Dipl.-Ing. Paul MOHR *E-Brief: p.mohr@eduhi.at*

reibungsgedämpfte Schwingung

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  reibungsgedämpfte Schwingung; numerische Lösung einer Differentialgleichung mittels programmierter Funktionen

- Kurzzusammenfassung

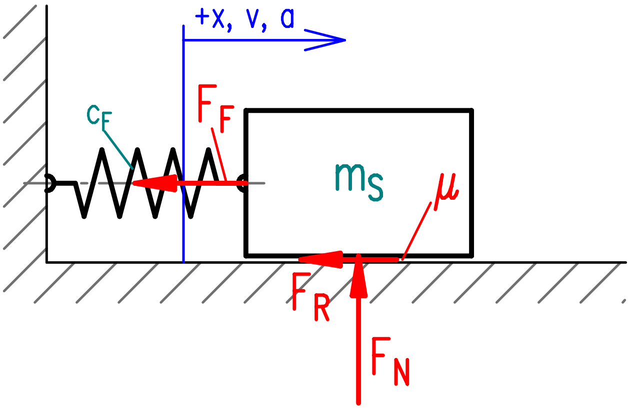
  Anhand einer reibungsgedämpften Schwingung wird gezeigt, wie Differentialgleichungen, die im Rahmen der HTL-Mathematik nicht gelöst werden können und bei denen auch die Näherungsfuntionen von Mathcad scheitern, durch schrittweise Berechnung mittels programmierter Funktionen zu sehr anschaulichen Ergebnissen führen.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Mechanik, Schwingungen, 5. Jg. HTL-Maschinenbau;
  Mathematik, allgemeiner numerischer Lösungsansatz für "unlösbare" Differentialgleichungen

- Mathcad-Version:

  Mathcad 11 (Weils immer noch die stabilste Version ist.)



Angaben

Die Masse m_S wird durch eine Feder mit der Federrate c_F zum Schwingen gebracht und durch die Reibung zwischen der Masse und dem Untergrund mit dem Reibungskoeffizienten μ gedämpft.
Die Ausgangssituatin ist durch die Auslenkung x_0 und die Anfangsgesschwindigkeit v_0 gegeben.

$m_S := 2\text{kg}$ $\quad c_F := 1.4\dfrac{\text{N}}{\text{mm}}$ $\quad \mu := 0.1$

$x_0 := 12\text{mm}$ $\quad v_0 := 0\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Differentialgleichung

Aus dem Ansatz lt. Newton ... $\quad F_F + F_R = m_S \cdot a \quad$ *mit* $\quad F_F = -(c_F \cdot x)$ *Die Federkraft wirkt gegen die pos. Auslenkung.*

$F_R = -(\mu \cdot m_S \cdot g \cdot \text{sign}(v))$ *Die Reibkraft wirkt gegen die Geschwindigkeit.*

... ergibt sich die Differentialgl. $\quad a - \dfrac{F_F + F_R}{m_S} = 0 \quad$ *bzw.*

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{c_F}{m_S}\cdot x + \mu \cdot g \cdot \text{sign}\left(\frac{d}{dt}x\right) = 0$$

Diese Differentialgleichung ist weder analytisch noch näherungsweise mit der Mathcad- Funktion "Gdglösen" lösbar!

schrittweise Berechnung der kinematischen Paramerter

Ein Ansatz zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen, der immer funktioniert, ist die schrittweise Berechnung in sehr kleinen Inkrementen.

Zeitinkrement der Berechnung

$dt := 10^{-4}s$

bestimmt die Genauigkeit und die Rechenzeit

Programm zur Berechnung von x, v und a nach einer Zeit von t_D.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f\_xva}(x_0, v_0, t_D) := \;& t \leftarrow 0 \cdot s \\
& x \leftarrow x_0 \\
& v \leftarrow v_0 \\
& a \leftarrow -\left(\frac{c_F \cdot x}{m_S} + g \cdot \mu \cdot \mathrm{sign}(v)\right) \\
& \text{while } t < t_D \\
& \quad t \leftarrow t + dt \\
& \quad x \leftarrow x + v \cdot dt \\
& \quad v \leftarrow v + a \cdot dt \\
& \quad a \leftarrow -\frac{c_F \cdot x}{m_S} - g \cdot \mu \cdot \mathrm{sign}(v) \\
& \text{return } \begin{pmatrix} \frac{x}{m} & \frac{v}{\frac{m}{s}} & \frac{a}{\frac{m}{s^2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Anfangswerte für die Auslenkung, Geschwindigkeit und Zeit

Schleife zur schrittweisen Abarbeitung der Schwingungsdauer

neue Werte für die Beschleunigung, die Auslenkung, die Geschwindigkeit und Zeit berechnen

Schwingungsparameter am Ende der Schwingungsdauer; Die Werte sind ohne Einheiten, weil verschiedene Einheiten in einem Vektor nicht erlaubt sind.

