lineare versus Spline-Interpolation

Tabellenwerte müssen häufig interpoliert werden. Bei einer linearen Interpolation werden die Tabellenwerte durch einen Polygonzug verbunden. Eine Splinefunktion hingegen verbindet die Tabellenwerte durch eine stetige Funktion, die den "wahren" Zwischenwerten meistens aber nicht immer viel näher kommt.

Beispielangaben

Temp. in °C *dyn. Visk. in 10^{-3} Pa s*

Tabelle der dyn. Viskosität von Wasser

$$\mathbf{t\_\eta_{H2O}} := \begin{pmatrix} 0 & 1.79 \\ 10 & 1.31 \\ 20 & 1.01 \\ 30 & 0.80 \\ 40 & 0.65 \\ 50 & 0.56 \end{pmatrix}$$

Die Tabellenwerte müssen einheitenlos sein. Deshalb ist es sinnvoll, den Inhalt und die implizite Einheit als Spaltenüberschrift zu ergänzen.

Funktionen zum Auslesen von Zwischenwerten mittels Interpolation

lineare Interpolation

Funktionsdef.

$$\eta_{H2O\_1}(t) := \mathrm{linterp}\left(\mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 0\rangle}, \mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 1\rangle}, t/°C\right)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$$

Splineinterpolation

Spline-Typ

$\mathrm{Typ} := 1$ *(1 = kubisch, 2 = parabolisch, 3 = linear)*

Berechnung der Spline-Parameter

$$\mathbf{p_{Sp}} := \left| \begin{array}{ll} \text{return } \mathrm{kspline}\left(\mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 0\rangle}, \mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 1\rangle}\right) & \text{if } \mathrm{Typ} = 1 \\ \text{return } \mathrm{pspline}\left(\mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 0\rangle}, \mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 1\rangle}\right) & \text{if } \mathrm{Typ} = 2 \\ \text{return } \mathrm{lspline}\left(\mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 0\rangle}, \mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 1\rangle}\right) & \text{if } \mathrm{Typ} = 3 \end{array} \right.$$

Die Möglichkeit, den Splinetyp zu variieren, soll nur zum Experimentieren animieren. Normalerweise wird nur eine Version gewählt.

Die Werte der Spline-Parameter sind an sich uninteressant. Sie werden nur als erster Parameter der Mathcad-Funktion "interp" benötigt.

Funktionsdef.

$$\eta_{H2O\_2}(t) := \mathrm{interp}\left(\mathbf{p_{Sp}}, \mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 0\rangle}, \mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 1\rangle}, t/°C\right)\cdot 10^{-3}\cdot\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$$

