Roland Pichler pc@htl-kapfenberg.ac.at

SRDP Aufgaben Cluster 3
Schwimmstabilität

Schwimmstabilität

Aufgabennummer: B-C3_09

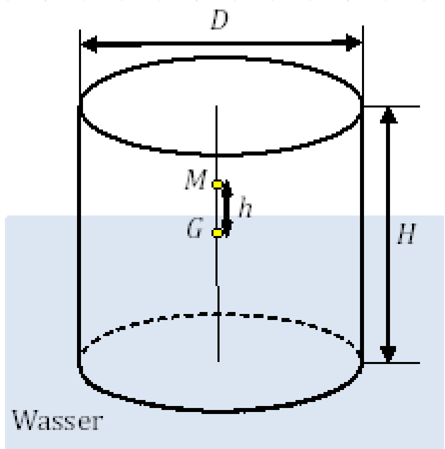
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Das Metazentrum *M* eines schwimmenden Körpers, z. B. eines Schiffs, ist für die Stabilität der Schwimmlage des Schiffs wichtig. Für eine stabile Schwimmlage liegt *M* oberhalb des Massenschwerpunkts *G*. Die Strecke von *G* zu *M* heißt metazentrische Höhe *h*.

Wir betrachten einen Drehzylinder.

Die Abhängigkeit der metazentrischen Höhe *h* vom Verhältnis *x* der Dichte des Schwimmkörpers zur Dichte der Flüssigkeit, in der der Körper schwimmt, kann durch die Funktion

$$h(x) = \frac{H}{16 \cdot k^2 \cdot x} - \frac{H \cdot (1-x)}{2}$$



beschrieben werden.

$x = \frac{\rho_Z}{\rho_F}$

ρ_Z .... Dichte des Drehzylinders

ρ_F .... Dichte der Flüssigkeit

$h(x)$ .... metazentrische Höhe in Längeneinheiten beim Verhältnis *x*

H .... Höhe des Zylinders in Längeneinheiten

$k = \frac{H}{D}$ ... Verhältnis der Zylinderhöhe zu dessen Durchmesser

a) In der Praxis wird meist die Funktion $f(x) = \dfrac{h(x)}{H}$ verwendet.

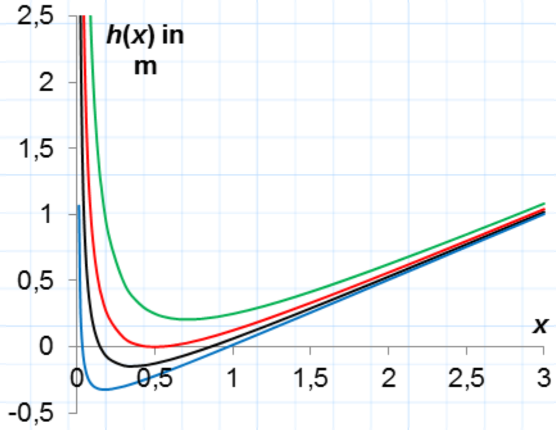
- Stellen Sie die Gleichung der schrägen Asymptote der Funktion *f* auf.
- Bestimmen Sie einen sinnvollen Definitionsbereich der Funktion *f*.
- Dokumentieren Sie allgemein, wie man Polstellen und alle möglichen Asymptoten einer gebrochen rationalen Funktion ermittelt.

b) – Ermitteln Sie diejenigen Dichteverhältnisse $x = \dfrac{\rho_Z}{\rho_F}$, für die der Massenschwerpunkt mit dem Metazentrum zusammenfällt.
Verwenden Sie dazu die Funktion *h* und betrachten Sie einen gleichseitigen Drehzylinder.

Wird die Schwimmlage durch eine äußere Kraft gestört, so stellt sich die alte Schwimmlage nach Ende der Störung wieder ein, wenn das Metazentrum *M* oberhalb des Massenschwerpunkts *G* liegt.

