Pichler Roland roland.pichler@htl-kapfenberg.ac.at

Gravitation

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Gravitationskraft, Gravitationsfeldstärke, Gravitationspotenzial, potenzielle Energie Potenzfunktionen, uneigentliche Integrale

- Kurzzusammenfassung

  Dieser Artikel beschreibt die vereinfachten Herleitungen von Gravitatiosfeldsärke und Graviattionspotenzial der Erde ausgehend vom Newtonschen Garvitationsgesetz, sowie die Möglichkeitebn der grafischen Darstellungen der entprechenden Funktionen.

- Didaktische Überlegungen

  Eignet sich gut als fächerübergreifendes Projekt (Referat) für Angewandte Mathematik und Naturwissenschaften

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, Naturwissenschaften, ab 3.Jahrgang, alle Abteilungen

- Mathcad-Version:

  Mathcad 15

- Literaturangaben:

  Physik in Experimenten und Beispielen, Hans J Paus, HANSER Verlag

Die Gravitationskraft

Im Jahr 1687 veröffentlichte Isaac Newton in seinen "Mathematischen Prinzipien der Naturlehre" (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) das nach ihm benannte Gravitationsgesetz, das die Kraft angibt, die zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 im Abstand r aufeinader ausüben. In moderner Schreibweise lautet es: $F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$.

Die Gravitationskonstante γ konnte Newton selbst nicht angeben (erst 1797 gelang dies Henry Cavendish mit einer sehr empfindlichen Torsionswaage im Labor). Die Proportionen $F \sim m_1$ und

$F \sim 1/r^2$ allein genügen jedoch zur Erkärung der von Kepler empirisch gefundenen Gesetzmäßigkeiten der Planetenbewegungen. Im Folgenden wird kurz skizziert, wie Newton zum Gravitationsgesetz kam.

Aus Beobachtungen war bekannt, dass die Erde Körper mit einer Kraft anzieht, die deren Masse proportional ist: $F = mg$. Daraus schloss Newton, dass umgekehrt dieser Körper auch die Erde mit der gleichen Kraft anziehen müsste (actio = reactio), so dass man mit M als Erdmasse schreiben kann: $F \sim mM$ oder allgemein $F \sim m_1 m_2$.
Außerdem muss die Kraft mit wachsendem Abstand r zwischen den beiden Körpern abnehmen, etwa nach einem Potenzgesetz : $F \sim 1/r^n$. Daraus ergibt sich der Ansatz für das Gesetz: $F \sim m_1 m_2/r^n$. Nun war noch der Exponent n zu bestimmen. Dazu verglich Newton die Anziehung, die ein Körper (K) an der Erdoberfläche erfährt, mit der, die der Mond (Mo) auf seiner Bahn durch die Erdanziehung erfahren muss.

Es gilt daher: $F_K = \gamma \cdot \frac{M \cdot m_K}{r_K^{\,n}} = m_k \cdot g$ und $F_{Mo} = \gamma \cdot \frac{M \cdot m_{Mo}}{r_{Mo}^{\,n}} = m_{Mo} \cdot a$

Die Beschleunigung g ist bekannt, nämlich $g := 9.81 \cdot \frac{m}{s^2}$. Die Beschleunigung a die der Mond auf seiner Umlaufbahn erfährt, kann man aus dem bekannten Bahnradius r_{Mo} ~ 60 Erdradien und der bekannten Umlaufzeit T ~ 28 Tage berechnen (Nebenrechnung siehe weiter unten).

Man erhält daher gerundet: $a := 2.6 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{m}{s^2}$.

Es gilt daher: $\frac{g}{a} = 3773$

Um n zu ermitteln setzte Newton versuchsweise für r_K den Erdradius R ein und erhielt folgende

Proportion: $\frac{g}{a} = \frac{r_{Mo}^{\,n}}{r_K^{\,n}} = \left(\frac{60 \cdot R}{R}\right)^n = 60^n = 3773$. Der Vergleich liefert ziemlich ganau n = 2 (n = 2.011).

Alle Berechnungen von Planetenbahnen und Bahnen anderer Himmelskörper ergaben dann, dass der Wert 2 der Hochzahl mit höchster Genauigkeit gilt.

