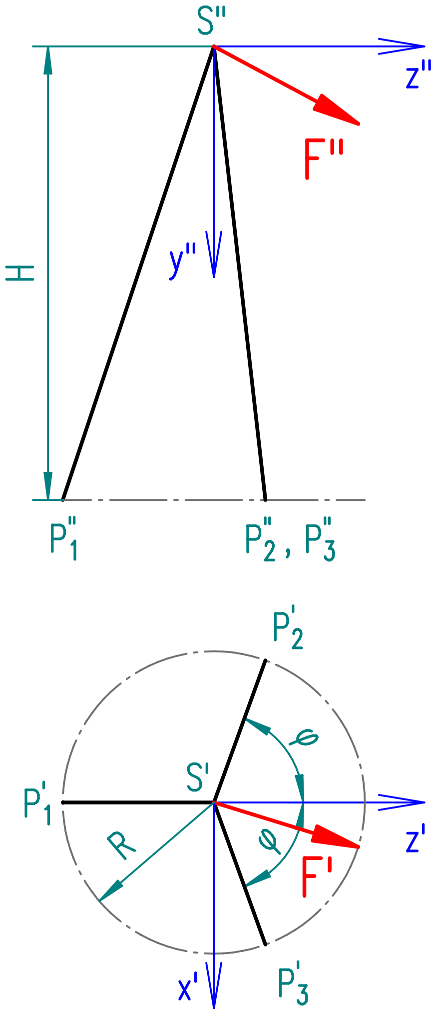
Dreibein mit Horizontalkraft; Kabus-Aufgabe 2.112



Angaben

$° := \text{Grad}$

Geometrie $H := 3m$ $R := 1m$ $\varphi := 70°$

Knotenkraft $F := 4000N$

Raumwinkel $\alpha := 75°$ zwischen F und x-Achse (In der Original-angabe sind beide Winkel 90°)

$\beta := 63°$ zwischen F und y-Achse

Gesucht sind die drei Stabkräfte.

Kraftvektor im Stabknoten S

$$\mathbf{F} := F \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \sqrt{1-\cos(\alpha)^2-\cos(\beta)^2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1035.276 \\ 1815.962 \\ 3410.35 \end{pmatrix} N$$

Die Formeln sind im Dokument zu den Rechenvorschriften beschrieben.

Merke: Wenn mehrere Kräfte bei S angreifen, werden sie zu einem Kraftvektor addiert!

Richtungsvektoren von der Spitze S zu den Stab-Fußpunkten P_i definieren

Ortsvektoren von P_i

$$\mathbf{P_1} := \begin{pmatrix} 0 \\ H \\ -R \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P_2} := \begin{pmatrix} -R\cdot\sin(\varphi) \\ H \\ R\cdot\cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P_3} := \begin{pmatrix} R\cdot\sin(\varphi) \\ H \\ R\cdot\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren der Stabkräfte

Die Stabkräfte zeigen in dieselbe Richtung wie die Ortvektoren. Deshalb sind deren Einheitsvektoren die Richtungsvektoren der Stabkräfte.

$$\mathbf{f_1} := \frac{\mathbf{P_1}}{|\mathbf{P_1}|} \qquad \mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.949 \\ -0.316 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f_2} := \frac{\mathbf{P_2}}{|\mathbf{P_2}|} \qquad \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} -0.297 \\ 0.949 \\ 0.108 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f_3} := \frac{\mathbf{P_3}}{|\mathbf{P_3}|} \qquad \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 0.297 \\ 0.949 \\ 0.108 \end{pmatrix}$$

Merke: Die Richtungsvektoren sind dimensionslos.

Stabkräfte aus dem Kräftegleichgewicht

Die Summe aus Stabkräften und der Kraft an der Spitze muss Null sein.

Gleichungs-system

$$f_{1x} \cdot F_1 + f_{2x} \cdot F_2 + f_{3x} \cdot F_3 = -F_x$$

detto für die Kräfte in y- und z-Richtung

oder in Vektor-Schreibweise

$$F_1 \cdot \mathbf{f_1} + F_2 \cdot \mathbf{f_2} + F_3 \cdot \mathbf{f_3} = -\mathbf{F}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem mit den 3 unbekannten Stabkräften F_1, F_2 und F_3, welches am elegantesten mittels Matrizenrechnung zu lösen ist.

Koeffizienten-matrix

$$\mathbf{A} := \mathrm{erweitern}(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}) \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -0.297 & 0.297 \\ 0.949 & 0.949 & 0.949 \\ -0.316 & 0.108 & 0.108 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Werten kann die Lösung auch mit dem Schultaschenrechner ermittelt werden!

Lösungs-vektor

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} := \mathbf{A}^{-1} \cdot (-\mathbf{F})$$

$\boxed{F_1 = 7548.158\,\mathrm{N}}$ $\boxed{F_2 = -2989.206\,\mathrm{N}}$ $\boxed{F_3 = -6473.144\,\mathrm{N}}$

Merke: Zugkräfte sind positiv, Druckkräfte negativ!

oder das Ganze in Kurzform

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} := \mathrm{erweitern}\left(\frac{\mathbf{P_1}}{|\mathbf{P_1}|}, \frac{\mathbf{P_2}}{|\mathbf{P_2}|}, \frac{\mathbf{P_3}}{|\mathbf{P_3}|}\right)^{-1} \cdot -\mathbf{F}$$

$F_1 = 7548.158\,\mathrm{N}$

$F_2 = -2989.206\,\mathrm{N}$

$F_3 = -6473.144\,\mathrm{N}$

Echt geil, was?!

$$\mathbf{F_1} := F_1 \cdot \mathbf{f_1} \qquad \boxed{\mathbf{F_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7160.812 \\ -2386.937 \end{pmatrix} \mathrm{N}}$$

$$\mathbf{F_2} := F_2 \cdot \mathbf{f_2} \qquad \boxed{\mathbf{F_2} = \begin{pmatrix} 888.263 \\ -2835.81 \\ -323.301 \end{pmatrix} \mathrm{N}}$$

$$\mathbf{F_3} := F_3 \cdot \mathbf{f_3} \qquad \boxed{\mathbf{F_3} = \begin{pmatrix} -1923.539 \\ -6140.964 \\ -700.111 \end{pmatrix} \mathrm{N}}$$

Probe

$$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -0 \\ -0 \\ -0 \end{pmatrix} \mathrm{N}$$

paaasst!