Zahlenbeispiel

Schwingungsdauer

$t_D := 0.2s$

Schwingungsparameter nach t_D

$\mathbf{xva} := \mathbf{f\_xva}(x_0, v_0, t_D)^T$

Das Ergebnis wird transponiert, um die Einzelwerte mit einem Index auslesen zu können.

$x_D := \mathbf{xva}_0\, m$ $\qquad x_D = 2.909\, mm$

$v_D := \mathbf{xva}_1 \frac{m}{s}$ $\qquad v_D = 0.174 \frac{m}{s}$

$a_D := \mathbf{xva}_2 \frac{m}{s^2}$ $\qquad a_D = -3.017 \frac{m}{s^2}$

Die Werte der Schwingungsparameter nach einer bestimmten Schwingungsdauer sagen eigentlich nicht viel aus. Erst der zeitliche Verlauf lässt gezielte Aussagen zu.

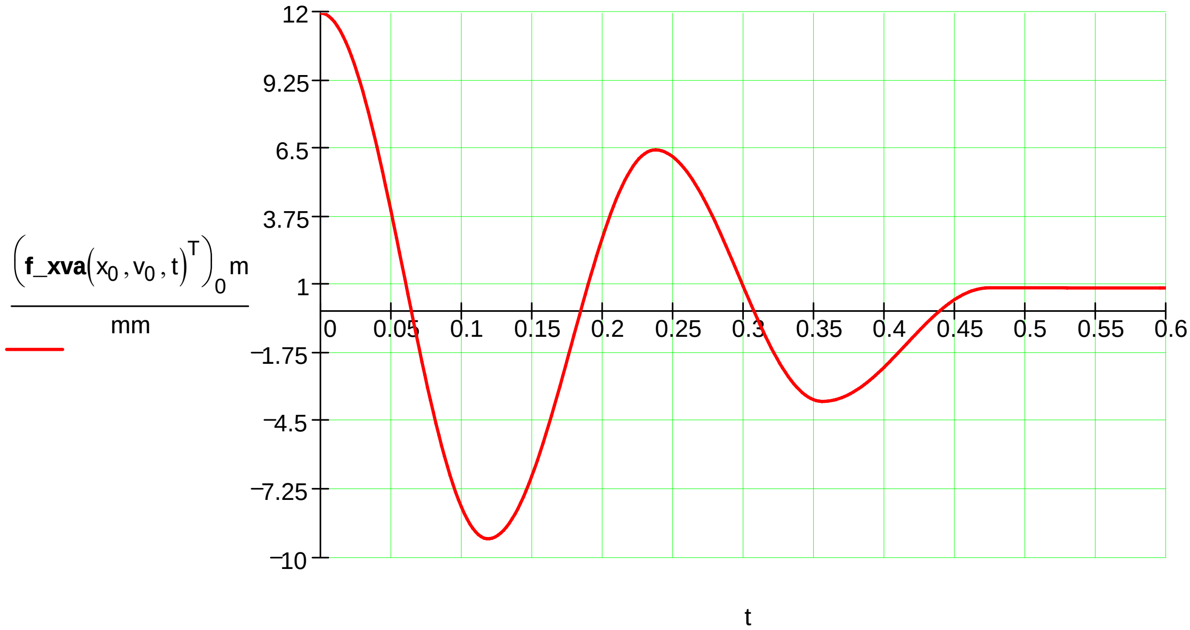
Verlauf der Schwingungsparameter über der Zeit

Schwingzeit als Laufvariable $t_D := 0.6s$ $Schritte := 300$ $t := 0, \frac{t_D}{Schritte} .. t_D$

einfache Lösung

einfache aber langsame Lösung *hier am Beispiel des Schwingungsausschlages*

Die einfachste Möglichkeit, die Werte als Funktion der Zeit darzustellen, ist der Aufruf der Funktion f_xva für die Werte einer Zeit-Laufvariablen.



Der Funktionsplot funktioniert einwandfrei. Allerdings dauert die Berechnung sehr lange, weil die Funktion f_xva für jeden Wert von t von vorne (x_0 und v_0) zu rechnen beginnt.

Für das v-t- und a-t-Diagramm mit den Indizes 1 und 2 (statt der Null) läuft die ganze Rechnerei erneut ab!

einfache Lösung

getunte Lösung

getunte aber komplizierte Lösung

Die Werte für den nächsten Datenpunkt lassen sich aus den Werten des vorherigen als Startwerte und der Dauer eines Zeitschrittes als Schwingungsdauer berechnen.