Die nachstehende Grafik stellt die Funktion $h(x) = \dfrac{H}{16 \cdot k^2 \cdot x} - \dfrac{H \cdot (1-x)}{2}$ mit *H*=1m für folgende Werte von *k* dar:

$k_1 = 1$, $k_2 = 0{,}5$, $k_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $k_4 = 2$



- Ordnen Sie den Funktionsgraphen den richtigen Wert von *k* zu.
- Lesen Sie ab, für welche Werte von *k* der Zylinder für alle Dichteverhältnisse *x* stabil schwimmt.
- Erklären Sie den Einfluss von *k* auf die Schwimmstabilität des Zylinders in der Flüssigkeit.

d) Die Eintauchtiefe *t* des Zylinders in die Flüssigkeit hängt ebenfalls vom Verhältnis $x = \dfrac{\rho_Z}{\rho_F}$ ab.
Laut archimedischem Prinzip gilt für einen schwimmenden Zylinder, dass die Masse des Zylinders gleich der Masse der verdrängten Flüssigkeit ist. Die Masse ist das Produkt aus Volumen und Dichte.

- Zeigen Sie, dass die Eintauchtiefe *t* mithilfe folgender Formel berechnet werden

– Zeigen Sie, dass die Eintauchtiefe t mithilfe folgender Formel berechnet werden kann: $t = x \cdot h_Z$. (h_Z ist die Höhe des Zylinders)

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Lösung zu a) 1. Teil

Für eine Asymptote as(x) zu einer Funktion f(x) gilt: $\lim_{x \to \infty} (f(x) - as(x)) = 0$, für $as(x) = \frac{x-1}{2}$ ist die Bedingung erfüllt.

$$f(x) := \frac{1}{16 \cdot k^2 \cdot x} - \frac{1-x}{2} \qquad as(x) := \frac{x-1}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} (f(x) - as(x)) \to 0$$

Lösung zu a) 2. Teil

$D_x = \mathbb{R}^+$(oder $D_x = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wenn man sich auf die Funktion *f* bezieht, ohne *x* als Dichteverhältnis zu betrachten)

Lösung zu a) 3. Teil

Zur Ermittlung der Polstellen einer gebrochen rationalen Funktion wird ihr Nenner N(x) null gesetzt und die Gleichung N(x) = 0 gelöst. (Der Zähler ist in diesen Stellen ungleich null.) In den Polstellen sind senkrechte Asymptoten.
Waagrechte und schräge Asymptoten (bzw. nicht lineare Asymptoten) erhält man durch Bestimmen (z. B. durch Polynomdivision) des ganzrationalen Anteils des Funktionsterms. Dieser ganzrationale Anteil ergibt dann im Sinne der obigen Definition die Asymptote.

Lösung zu b)

Für den gleichseitigen Drehzylinder ist $k := 1$.
Wenn der Massenschwerpunkt mit dem Metazentrum zusammenfällt, ist die metazentrische Höhe *h* null. Das heißt, man ermittelt die Nullstelle der Funktion $h(x) := \frac{H}{16 \cdot k^2 \cdot x} - \frac{H \cdot (1-x)}{2}$

$$h(x) = 0 \xrightarrow{solve,\, x} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85355 \\ 0.14645 \end{bmatrix}$$

Für $x_1 \approx 0{,}85$ und $x_2 \approx 0{,}15$ fällt der Massenschwerpunkt mit dem Metazentrum zusammen.

Lösung zu c) 1. Teil

grüner Graph: k = 0,5

roter Graph: $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

schwarzer Graph: k = 1

blauer Graph: k = 2

Lösung zu c) 2. Teil

Für $0 < k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ schwimmt der Zylinder für alle Dichteverhältnisse x stabil.

Lösung zu c) 3. Teil

Je größer k ist, d. h., je höher der Zylinder im Verhältnis zu seinem Durchmesser ist, desto kleiner ist der Bereich des stabilen Schwimmens.

Lösung zu d)

$$V_Z(D, h_Z) := \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot h_Z \qquad V_F(D, t) := \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot t$$

$$m_Z := V_Z(D, h_Z) \cdot \rho_Z \qquad m_F := V_F(D, t) \cdot \rho_F$$

$$m_Z = m_F \xrightarrow[]{\substack{solve, t \\ substitute, \frac{\rho_Z}{\rho_F} = x}} x \cdot h_Z$$