

Roland Pichler

pc@htl-kapfenberg.ac.at

SRDP Aufgaben Cluster 3 Luftdruck 2

Luftdruck 2

Aufgabennummer: B-C3_02

 Technologieeinsatz: möglich erforderlich

Die Beziehung zwischen Luftdruck p und Höhe h lässt sich bei konstanter Temperatur mit der folgenden Gleichung beschreiben:

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p \quad \text{mit } k > 0$$

p ... Luftdruck in Hektopascal (hPa)

h ... Höhe in Metern (m)

- a. – Erklären Sie, wie man diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennung der Variablen* zur allgemeinen Lösung $p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$ führt.
- b. Der Luftdruck wird am selben Tag zur selben Zeit an 2 verschiedenen Stationen gemessen:
 - * in Villach (500 m über dem Meeresspiegel) wird ein Druck $p = 962$ hPa gemessen
 - * auf dem Dobratsch, einem Berg nahe Villach (2 167 m über dem Meeresspiegel), ergibt die Messung $p = 790$ hPa.
 - Berechnen Sie mit diesen Angaben und anhand der in a) angegebenen allgemeinen Lösung die spezielle Lösung für die Differenzialgleichung.
- c. Messungen in der Atmosphäre haben ergeben, dass der Luftdruck bei einer Höhenzunahme von 5 500 m ziemlich genau auf jeweils den halben Wert sinkt.
 - Geben Sie, ausgehend von $p(500) = 962$ hPa, den Luftdruck für 6 000 m und für 11 500 m an und erstellen Sie eine quadratische Funktion durch diese 3 Wertepaare.
 - Vergleichen Sie den berechneten Wert der quadratischen Näherungsfunktion für $h = 2 167$ m mit dem Messwert für den Dobratsch.
 - Geben Sie ungefähr an, in welchem Bereich die quadratische Näherung für die Beschreibung der Druckabhängigkeit von der Höhe sinnvoll ist.

Hinweis zur Aufgabe:

Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

SRDP Aufgaben Cluster 3, Luftdruck 2

Lösung zu a.

Die Variablen p und h werden getrennt:

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p \qquad \frac{dp}{p} = -k \cdot dh$$

Die Integration beider Seiten liefert, wobei $\ln(C)$ die nunbestimmte Integrationskonstante ist (dies deshalb, da nach Auflösen der Gleichung mit Mathcad die gewünschte Darstellung erhalten wird) :

$$\int \frac{1}{p} dp = -k \cdot \int 1 dh + \ln(C) \rightarrow \ln(p) = \ln(C) - h \cdot k \xrightarrow{\text{solve, } p} C \cdot e^{-(h \cdot k)}$$

d. h: $p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$

Lösung zu b.

Für die weitere Rechnung definiert man:

$$p(h) := C \cdot e^{-k \cdot h} \qquad hPa := 10^2 Pa$$

Zur Bestimmung von k und C verwendet man die Daten der Angabe.
Man erhält das folgende Gleichungssystem:

$$p(500 \text{ m}) = 962 \text{ hPa} \rightarrow C \cdot e^{-500 \cdot m \cdot k} = 96200 \cdot Pa$$

$$p(2167 \text{ m}) = 790 \text{ hPa} \rightarrow C \cdot e^{-2167 \cdot m \cdot k} = 79000 \cdot Pa$$

Gleichungslösungsbedingungen

$$k := \frac{1}{m} \quad C := 100 \text{ hPa} \qquad \text{Startwerte}$$

$$C \cdot e^{-500 \cdot m \cdot k} = 96200 \cdot Pa$$

die beiden Gleichungen

$$C \cdot e^{-2167 \cdot m \cdot k} = 79000 \cdot Pa$$

$$\begin{bmatrix} C \\ k \end{bmatrix} := \text{find}(C, k) = \begin{bmatrix} (1.021 \cdot 10^5) \frac{kg}{m \cdot s^2} \\ (1.182 \cdot 10^{-4}) \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

find ist das Schlüsselwort
für die numerische Lösung

$$C = 1.02055 \text{ bar}$$

$$k = (1.182 \cdot 10^{-4}) \frac{1}{m}$$

SRDP Aufgaben Cluster 3, Luftdruck 2

Lösung zu c. 1. Teil

Zugrundegelegt wird ein Polynom 2. Grades: $Pol(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

