Wilfried Rohm

Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Symbolisches und numerisches Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen , Lösen von Gleichungen mit hilfe der matrizenrechnung, Minmierungs- und Maximierungsprobleme.

- Kurzzusammenfassung

  Es wird ein ausführlich kommentierter Überblick über das symbolische und numerische Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen sowie von Ungleichungen mit Hilfe von Mathcad angeboten. Es wird Wert auf ein Verständnis der verschiedenen Verfahren und ihres (zeitweise) unterschiedlichen Verhaltens gelegt. Es werden teilweise auch die Grenzen der Berechenbarkeit ausgelotet.
  Kurz werden auch Optimierungsprobleme angesprochen.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Der vorliegende File ist in erster Linie zum Selbststudium gedacht. Erl soll aber auch Anregungen für die Besprechung mathcadtypischer Probleme und Verfahren im Unterricht geben.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 2.- 5.Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 15

- Literaturangaben:

  Lernprogramme und Quicksheets von Mathcad

Folgende Verfahren werden hier an Beispielen demonstriert:

1) Verwendung des Schlüsselworte "auflösen" (Gleichungen und Gleichungssysteme, Ungleichungen)

2) Numerische Lösungen von Gleichungen

3) Lösungsblock "given-find" ("vorgabe - suchen"): Numerische und symbolische Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen

4) Lineare Gleichungssysteme mit der Matrizenrechnung

5) Lösungsblock "vorgabe-minfehl" für nicht direkt lösbare Gleichungen / Gleichungssysteme

6) "maximieren" bzw. "minimieren" für Optimierungsprobleme

1) Schlüsselwort "auflösen"

Das Schlüsselwort "Auflösen"

$$u-\frac{m+c}{d}=\frac{k}{f+g} \text{ auflösen}, g \rightarrow \frac{k}{u-\frac{c+m}{d}}-f$$

$$u-\frac{m+c}{d}=\frac{k}{f+g} \left| \begin{array}{l}\text{auflösen}, g\\ \text{vereinfachen}\end{array}\right. \rightarrow$$

Auflösen und gleichzeitig zuordnen:

$$c:=u-\frac{m+c}{d}=\frac{k}{f+g} \left| \begin{array}{l}\text{auflösen}, c\\ \text{vereinfachen}\end{array}\right. \rightarrow d\cdot u-m-\frac{d\cdot k}{f+g} \qquad c\rightarrow d\cdot u-m-\frac{d\cdot k}{f+g}$$

Lösung einer algebraischen Gleichung 5.Grades:

$$\text{nullst}:=x^5-3x^4-2x^2+3x-1=0 \left| \begin{array}{l}\text{auflösen}, x\\ \text{Gleitkommazahl}, 3\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix}3.12\\ 0.492-0.174i\\ 0.492+0.174i\\ -0.551+0.935i\\ -0.551-0.935i\end{pmatrix}$$

$$\text{nullst}_0=3.12 \qquad \text{nullst}_4=-0.551-0.935i$$

Allgemeine Lösung einer quadratischen Gleichung

$$s=v_o\cdot t-\frac{g}{2}\cdot t^2 \text{ auflösen}, t \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{2\cdot\left(\dfrac{v_o}{2}+\dfrac{\sqrt{v_o^{\,2}-2\cdot g\cdot s}}{2}\right)}{g} \\ -\dfrac{2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{v_o^{\,2}-2\cdot g\cdot s}}{2}-\dfrac{v_o}{2}\right)}{g}\end{bmatrix}$$

Verwendung von Modifikatoren :

$$(a-1)\cdot x=1 \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{1}{a-1}$$

$$(a-1)\cdot x=1 \text{ auflösen}, x, \text{vollständig} \rightarrow \left| \begin{array}{ll}\text{undefined} & \text{if } a=1\\ \dfrac{1}{a-1} & \text{if } a\neq 1\end{array}\right.$$

$$a\cdot x+b=0 \text{ auflösen}, x, \text{vollständig} \rightarrow \left| \begin{array}{l}-\dfrac{b}{a} \quad \text{if } a\neq 0\\ \text{undefined} \quad \text{if } b\neq 0\wedge a=0\\ \_c1 \quad \text{if } a=0\wedge b=0\wedge \_c1\in\mathbb{C}\end{array}\right.$$

