DI Dr. techn. Klaus LEEB

Schwingungen:Unwuchterregung - Berechnung mit Runge Kutta-Verfahren

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Schwingungen: fremderregte gedämpfte Schwingung
  Lösung der Differenzialgleichung 2.Ordnung (Schwingungsgleichung) numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren. Darstellung des Frequenzganges.

- Kurzzusammenfassung

  Betrachtet wird eine Maschine mit Unwucht (z.B. Waschmaschine, Drehbank, Wuchtmaschine), die auf Federn gelagert und mit einem geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer gedämpft ist.

  Es soll das Schwingungsverhalten untersucht werden.
  Dies erfolgt durch eine numerische (statt analytische) Berechnung mit dem Runge-Kutta-Verfahren.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  1) Mechanik: Aufstellen der Schwingungsgleichung
  2) Numerik: Lösen dieser Differenzialgleichung
  3) Darstellung der Schwingung und des Einschwingvorganges
  4) Darstellung des Freuquenzganges und Analyse desselben

  Zeitaufwand: Ein gut vorbereiteter Schüler dürfte für diese Analyse unter verwendung von zugelassenen Unterlagen in etwa 2 h benötigen.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Fachtheorie: Mechanik / Abteilung für Maschineningenieurwesen

- Mathcad-Version: **Mathcad 14**
- Literaturangaben:

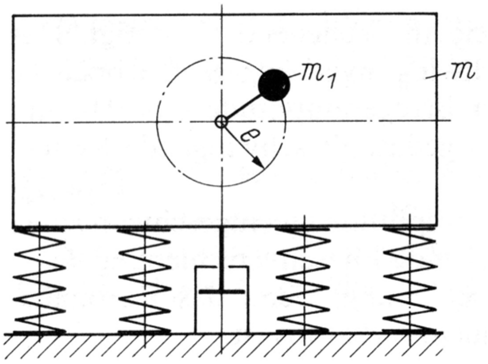
  Steger "Technische Mechanik 2+3" Teubner-Verlag, ISBN: 3 - 519 - 16731 - X

- Anmerkungen bzw. Sonstiges:

  Die Darstellung von Schwingungen und das "Herumspielen" mit den Parametern - und deren Auswirkung auf die entstehende Schwingung - erleichtert dem Schüler den Zugang für den Umgang mit Schwingungen.

"Unwuchterregung"

(Kabus Bsp 8.54)



Feder-Masse-Dämpfer-Schwinger
mit Unwuchterregung

Gehäusemasse $m_2 := 44 \cdot kg$

Exzentrische Masse $m_1 := 6 \cdot kg$

$e := 50 \cdot mm$

Dämpfungskoeffizient $k_d := 700 \cdot \frac{kg}{s}$

Federkonstante $c_F := 12 \cdot \frac{kN}{m}$

$m_{ges} := m_2 + m_1$ $\quad m_{ges} = 50\,kg$

Erregerkreisfrequenz $n_{Motor} := 295.87 \cdot \frac{1}{min}$ $\quad \Omega := 2 \cdot \pi \cdot n_{Motor}$ $\quad \Omega = 30.983 \cdot s^{-1}$

1) Lösungsansatz für Diffglg.: In positiver Richtung auslenken

$$(m_2 + m_1)\frac{d^2}{dt^2}x = -4 \cdot F_{Feder} - F_{Dämpfer} + Fliehkraft$$

$F_{Feder} = c_F \cdot x$ $\quad F_{Dämpfer} = k_d \cdot \frac{d}{dt}x$ $\quad Fliehkraft = m_1 \cdot e \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\phi)$ $\quad \phi = \Omega \cdot t$

Bestimmende Differentialgleichung

$$m_{ges}\frac{d^2}{dt^2}x + k_d \cdot \frac{d}{dt}x + 4 \cdot c_F \cdot x = m_1 \cdot e \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$ oder

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{k_d}{m_{ges}} \cdot \frac{d}{dt}x + \frac{4 \cdot c_F}{m_{ges}} \cdot x = \frac{m_1 \cdot e \cdot \Omega^2}{m_{ges}} \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$ oder in "Normalform"
(Koeffizenten vergleichen!)

$$\frac{d^2}{dt^2}x + 2 \cdot \delta \cdot \frac{d}{dt}x + \omega_e^{\,2} \cdot x = x_R \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung $\omega_e := \sqrt{\frac{4 \cdot c_F}{m_{ges}}}$ $\quad \omega_e = 30.984 \cdot s^{-1}$