Nebenrechnung: $T := 28 \cdot \text{Tag}$ $\quad R := 6371 \cdot \text{km}$ $\quad r_{Mo} := 60 \cdot R$

$$a := r_{Mo} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \qquad a = 2.579 \times 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

Gravitationsfeldstärke der Erde

Außerhalb der Erde erfährt ein Probekörper der Masse *m* an jedem Punkt des Raumes eine Kraft die auf den Erdmittelpunkt hin gerichtet ist und nach außen mit dem inversen Quadrat des Abstands *r* vo Erdmittelpunkt abnimmt. Wird in jedem Raumpunkt die Kraft durch einen Vektorpfeil markiert erhält man das Bild eines Kraftfeldes. Das heißt, das Gravitationsfeld ist ein **Kraftfeld** (ich verzichte auf di vektorielle Schreibweise, da sie für das folgende nicht benötigt wird).
Dividiert man nun das Kraftgesetz durch die Masse *m* des Probekörpers, erhält man die **Gravitationsfeldstärke E(r)**.

$$\gamma := 6.67259 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \qquad M := 5.977 \cdot 10^{24} \cdot kg$$

Feldstärke für den Bereich r > R

$$\boxed{E_a(r) := \gamma \cdot \frac{M}{r^2}}$$

Im Gravitationsgesetz kommt der Erdradius nicht vor, die gesamte Erdmasse könnte auch im Schwerpunkt gedacht werden - die Gravitationswirkung außerhalb der Erde wäre dieselbe.

Setzt man für r den Erdradius R (Erdoberfläche) erhält man die bekannte Erdbeschleunigung g:

$$g := E_a(R) \qquad g = 9.826 \frac{m}{s^2}$$

Wie ändert sich die Kraft auf einen Probekörper der Masse *m*, wenn man ins Erdinnere vordringt (für $r < R$), z. B.wenn man in einen tiefen senkrechten Schacht hinuntersteigt ?
Dann gelten die obigen Bedingungen immer noch für den inneren (schraffierten) Teil mit der Masse *l* der Abb. 1.Es gilt nämlich:

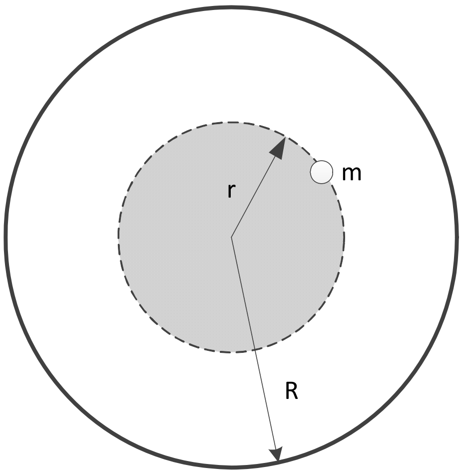


Abb. 1

Herleitung: für eine **konstante Dichte** gilt:

$$M_i = M \cdot \frac{V_i}{V} = M \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

einsetzen liefert $E_r(r) = \gamma \cdot \frac{M_i}{r^2} = \gamma \cdot \frac{M}{R^3} \cdot r$

Feldstärke für den Bereich r < R

$$\boxed{E_i(r) := \gamma \cdot \frac{M}{R^3} \cdot r}$$

Die darüber befindliche Kugelschale mit der Dicke *R - r* übt keine Kraftwirkung auf den Probekörpe aus; man kann diesen Befund etwa so herleiten (Abb. 2)

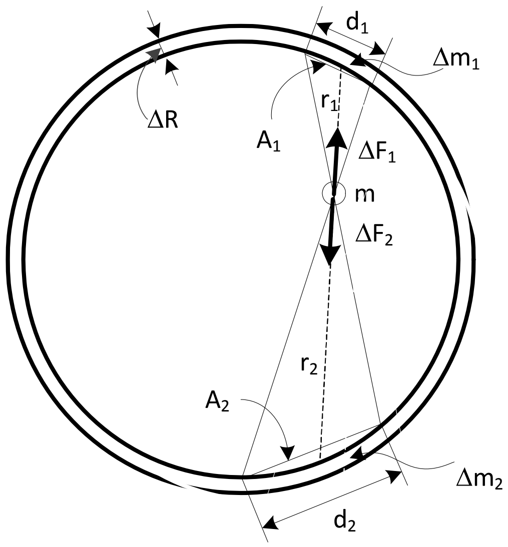


Abb. 2

Man zerlegt die Kugelschale in sehr dünne Kugelschalen mit der Dicke ΔR.
Betrachtet man einen durch den Probekörper gelegten Doppelkegel mit infinitesimal kleinen Öffnungswinkel.
Dieser Doppelkegel schneidet aus der Kugelschale die Massenelemente Δm_1 und Δm_2 heraus.
Aus dem Strahlensatz erkennt man, dass sich die Durchmesser d_1 und d_2 der Grundkreisflächen wie die Abstände r_1 und r_2 verhalten - die Grundkreisflächen A_1 und A_2 also wie deren Quadrate:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \text{ oder } \frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}$$

