}\right) \qquad \gamma := \operatorname{acos}\left(\frac{\mathbf{h}_z}{h}\right)$$

$$\alpha = 43° \qquad \beta = 55.256° \qquad \gamma = 68°$$

Einheitsvektor eines Vektors

Der Einheitsvektor eines Vektors zeigt in die selbe Richtung wie der Vektor selbst und hat den <u>dimensionslosen</u> Betrag "1".

allgemein

$$\mathbf{e_v} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \begin{pmatrix} \frac{v_x}{|\mathbf{v}|} \\ \frac{v_y}{|\mathbf{v}|} \\ \frac{v_z}{|\mathbf{v}|} \end{pmatrix}$$

Beispiele:

$$\mathbf{e_F} := \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|} \qquad \mathbf{e_F} = \begin{pmatrix} 0.786 \\ -0.328 \\ 0.524 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{e_F}| = 1$$

$$\mathbf{e_v} := \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad \mathbf{e_v} = \begin{pmatrix} 0.555 \\ 0 \\ 0.832 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{e_v}| = 1$$

Addition (Subtraktion) von Vektoren

Vektoren werden dadurch addiert, indem man ihre x-, y- und z-Anteile addiert.

allgemein

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x+b_x \\ a_y+b_y \\ a_z+b_z \end{pmatrix}$$

Summe zweier Kräfte

$$\mathbf{F_1} := \begin{pmatrix} 120 \\ -50 \\ 80 \end{pmatrix} \mathrm{N} \qquad \mathbf{F_2} := \begin{pmatrix} -25 \\ 90 \\ -100 \end{pmatrix} \mathrm{N} \qquad \mathbf{F_1}+\mathbf{F_2} = \begin{pmatrix} 95 \\ 40 \\ -20 \end{pmatrix} \mathrm{N}$$

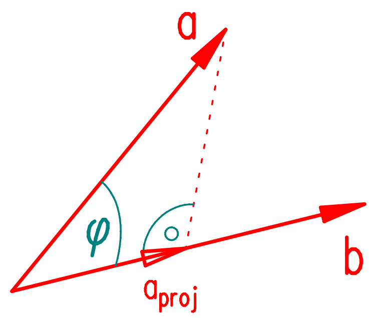
Vektor von Punkt-1 nach Punkt-2

$$\mathbf{P_1} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{m} \qquad \mathbf{P_2} := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{m} \qquad \mathbf{h_{1\_nach\_2}} := \mathbf{P_2} - \mathbf{P_1} \qquad \mathbf{h_{1\_nach\_2}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

$\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_2}$ sind die Ortsvektoren der beiden Punkte im Raum

$$|\mathbf{h_{1\_nach\_2}}| = 7.874\,\mathrm{m}$$

Skalarprodukt zweier Vektoren



Das Skalarprodukt der Vektoren **a** und **b** ist das Produkt der Beträge von $\mathbf{a}_{proj}$ und **b**.

Das Skalarprodukt ist ein Zahlenwert!

allgemeine Formeln

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z = |\mathbf{a}|\cdot\cos(\varphi)\cdot|\mathbf{b}|$$

Beispiele Arbeit einer schräg zum Weg angreifenden Kraft

Kraft $\mathbf{F} := \begin{pmatrix}200\\100\\0\end{pmatrix}\mathrm{N}$ Weg $\mathbf{s} := \begin{pmatrix}10\\-2\\5\end{pmatrix}\mathrm{m}$ Arbeit $W := \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$ $W = 1.8\,\mathrm{kJ}$

Winkel zwischen den beiden Ortsvektoren zu den Punkten P_1 und P_2

$$\mathbf{P_1}\cdot\mathbf{P_2} = |\mathbf{P_1}|\cdot|\mathbf{P_2}|\cos(\varphi) \qquad \varphi := \mathrm{acos}\left(\frac{\mathbf{P_1}\cdot\mathbf{P_2}}{|\mathbf{P_1}|\cdot|\mathbf{P_2}|}\right) \qquad \varphi = 102.52°$$

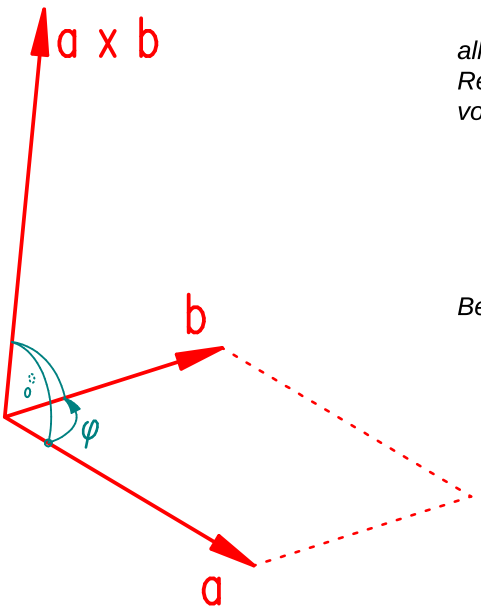
Vektorisieren des Skalarproduktes

Bei etlichen Anwendungen sollen die Teilprodukte des Skalarproduktes als Vektor erhalten bleiben. In diesem Fall mus das Skalarprodukt "vektorisiert" werden.

Beispiel $\mathbf{A} := \begin{pmatrix}10\\30\\20\end{pmatrix}\mathrm{cm}^2$ $\mathbf{ys} := \begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}\mathrm{cm}$ $\overrightarrow{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{ys})} = \begin{pmatrix}20\\150\\-60\end{pmatrix}\mathrm{cm}^3$

$$\sum\overrightarrow{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{ys})} = 110\,\mathrm{cm}^3 \quad = \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{ys} = 110\,\mathrm{cm}^3$$

Vektorprodukt oder Kreuzprodukt zweier Vektoren



Das Vektorprodukt der Vektoren **a** und **b** ist ein Vektor mit dem Betrag **|a|**·**|b|**·sin(φ), der normal auf a und b steht. Der Richtungssinn folgt einer Schraube, die mit einem Schlüssel von a nach b gedreht wird.

allgemeine Rechen-vorschrift

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ -a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

Beispiel

Die oben definierte Kraft **F** wirkt im Kraftangriffspunkt P_1 und übt ein Moment um den Punkt P_2 aus.
Der Hebel von P_1 nach P_2 ist der oben definierte Vektor $\mathbf{h_{1\_nach\_2}}$.
Das Moment von **F** um P_2 ist das Kreuzprodukt aus Kraft x Hebel.

$$\mathbf{M_{F\_P2}} := \mathbf{F} \times \mathbf{h_{1\_nach\_2}} \qquad \mathbf{M_{F\_P2}} = \begin{pmatrix} 600 \\ -1200 \\ 700 \end{pmatrix} \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

$$M_{F\_P2} := |\mathbf{M_{F\_P2}}| \qquad M_{F\_P2} = 1513.275\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$