Abklingkonstante $\delta := \frac{1}{2} \cdot \frac{k_d}{m_{ges}}$ $\quad \delta = 7 \cdot s^{-1}$

Dämpfungsgrad $\theta := \frac{\delta}{\omega_e}$ $\theta = 0.226$

Amplitude der Erregerschwingung $x_R := \frac{m_1 \cdot e}{m_{ges}}$ $x_R = 6 \cdot mm$

Störfunktion oder Erregerschwingung $x_{err}(t) := x_R \cdot \cos(\Omega \cdot t)$

2) Numerische Lösung der Diffgleichung

Mit "Runge-Kutta" --> **Weg-Zeit Gesetz x(t)** $x_A := 60 \cdot mm$ $v_A := 0 \cdot \frac{m}{s}$

Vektor für Anfangsbedingungen

Ableitungsfunktion DY(t,X): Dimensionslos machen !

$$ab := \begin{pmatrix} \frac{x_A}{m} \\ \frac{v_A}{\frac{m}{s}} \end{pmatrix} \qquad DY(t,X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{-2 \cdot \delta \cdot X_1}{\frac{1}{s}} - \frac{\omega_e^2 \cdot X_0}{\frac{1}{s^2}} + \frac{x_R \cdot \Omega^2}{\frac{m}{s^2}} \cdot \sin\left(\frac{\Omega \cdot t}{\frac{1}{s}}\right) \end{pmatrix}$$

In welchem Zeitbereich wird die Gleichung gelöst? Wieviele Werte werden dazwischen berechnet?

$t_{Anfang} := 0 \cdot s$ $t_{Ende} := 1 \cdot s$ $N_{Werte} := 2000$

Runge-Kutta Diff.-Gleichungslöser: $Lösung := rkfest\left(ab, \frac{t_{Anfang}}{s}, \frac{t_{Ende}}{s}, N_{Werte}, DY\right)$

Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit fester oder variabler Schrittweite oder **Bulirsch-Stoer-Verfahren** für leicht veränderliche GDGL.

$Lösung := Bulstoer\left(ab, t_{Anfang}, t_{Ende}, N_{Werte}, DY\right)$

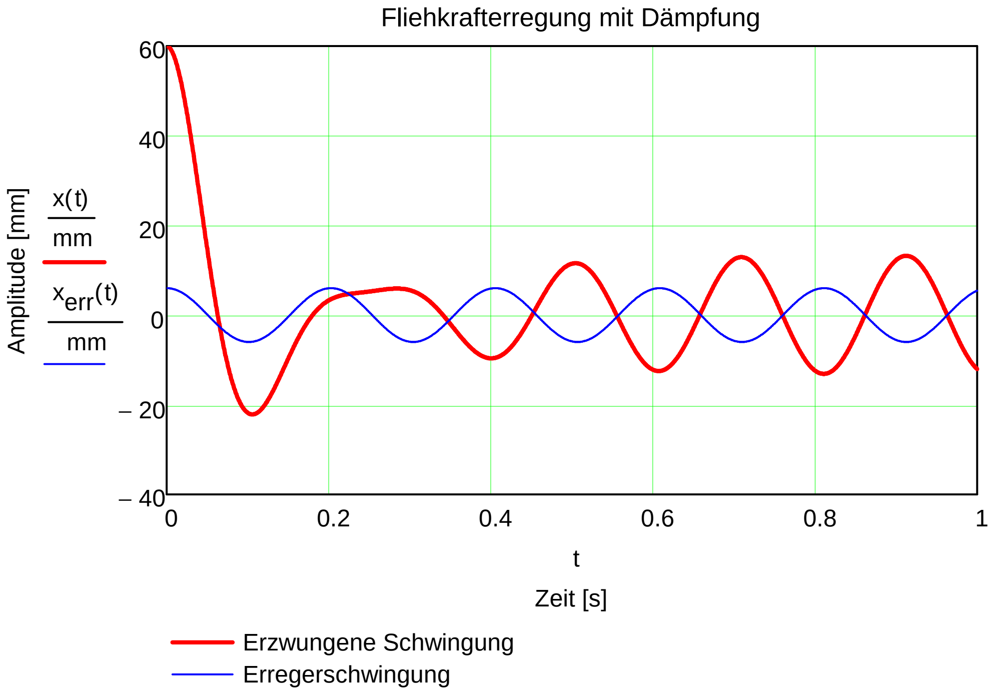
Extrahieren der Lösung $Zeit := Lösung^{\langle 0 \rangle} \cdot s$ $Weg := Lösung^{\langle 1 \rangle} \cdot m$