Abweichungsanalyse

Abweichung der linearen Interpolation von der Spline-Interpolation

prozentuelle Abweichung

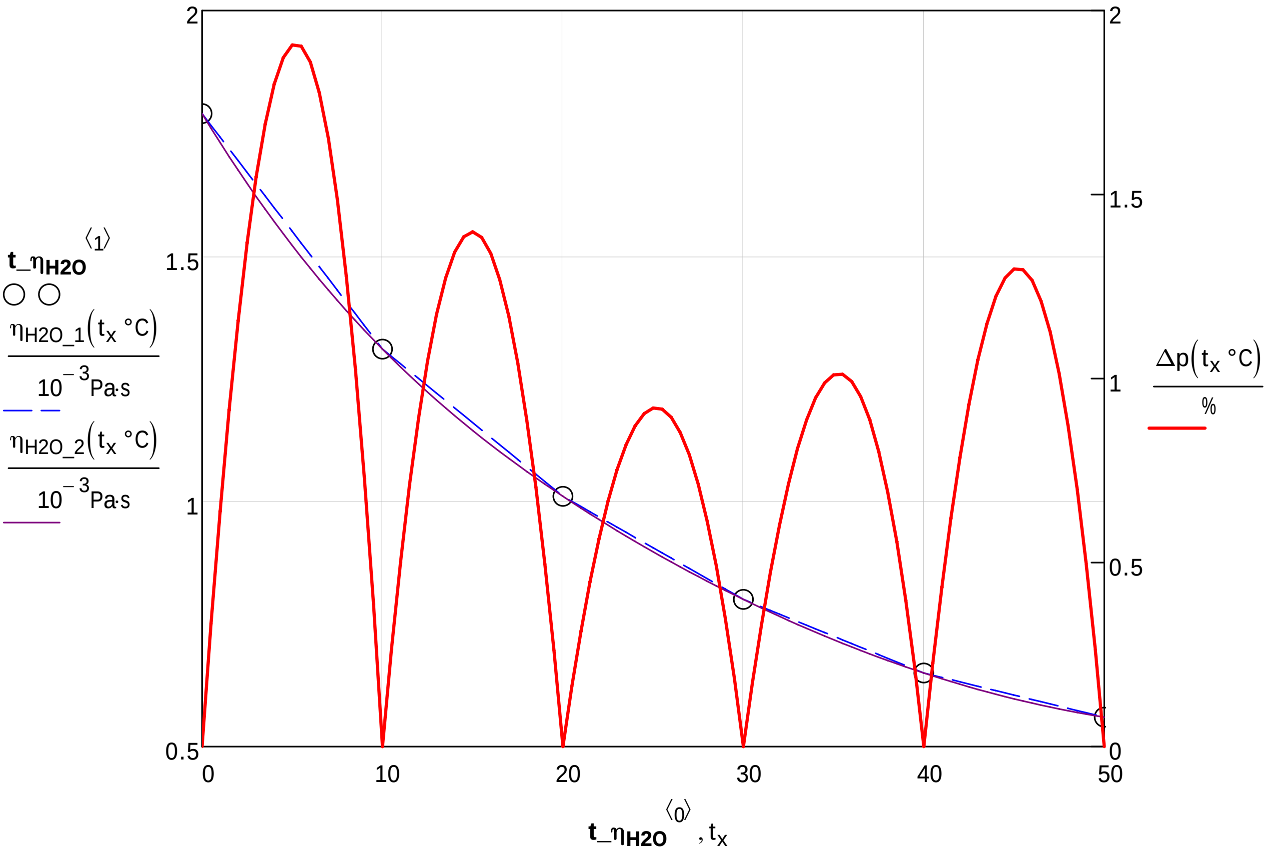
$$\Delta p(t) := \frac{\eta_{H2O\_1}(t) - \eta_{H2O\_2}(t)}{\eta_{H2O\_2}(t)}$$

Beispiel $t_W := 15\ °C$

$\eta_{H2O\_1}(t_W) = 1.16 \times 10^{-3} \cdot Pa \cdot s$ $\eta_{H2O\_2}(t_W) = 1.144 \times 10^{-3} \cdot Pa \cdot s$ $\Delta p(t_W) = 1.399 \cdot \%$

grafische Darstellung

Temp.-Bereich $t_u := \min\left(\mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 0 \rangle}\right)$ $t_o := \max\left(\mathbf{t\_\eta_{H2O}}^{\langle 0 \rangle}\right)$ $t_x := t_u, t_u + \frac{t_o - t_u}{100} .. t_o$



Die lineare Interpolation ergibt deutlich grobere Ergebnisse, die von der eleganten Splinefunktion erheblich abweichen, insbesondere dann, wenn die Tabellenwerte weit auseinander liegen und /oder die "wahre" Funktion eine starke Krümmung aufweiset.

Vorsicht!
Die Splinefunktion sollte immer optisch überprüft werden, denn manchmal liefert sie absurde Ergebnisse, wie das folgende Beispiel zeigt.

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 60 \\ 400 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 12.7 \\ 12.3 \\ 14.0 \\ 15.1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{spp} := \mathrm{lspline}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad y_{sp}(x) := \mathrm{interp}(\mathbf{spp},\mathbf{x},\mathbf{y},x)$$

$$y_{li}(x) := \mathrm{linterp}(\mathbf{x},\mathbf{y},x)$$

$$x := 6, 6 + \frac{400-6}{100} .. 400$$