Mit der Dichte ρ erhält man $\Delta m_1 = \rho \cdot \Delta R \cdot A_1$:

$$\Delta F_1 = \gamma \cdot \frac{m \cdot \Delta m_1}{r_1^2} = \gamma \cdot m \cdot \rho \cdot \Delta R \cdot \frac{A_1}{r_1^2}$$

bzw. $$\Delta F_2 = \gamma \cdot \frac{m \cdot \Delta m_2}{r_2^2} = \gamma \cdot m \cdot \rho \cdot \Delta R \cdot \frac{A_2}{r_2^2}$$

Die beiden Kräfte sind offensichtlich gleich und entgegengesetzt. Sie heben daher einander auf.

Man erkennt:

Im Inneren eines kugelförmigen Körpers (mit konstanter Dichte ρ) nimmt die Gravitationsfeldstärke proportional zum Abstand vom Mittelpunkt zu.
Im Äußeren nimmt die Gravitationsfeldstärke umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt ab.

Die graphische Darstellung der beiden Feldstärken:

$$E(r) := \begin{cases} E_i(r) & \text{if } r < R \\ E_a(r) & \text{otherwise} \end{cases}$$

dabei wird auf die beiden obigen Definitionen zugegeriffen

$$K_o(x) := \sqrt{\left(\frac{R}{1000}\right)^2 - x^2} + \frac{R}{1000} \cdot 3$$

Darstellung der "Nordhalbkugel"

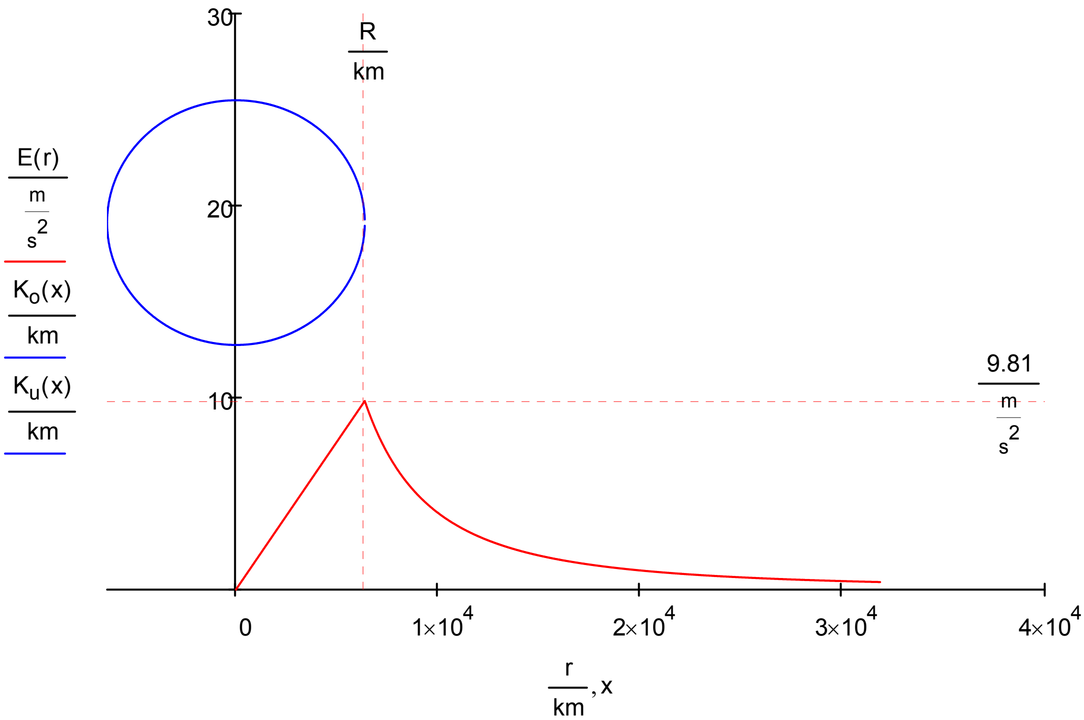
$$K_u(x) := -\left[\sqrt{\left(\frac{R}{1000}\right)^2 - x^2} - \frac{R}{1000} \cdot 3\right]$$

Darstellung der "Südhalbkugel"

$$r := 0 \cdot km, 10 \cdot km .. 5 \cdot R$$

$$x := \frac{-R}{1000}, \frac{-R + 10 \cdot km}{1000} .. \frac{R}{1000}$$

neue Variable, damit die "Erde" graphisch dargestellt werden kann. Beachten Sie die unterschidliche Skalierung der Variablen r und x.



