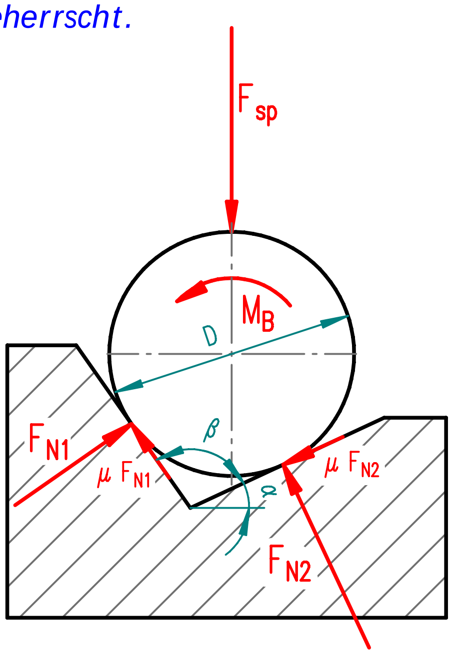
Lösung linearer Gleichungssysteme mittels Matrizenrechnung

In der Mechanik treten sehr oft lineare Gleichungssysteme auf. Das bekannteste Beispiel sind wohl die drei Gleichgewichtsbedingungen statisch bestimmter Objekte im allgemeinen ebenen Kräftesystem.

Die eleganteste Form solche Gleichungen zu lösen, ist zweifelsohne die Matrizenrechnung, die übrigens auch jeder vernünftige Schultaschenrechner beherrscht.



Ein Beispiel

$° := \mathrm{Grad}$

Ein zylinderisches Werkstück mit dem Durchmesser $D := 100mm$ wird durch ein Bearbeitungsmoment $M_B := 120N \cdot m$ belastet.
Wie groß muss die Spannkraft F_{sp} sein, damit das Werkstück im Prisma mit den Winkeln $\alpha := 25°$ sowie $\beta := 100°$ und der Reibungszahl $\mu_0 := 0.15$ sicher gespannt wird?

Gleichungssystem aufstellen

Es ist hilfreich, die Gleichungen so zu formulieren, dass die Unbekannten immer in der selben Reihenfolge angeschrieben werden.

Hilfswinkel $\gamma := 180° - \alpha - \beta$

$\Sigma M_{(M)} = 0$: $\frac{D}{2} \cdot \mu_0 \cdot F_{N1} + \frac{D}{2} \cdot \mu_0 \cdot F_{N2} = M_B$ *bzw.* $\boxed{\mu_0 \cdot F_{N1} + \mu_0 \cdot F_{N2} = \frac{2M_B}{D}}$

$\Sigma F_x = 0$: $\boxed{F_{N1} \cdot \left(\sin(\gamma) - \mu_0 \cdot \cos(\gamma)\right) - F_{N2} \cdot \left(\sin(\alpha) + \mu_0 \cdot \cos(\alpha)\right) = 0}$

$\Sigma F_y = 0$: $\boxed{F_{N1} \cdot \left(\cos(\gamma) + \mu_0 \cdot \sin(\gamma)\right) + F_{N2} \cdot \left(\cos(\alpha) - \mu_0 \cdot \sin(\alpha)\right) - F_{sp} = 0}$

Berechnung der Unbekannten mittels Matrizenrechnung

Koeffizientenmatrix

In der Koeffizientenmatrix werden die Koeffizienten (=Faktoren) der Unbekannten eingetragen.Dabei stehen die Koeffizienten einer Unbekannten immer schön untereinander.

Kommt eine Umbekannte in einer Gleichung nicht vor, wird als Koeffizient Null eingetragen.

Koeffizienten-matrix

$$\begin{array}{cccc} \text{Koeffizienten von} & F_{N1} & F_{N2} & F_{sp} \\ \mathbf{A} := & \left[\begin{array}{c} \mu_0 \\ \sin(\gamma) - \mu_0 \cdot \cos(\gamma) \\ \cos(\gamma) + \mu_0 \cdot \sin(\gamma) \end{array}\right. & \begin{array}{c} \mu_0 \\ -\left(\sin(\alpha) + \mu_0 \cdot \cos(\alpha)\right) \\ \cos(\alpha) - \mu_0 \cdot \sin(\alpha) \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right] \end{array}$$

Die Werte der Koeffizientenmatrix müssen alle dieselbe Einheit haben. Deshalb wurde die Momentengleichung durch D/2 dividiert!

Konstantenmatrix

In diesem Spaltenvektor werden die rechten Seiten, also die Ergebnisse der Gleichungen zusammengefasst.

Konstanten-matrix

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot M_B}{D} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung

Im Ergebnisvektor werden die Unbekannten in der selben Reihenfolge untereinander eingetragen, wie sie in der Koeffizientenmatrix nebeneinander stehen und mit folgender Formel berechnet:

Lösungs-vektor

$$\begin{pmatrix} F_{N1} \\ F_{N2} \\ F_{sp} \end{pmatrix} := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \qquad \boxed{F_{N1} = 6918.92\,\mathrm{N}} \qquad \boxed{F_{N2} = 9081.08\,\mathrm{N}} \qquad F_{sp} = 12473.256\,\mathrm{N}$$

Probe

$\Sigma M_{(M)} = 0$: $$\frac{D}{2} \cdot \mu_0 \cdot F_{N1} + \frac{D}{2} \cdot \mu_0 \cdot F_{N2} - M_B = 1.421 \times 10^{-14}\,\mathrm{N \cdot m}$$

$\Sigma F_x = 0$: $$F_{N1} \cdot \left(\sin(\gamma) - \mu_0 \cdot \cos(\gamma)\right) - F_{N2} \cdot \left(\sin(\alpha) + \mu_0 \cdot \cos(\alpha)\right) = -0\,\mathrm{N}$$

paaaaßt!

$\Sigma F_y = 0$: $$F_{N1} \cdot \left(\cos(\gamma) + \mu_0 \cdot \sin(\gamma)\right) + F_{N2} \cdot \left(\cos(\alpha) - \mu_0 \cdot \sin(\alpha)\right) - F_{sp} = 0\,\mathrm{N}$$

Allfällige minimale Abweichungen entstehen durch die begrenzte Rechengenauigkeit eines Computers.