Zu diesem Zweck basteln wir eine weitere Funktion, die eine Tabelle ausgibt, die pro Zeitschritt eine Zeile enthält, in der die Fortschrittszeit t, die Auslenkung x, die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a festgehalten werden.

Die Werte werden ohne Einheiten ausgegeben, weil Mathcad in einer Matrix keine unterschiedlichen Einheiten zulässt. Die impliziten Einheiten werden im kg-m-s-System berechnet.

Funktion zur Berechnung der Tabelle der Diagramm-Werte

$$\mathbf{f\_txvaFill}(x_0, v_0, t_{ges}, steps) := \left| \begin{array}{l} t_{step} \leftarrow \dfrac{t_{ges}}{steps} \\ \mathbf{txva} \leftarrow \text{erweitern}(0, \mathbf{f\_xva}(x_0, v_0, 0s)) \\ \text{for } i \in 0..\ steps - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow \mathbf{txva}_{i,1}\, m \\ v \leftarrow \mathbf{txva}_{i,2} \dfrac{m}{s} \\ t \leftarrow (i+1) \cdot t_{step} \\ \mathbf{txva} \leftarrow \text{stapeln}\left(\mathbf{txva}, \text{erweitern}\left(\dfrac{t}{s}, \mathbf{f\_xva}(x, v, t_{step})\right)\right) \end{array} \right. \\ \text{return } \mathbf{txva} \end{array} \right.$$

Zeitschritt berechnen

Tabelle für t_{ges} = 0s initialisieren.

Schleife über alle Zeitschritte

Startwerte für nächsten Zeitschritt aus den Werten des vorherigen Zeitschrittes auslesen.

Fortschrittszeit berechnen

neue Werte zu Tab. hinzufügen

Tabelle für eine bestimmte Anzahl von Schritten berechnen

Tabelle mit allen Werten

$$\mathbf{txva} := \mathbf{f\_txvaFill}(x_0, v_0, t_D, \text{Schritte})$$

Fortschr.-Zeit t in s — *Auslenk. x in m* — *Geschw. v in m/s* — *Beschl. a in m/s²*

txva =

	0	1	2	3
0	0	0.012	0	-8.4
1	$2 \cdot 10^{-3}$	0.012	-0.015	-7.409
2	$4 \cdot 10^{-3}$	0.012	-0.03	-7.379
3	$6 \cdot 10^{-3}$	0.012	-0.044	-7.327

pro Zeitschritt eine Zeile

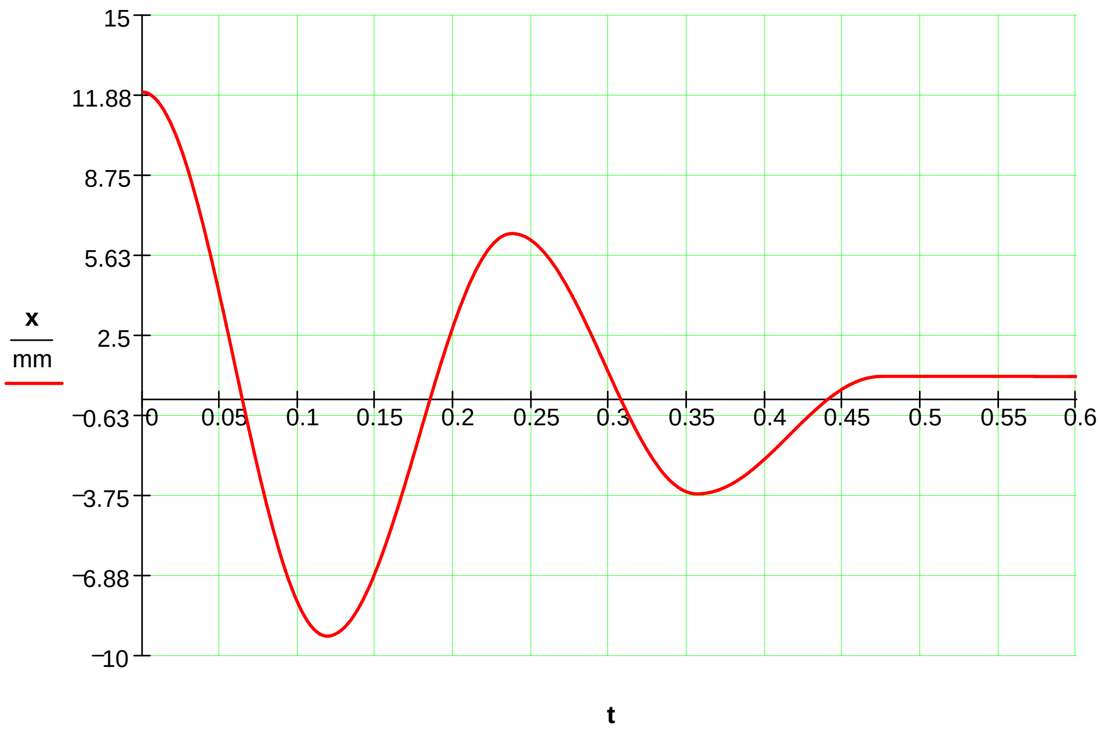
usw.