Gravitationspotenzial der Erde

$M := M \quad r := r \quad \gamma := \gamma \quad R := R$

In kleinen Raumbereichen nahe der Erdöberfläche ist die Gravitationsfeldstärke konstant. Das Feld ist dann in guter Näherung homogen.
Jeder Körper der Masse m hat in ihm in der Höhe h die potenzielle Energie $E_p = mgh$, wobei der Energienullpunkt (wilkürlich) auf $h = 0$ gelegt wird.
Die Gleichung $E_p = mgh$ wurde durch Berechnung der Arbeit gewonnen, die aufzuwenden ist, um den Körper gegen die konstante Kraft $F = mg$ auf die Höhe h zu heben.
Wendet man für diese Kraft nun $F = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ an und berechnet die Arbeit, die aufzuwenden ist, um den Körper m gegenn diese Kraft an einen bleibiegen Ort r zu transportieren, so erhält man folgende Arbeit (wobei als Ausgangspunkt des Transports üblicherwiese nicht die Erdoberfläche sondern r = ∞ gewählt wird)

$$W = -\int_{\infty}^{r} F\,dz \quad \text{-->} \quad W = \lim_{a \to \infty} \int_{a}^{r} \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{z^2}\,dz \;\; \text{annehmen}, r > 0 \;\to W = -\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{r}$$

Die Arbeit W = $-\gamma mM/r$ ist aufzuwenden, das heißt man gewinnt die Arbeit $+\gamma mM/r$. Man erhält die

potenzielle Energie eines Körpers der Masse m im Schwerefeld der Erde für r > R:

$$\boxed{E_{pot}(r) = -\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{r}}$$

Die Fortsetzung ins Erdinnere ergibt sich, wenn man die Kraft $F_i = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R^3} \cdot r$ in das Arbeitsintegral einsetzt und berücksichtigt, dass man den Wert an der Erdoberfläche kennt.

Herleitung:
Die potenzielle Energie im Erdinneren erhält man, indem man die Kraft F_i im Inneren in das Arbeitsintegral einsetzt und berücksichtigt, dass man den Wert an der Erdoberfläche kennt

$$E_{poti}(r) = E_{pot}(R) + \int_{R}^{r} F_i(z)\,dz$$

$$E_{pot}(R) + \int_{R}^{r} \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R^3} \cdot z\,dz \;\left|\begin{array}{l} \text{ersetzen}, E_{pot}(R) = -\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{R} \\ \text{erweitern} \end{array}\right. \to \frac{\gamma \cdot M \cdot m \cdot r^2}{2 \cdot R^3} - \frac{3 \cdot \gamma \cdot M \cdot m}{2 \cdot R}$$

Potenzielle Energie eines Körpers der Masse m im Schwerefeld der Erde für r < R:

$$\boxed{E_{poti}(r) = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{2 \cdot R} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

Man kann nun die beiden Gleichungen für die potenzielle Energie des probekörpers der Masse *m* von den speziellen Eigenschaften des Probekörpers befreien, wenn man durch die Masse *m* dividiert. Auf diese Weise kommt man zum **Gravitationspotenzial Φ** der Erde

Potenzial für den Bereich r > R $\Phi_a(r) := -\gamma \cdot \frac{M}{r}$

Potenzial für den Bereich r < R $\Phi_i(r) := -\gamma \cdot \frac{M}{2 \cdot R} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

Graphische Darstellung der beiden Potenziale

$$\Phi(r) := \begin{cases} \Phi_i(r) & \text{if } r \le R \\ \Phi_a(r) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K_o(x) := R \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{1000}\right)^2 - x^2}$$

$$r := 0 \cdot km, 10 \cdot km .. 7 \cdot R$$

$$K_u(x) := -R \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{1000}\right)^2 - x^2}$$