h (m)	p (hPa)
500	962
6000	481
11500	240.5

$$\begin{cases} Pol(h_0) = p_0 \\ Pol(h_1) = p_1 \\ Pol(h_2) = p_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 250000 \cdot a \cdot m^2 + 500 \cdot b \cdot m + c = 96200 \cdot Pa \\ 36000000 \cdot a \cdot m^2 + 6000 \cdot b \cdot m + c = 48100 \cdot Pa \\ 132250000 \cdot a \cdot m^2 + 11500 \cdot b \cdot m + c = 24050.0 \cdot Pa \end{cases}$$

$$[a \ b \ c] := \begin{cases} Pol(h_0) = p_0 \\ Pol(h_1) = p_1 \\ Pol(h_2) = p_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{solve, a, b, c, float, 3}} \left[\frac{0.000398 \cdot Pa}{m^2} \quad -\frac{11.3 \cdot Pa}{m} \quad 101765.0 \cdot Pa \right]$$

$$[a \ b \ c] = \left[(3.98 \cdot 10^{-6}) \frac{1}{m^2} \quad -0.113 \frac{1}{m} \quad 1.0177 \cdot 10^3 \right] hPa$$

Lösung zu c. 2. Teil

$$p(h) := C \cdot e^{-k \cdot h}$$

$$p(2167 \text{ m}) = 790 \text{ hPa}$$

$$Pol(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c \xrightarrow{\text{float, 3}} 101765.0 \cdot Pa - \frac{11.3 \cdot x \cdot Pa}{m} + \frac{0.000398 \cdot x^2 \cdot Pa}{m^2}$$

$$Pol(2167 \text{ m}) = 791.47 \text{ hPa}$$

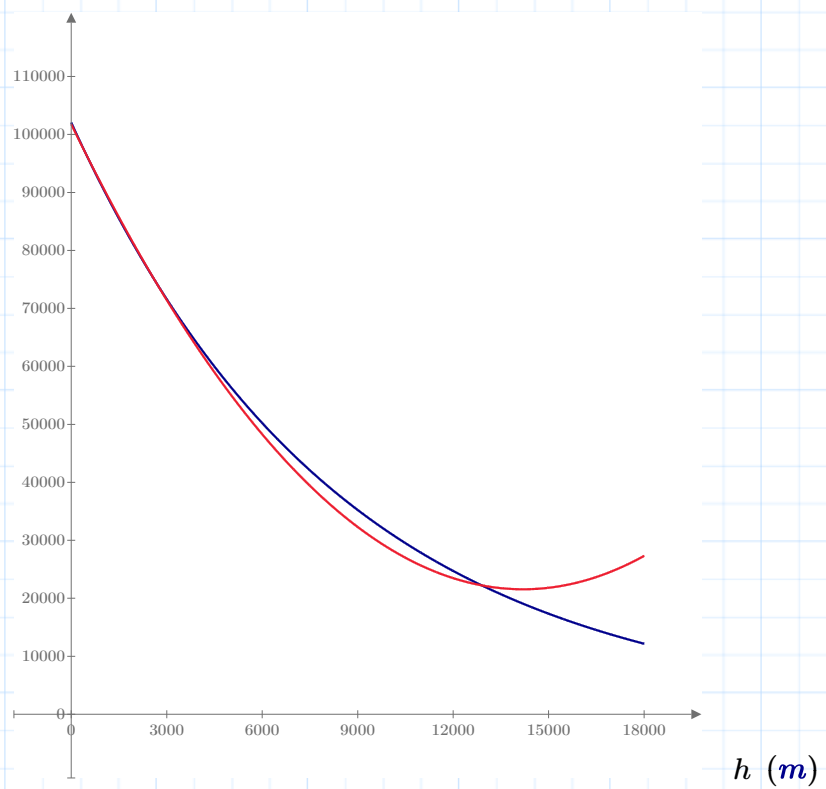
SRDP Aufgaben Cluster 3, Luftdruck 2

Graphische Darstellung der beiden Funktionen $p(x)$ und $Pol(x)$

$$h := 0 \text{ m}, 1 \text{ m} \dots 18000 \text{ m}$$

$$p(h) \left(\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} \right)$$

$$Pol(h) \left(\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} \right)$$



Lösung zu c. 1. Teil

Die Näherungsfunktion versagt auf jeden Fall ab dem lokalen Minimum der quadratischen Funktion.

Bei Höhenwerten, die größer als das Minimum (ab $h \approx 14\,230 \text{ m}$) sind, würde der Druck mit zunehmender Höhe ansteigen.