Die diskreten Ergebniswerte werden nun noch mittels einer kubischen **Splinefunktion interpoliert.** (dazu muss eine Bereichsvariable für die Zeit t definiert werden)

$\Delta t := \frac{t_{Ende} - t_{Anfang}}{N_{Werte}}$ $t := t_{Anfang}, (t_{Anfang} + \Delta t) .. t_{Ende}$

Splinefunktion $S := kspline(Zeit, Weg)$

Anpassungsfunktion $x(t) := interp(S, Zeit, Weg, t)$



3) Berechnung der eingeschwungenen fliehkrafterregten Schwingung

(Theorie siehe: Steger 3 , "Technische Mechanik")

Kreisfrequenzverhältnis: Quotient Erregerkreisfrequenz zu Eigenkreisfrequenz

$\eta := \frac{\Omega}{\omega_e}$ $\eta = 1$

Phasenverschiebung $\psi := \operatorname{atan}\left(\frac{2\cdot\theta\cdot\eta}{\left|1-\eta^2\right|}\right)$ $\psi = 89.996\cdot\text{Grad}$

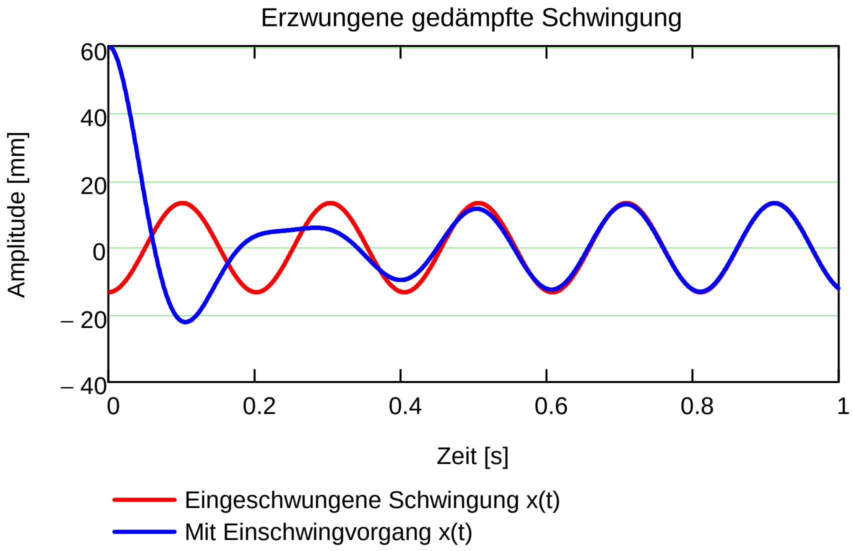
Frequenzgang

$$\frac{x_0}{x_R} = \frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + (2\cdot\theta\cdot\eta)^2}} \qquad x_0 := x_R\frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + (2\cdot\theta\cdot\eta)^2}}$$

Amplitude der eingeschwungenen erregten Schwingung $x_0 = 13.279\cdot\text{mm}$

Schwingungsgleichung der eingeschwungenen fliehkrafterregten Schwingung

$x_{ein}(t) := x_0\cdot\sin(\Omega\cdot t - \psi)$ überkritisch $x_{ein}(t) := x_0\cdot\sin(\Omega\cdot t - \psi + \pi)$