Tabellen der einzelnen Parameter

$$\mathbf{t} := \mathbf{txva}^{\langle 0 \rangle} s \qquad \mathbf{x} := \mathbf{txva}^{\langle 1 \rangle} m \qquad \mathbf{v} := \mathbf{txva}^{\langle 2 \rangle} \frac{m}{s} \qquad \mathbf{a} := \mathbf{txva}^{\langle 3 \rangle} \frac{m}{s^2}$$

Hier werden die Einheiten wieder hinzugefügt.

grafische Darstellung des Schwingungsausschlages



Das Ergebnis ist gleich wie bei der einfachen Lösung, es wird aber in einem Bruchteil der Zeit berechnet! Außerdem werden gleichzeitig die Geschwindigkeits- und Beschleunigungswerte berechnet.

Abnahme der Amplitude

Amplitude am Anfang	$x_0 = 12\,\mathrm{mm}$	*lt. Angabe*
... nach erster Halbschwingung	$x_1 := -9.198\mathrm{mm}$	*aus Diagramm gemessen*
... nach zweiter Halbschwingung	$x_2 := 6.393\mathrm{mm}$	*aus Diagramm gemessen*

Abnahmen der Ampl.

$\Delta x_{01} := x_0 - |x_1|$ $\quad \Delta x_{01} = 2.802\,\mathrm{mm}$

$\Delta x_{12} := |x_1| - x_2$ $\quad \Delta x_{12} = 2.805\,\mathrm{mm}$

(fast genau) gleiche Abnahme der Amplitude pro Halbschwingung

Die Abnahme der Aplitude pro Halbschwingung lässt sich sehr schön mit Hilfe des Energieerhaltunssatzes beweisen.
Nachdem die Geschwindigkeit am Ende jeder Halbschwingung Null ist, muss die Federenergie am Anfang minus der Reibungsarbeit gleich der Federenergie am Ende der Halbschwingung sein.

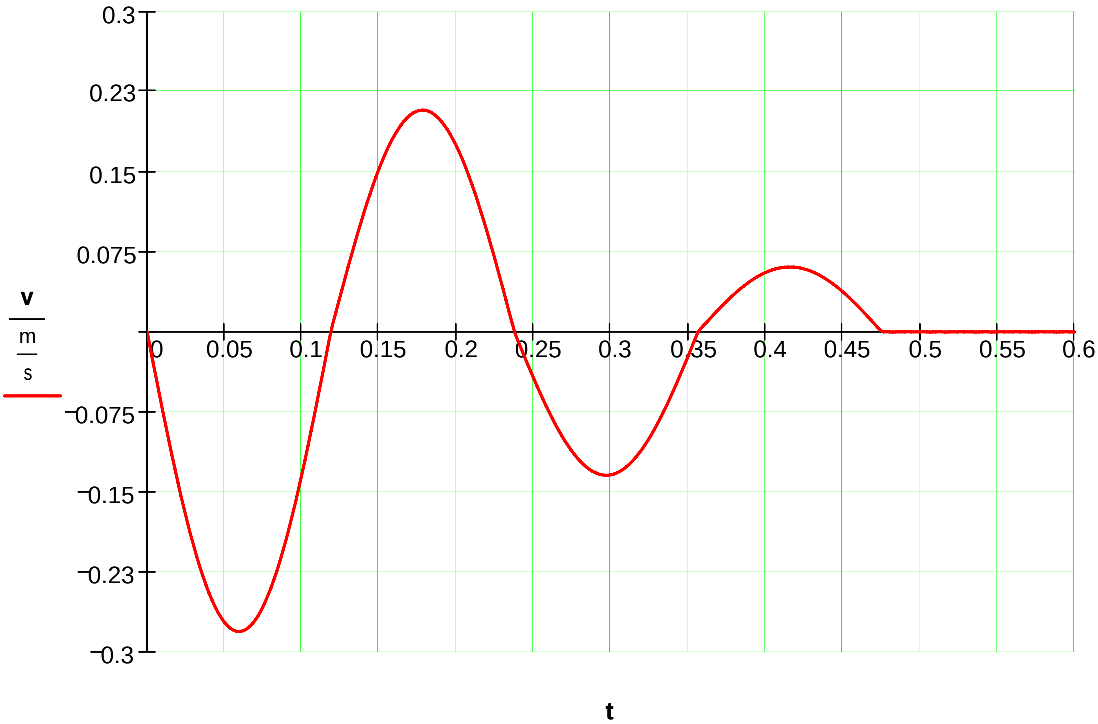
$$c_F \cdot \frac{x_0^{\,2}}{2} - F_R \cdot \left(|x_0| + |x_1|\right) = c_F \cdot \frac{x_1^{\,2}}{2} \quad \textit{mit} \quad x_1 = x_0 - \Delta x \quad \textit{und} \quad F_R := \mu \cdot m_S \cdot g$$

