Roland Pichler pc@htl-kapfenberg.ac.at

SRDP Aufgaben Cluster 3
Flugrouten

Flugrouten

Aufgabennummer: B-C3_01

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zwei Flugzeuge fliegen mit konstanter Geschwindigkeit auf geradlinigem Kurs.
Das erste Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0\ s$ im Ursprung des gewählten Koordinatensystems, zum Zeitpunkt t_1 = 3 s ist es in $P = (7|-4|9)$.
Das zweite Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0\ s$ in $Q = (1|21|-12)$ und zum Zeitpunkt t_1 = 3 s in $R = (4|12|-3)$.
Für alle Koordinatenangaben gilt: 1 Einheit entspricht 10 m.

a. – Stellen Sie die beiden Geradengleichungen auf, die die jeweiligen Positionen der Flugzeuge in Abhängigkeit von der Zeit t beschreiben.
– Zeigen Sie, dass sich die beiden Flugzeuge nicht auf Kollisionskurs befinden. (Zu zeigen ist, dass sich die beiden Kurse nicht schneiden.)

b. – Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit in km/h das erste Flugzeug fliegt.
– Erklären Sie, was man über die Modellierung der Geschwindigkeit und der Richtung eines Flugzeugs sagen kann, wenn der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ des Flugzeugs mit einer reellen Zahl $k \neq 0$, $|k| < 1$ multipliziert wird.

c. Die Funktion f beschreibt den Abstand zweier anderer Flugzeuge voneinander in Abhängigkeit von der Zeit t.

$$f(t) = \sqrt{(1+t)^2 + (21-3\cdot t)^2 + (-12+3\cdot t)^2}$$

t ... Zeit nach Beginn der Betrachtung in s
$f(t)$ ... Abstand der beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt t

– Stellen Sie die Funktion f in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch dar.

Beträgt der Abstand der beiden Flugzeuge weniger als 50 m, spricht man von einer Kollision.

– Überprüfen Sie anhand der von Ihnen erstellten Grafik, ob die beiden Flugzeuge kollidieren.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

SRDP Aufgaben Cluster 3, Flugrouten

Lösung zu a. 1. Teil

$$OP := \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad OQ := \begin{bmatrix} 1 \\ 21 \\ -12 \end{bmatrix} \qquad OR := \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$OX_{F1} := OP \cdot t \rightarrow \begin{bmatrix} 7 \cdot t \\ -4 \cdot t \\ 9 \cdot t \end{bmatrix} \qquad OX_{F2} := OQ + t \cdot (OR - OQ) \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \cdot t + 1 \\ 21 - 9 \cdot t \\ 9 \cdot t - 12 \end{bmatrix}$$

Kurs des ersten Flugzeugs
Geradengleichung der Position

Kurs des zweiten Flugzeugs
Geradengleichung der Position

Lösung zu a. 2. Teil

Sollten die beiden Flugzeuge auf Kollisionskurs sein,

müsste das Gleichungssystem $\begin{bmatrix} 7 \cdot t \\ -4 \cdot t \\ 9 \cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot t + 1 \\ 21 - 9 \cdot t \\ 9 \cdot t - 12 \end{bmatrix}$ eine Lösung für t besitzen

$$\begin{bmatrix} 7 \cdot t \\ -4 \cdot t \\ 9 \cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot t + 1 \\ 21 - 9 \cdot t \\ 9 \cdot t - 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{solve, t} undefined$$

$undefined$ bedeutet, dass kein t existiert, welches alle 3 Gleichungen löst, daher befinden sich die beiden Flugzeuge nicht auf Kollisionskurs.