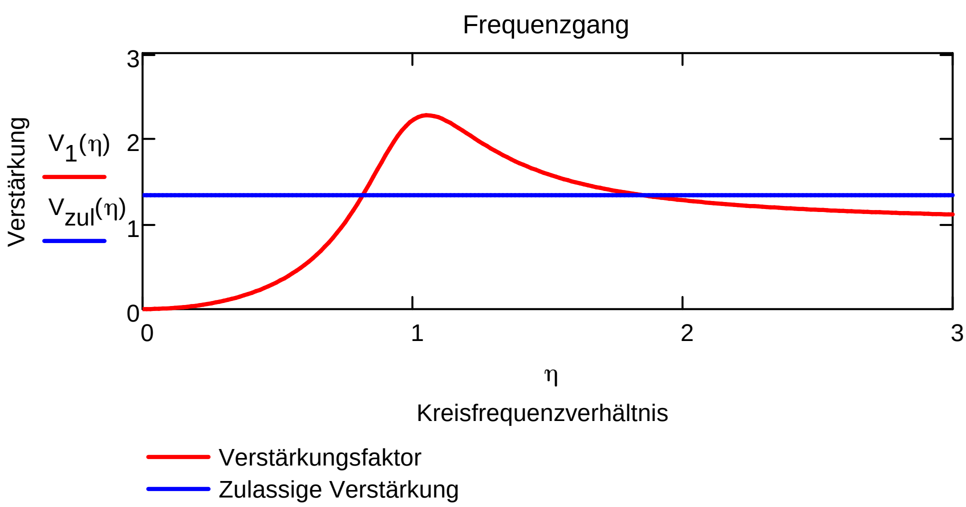
4) Darstellung des Frequenzganges

$\eta_{Anfang} := 0$ $\eta_{Ende} := 3$ $N_{Punkte} := 200$ $\Delta\eta := \dfrac{\eta_{Ende} - \eta_{Anfang}}{N_{Punkte}}$

$\eta := \eta_{Anfang}, \left(\eta_{Anfang} + \Delta\eta\right) .. \eta_{Ende}$

$V_1 = \dfrac{x_0}{x_R}$ Verstärkungsfaktor $V_1(\eta) := \dfrac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + (2\cdot\theta\cdot\eta)^2}}$

Zulässige Schwingung: $x_{0zul} := 8\cdot mm$ $V_{zul}(\eta) := \dfrac{x_{0zul}}{x_R}$



5) In welchem Drehzahlbereich darf die Maschine nicht erregt werden ?

Lösung: Die zulässige Verstärkung schneidet der Frequenzgang in zwei Punkten --> der Bereich dazwischen ist nicht zulässig, da die Verstärkung zu groß ist!!
--> Die zwei Grenzkreisfrequenzverhältnisse suchen --> Die Grenzdrehzahlen ermitteln.

$V_{zulässig} := \frac{x_{0zul}}{x_R}$ $\quad V_{zulässig} = 1.333$

$\eta := 0.5$ Vorgabe $\quad V_{zulässig} = \frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + (2\cdot\vartheta\cdot\eta)^2}}$ $\quad \eta_1 := \mathrm{Suchen}(\eta)$ $\quad \eta_1 = 1.855$

$\eta := 2$ Vorgabe $\quad V_{zulässig} = \frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + (2\cdot\vartheta\cdot\eta)^2}}$ $\quad \eta_2 := \mathrm{Suchen}(\eta)$ $\quad \eta_2 = 1.855$

Aus diesen ermittelten zulässigen Grenzkreisfrequenzverhältnissen kann man die zulässige Erregerfrequenzen und daraus die zulässigen Drehzahlen ermitteln.

$\eta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_e}$ $\quad \Omega_1 := \eta_1\cdot\omega_e$ $\quad \Omega_1 = 57.47\cdot s^{-1}$ $\quad n_{Motor1} := \frac{\Omega_1}{2\cdot\pi}$ $\quad n_{Motor1} = 548.795\cdot\frac{1}{min}$

$\eta_2 = \frac{\Omega_2}{\omega_e}$ $\quad \Omega_2 := \eta_2\cdot\omega_e$ $\quad \Omega_2 = 57.47\cdot s^{-1}$ $\quad n_{Motor2} := \frac{\Omega_2}{2\cdot\pi}$ $\quad n_{Motor2} = 548.795\cdot\frac{1}{min}$

D.h., dass die Maschine nicht zwischen $n_{Motor1} = 548.795\cdot\frac{1}{min}$ und $n_{Motor2} = 548.795\cdot\frac{1}{min}$ betrieben werden darf, da sonst die zulässige erregte Amplitude von $x_{0zul} := 8\cdot mm$ überschritten wird.

Drehzahl, bei der die Eigenschwingung vorherrscht:

$n_{eigen} := \frac{\omega_e}{2\cdot\pi}$ $\quad n_{eigen} = 295.874\cdot\frac{1}{min}$ $\quad$ Darüber läuft die Maschine überkritisch!!

Phasenverschiebung

$\psi_1 := \mathrm{atan}\left(\frac{2\cdot\vartheta\cdot\eta_1}{\left|1-\eta_1^2\right|}\right)$ $\quad \psi_1 = 18.954\cdot Grad$ $\quad \psi_2 := \mathrm{atan}\left(\frac{2\cdot\vartheta\cdot\eta_2}{1-\eta_2^2}\right)$ $\quad \psi_2 = -18.954\cdot Grad$

$\psi_{21} := 180\cdot Grad + \psi_2$ $\quad \psi_{21} = 161.046\cdot Grad$ $\quad$ Maschine "läuft vor"