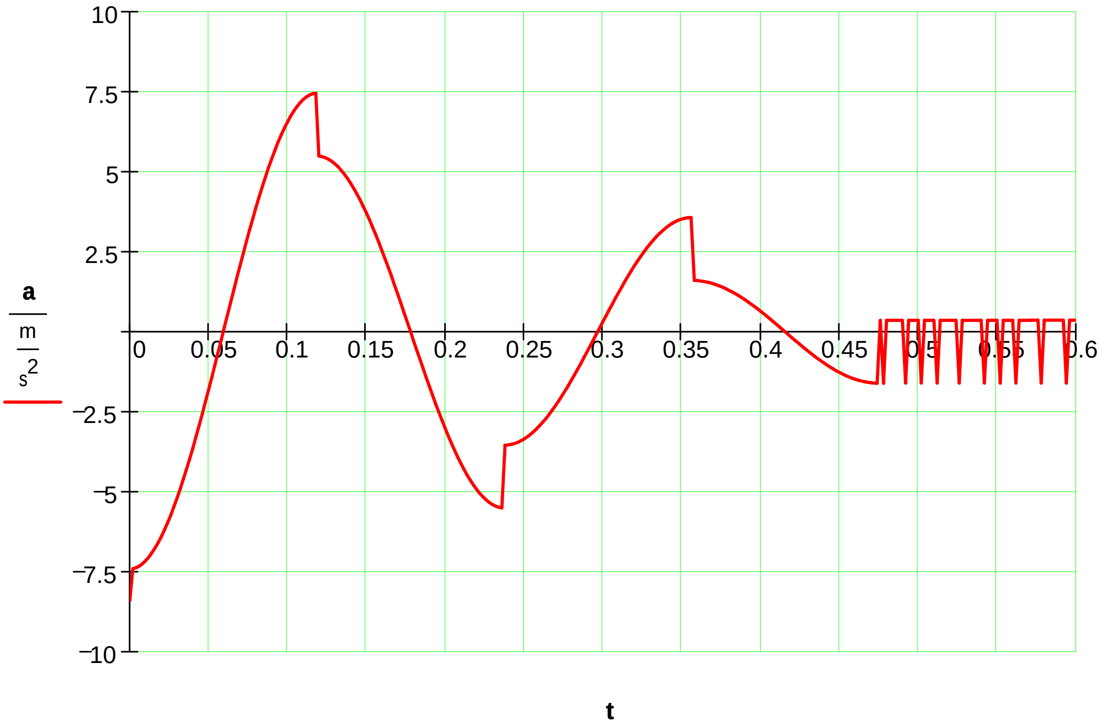
Nach einer hier nicht ausgeführten Umformerei erhält man als Lösung:

$\Delta x := \frac{2F_R}{c_F}$ $\quad \Delta x = 2.802\,\mathrm{mm}$

Das numerische Ergebnis stimmt genau mit dem analytischen überein!

grafische Darstellung des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlaufes *(weil's so schön ist :-))*





Die Sprünge nach jeder Halbschwingung rühren daher, dass der Beschleunigungsanteil von F_R / m_S durch den Richtungswechsel schlagartig das Vorzeichen wechselt.

Das Gezucke nachdem nach ca. 0.47s, die Schwingung zum Erliegen gekommen ist, entsteht dadurch, dass die Geschwindigkeit rechnerisch auf Grund der Rechen(un)genauigkeiten nie ganz Null wird.

Im v-t-Diagramm macht sich das durch einen Knick nach jedem Nulldurchgang bemerkbar. Das bedeutet aber auch, dass die x-t-Funktion - wer hätte das gedacht - nicht stetig ist!.

getunte Lösung