Bemerkung:

Das folgende Gleichungssystem liefert einen Wert für t, d. h. die beiden zugrundegelegten Geraden schneiden einander

$$\begin{bmatrix} 7 \cdot t \\ -4 \cdot t \\ 9 \cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot t + 1 \\ 21 - 88 \cdot t \\ 3 \cdot t + \frac{6}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{solve, t} \frac{1}{4}$$

Lösung zu b. 1. Teil

$LE := 10 \cdot m$ Einheitenumrechnung: 1 Längeneinheit beträgt 10 m

$\Delta t := 3\ s$ Zeitdauer zur Berechnung der Geschwindigkeit v des ersten Flugzeugs

$\Delta s := |OP| \cdot LE$ Wegstrecke, die das erste Flugzeug während der ersten 3 Sekunden zurücklegt

$\Delta s = 120.83\ m$

$v := \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ Gescheindigkeit v des ersten Flugzeugs

$v = 40.277\ \dfrac{m}{s}$ $v = 145\ \dfrac{km}{hr}$

Lösung zu b. 2. Teil

$k \cdot v$ … v ist die Geschwindigkeit eines Flugzeugs

$0 < k < 1$ … die Geschwindigkeit ist kleiner als $|v|$

$-1 < k < 0$ … die Geschwindigkeit ist kleiner als $|v|$ und das Flugzeug fliegt in die entgegengesetzte Richtung

SRDP Aufgaben Cluster 3, Flugrouten

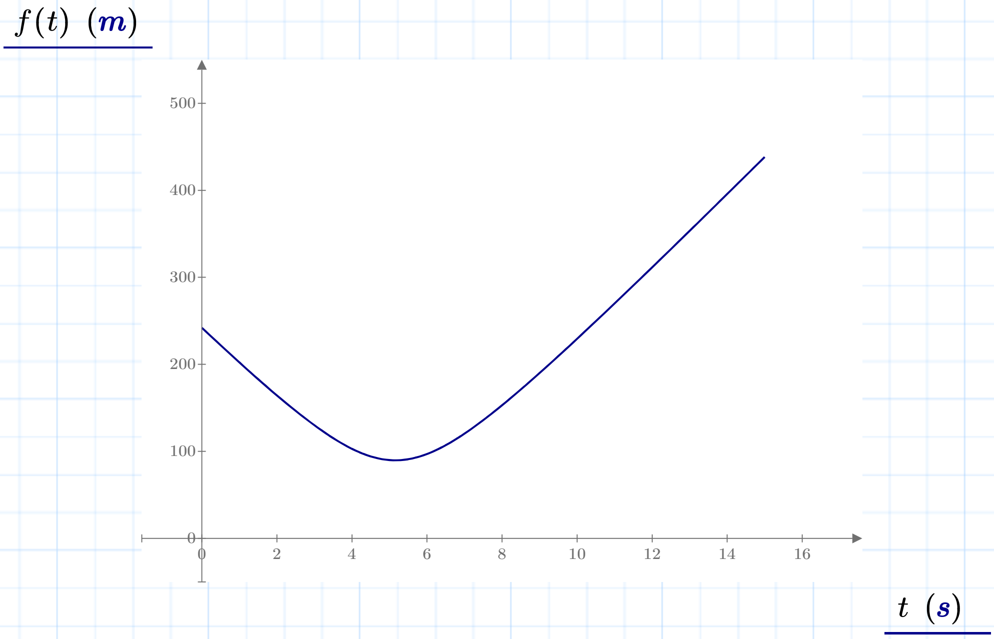
Lösung zu c. 1. Teil

$$f(t):=\sqrt{\left(1\ m+1\ \frac{m}{s}\ t\right)^2+\left(21\ m-3\ \frac{m}{s}\cdot t\right)^2+\left(-12\ m+3\ \frac{m}{s}\cdot t\right)^2}\cdot\frac{LE}{m}$$

Definition der Abstandsfunktion (mit Einheiten). Dire Multiplikation mit $\frac{LE}{m}$ berücksichtigt den Skalierungsfaktor LE. Division durch m macht den Faktor dimensionslos

$$t:=0\ s, 0.1\ s..15\ s$$

Definitionsbereich (Zeitbereich) für die graphische Darstellung der Abstandsfunktion



Lösung zu c. 2. Teil

Aus der Grafik kann man ablesen, dass der minimale Abstand bei ca. 100 m liegt, daher tritt keine Kollision auf.