wir entwickeln eine Gleichung 5. Grades aus den Lösungen

$$(x-1)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot x\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right) \text{ erweitern } \rightarrow x^5+\frac{5\cdot x^4}{12}-\frac{7\cdot x^3}{6}-\frac{5\cdot x^2}{12}+\frac{x}{6}$$

$$x^5+\frac{5}{12}\cdot x^4-\frac{7}{6}\cdot x^3-\frac{5}{12}\cdot x^2+\frac{1}{6}\cdot x = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Der Auflöse-Operator funktioniert **auch bei Gleichungssystemen, auch wenn sie nicht linear sind**:

$$\begin{pmatrix} 3x-2y = 4 \\ x+5y = 2 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{24}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix} = (1.412 \quad 0.118)$$

$$\begin{pmatrix} 3x-2y = 4 \\ x^2+5y = 2 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{417}}{4}-\frac{15}{4} & \frac{3\cdot\sqrt{417}}{8}-\frac{61}{8} \\ -\frac{\sqrt{417}}{4}-\frac{15}{4} & -\frac{3\cdot\sqrt{417}}{8}-\frac{61}{8} \end{pmatrix} \text{ Gleitkommazahl}, 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1.36 & 0.0327 \\ -8.86 & -15.3 \end{pmatrix}$$

Ungleichungen:

Dies alles geht auch mit **Ungleichungen** (in Mathcad 14 gibt es da teilweise Probleme! Erst in der Version 15 funktioniert es wunschgemäß!

$$5\cdot u-3 < u+7 \text{ auflösen}, u \rightarrow u < \frac{5}{2}$$

$$x^2-2\cdot x \le 15 \text{ auflösen}, x \rightarrow -3 \le x \le 5$$

$$x^2-2\cdot x \ge 15 \text{ auflösen}, x \rightarrow x \le -3 \vee 5 \le x$$

$$x^2-2\cdot x \ge 15 \text{ auflösen}, x, \text{vollständig} \rightarrow x \le -3 \vee 5 \le x$$

x <= -3 ODER x >= 5

Symbolisch schwer oder nicht lösbare (transzendente) Gleichungen :

$$\sin(x)+3\cdot\cos(x)-2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{1}{5}\right) \\ 2\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{5}{\sqrt{6}-1}\right)-\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.208 \\ -0.564 \end{pmatrix}$$

geht doch .....

$$\sin(x) = \frac{8}{10}\cdot\cos(x) \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{41}}{4}-\frac{5}{4}\right) \\ 2\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{4}{\sqrt{41}+5}\right)-\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.675 \\ -2.467 \end{pmatrix}$$

Die Atan-Funktion liefert ab Version 15 im Bereich [-π, π]

$$\sin(x)+\cos(2x) = \frac{8}{10} \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{asin}\left(\frac{\sqrt{65}}{20}+\frac{1}{4}\right) \\ \operatorname{asin}\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{65}}{20}\right) \\ \pi - \operatorname{asin}\left(\frac{1}{20}\cdot\sqrt{65}+\frac{1}{4}\right) \\ \pi - \operatorname{asin}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\cdot\sqrt{65}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.712 \\ -0.154 \\ 2.43 \\ 3.295 \end{pmatrix}$$

Wenn man eine Kommazahl (0.8) eingibt, erfolgt die ausgabe im Fließkommaformat, obwohl symbolisch gerechnet wird!

$$\sin(x)+\cos(2x) = 0.8 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -0.15371753999893745192 \\ 0.71168790862290829263 \\ 3.2953101935887306904 \\ 2.4299047449668849458 \end{pmatrix}$$

Das Verhalten bei wirklich transzendenten Gleichungen ist unterschiedlich:

$$\ln(x) = 1-\frac{x}{2} \text{ auflösen}, x \rightarrow 2\cdot \operatorname{LambertW}\left(\frac{e}{2}\right)$$

$$e^{x} = 5-x \text{ auflösen}, x \rightarrow 5-\operatorname{LambertW}\left(e^{5}\right)$$

In eingen Fällen werden symbolische Funktionen (die nicht numerisch auswertbar sin!) ausgegeben, welche entsprechend vordefiniert sind - hier handelt es sich um die Lambert´sche W-Funktion (die Inverse von $x\cdot e^{x}$)

$$\sin(x)+x-3 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 2.1797570664800300129$$

Hier wechselt Mathcad 11 offenbar auf eine numerische Rechnung.

$$x^{2}+5\cdot\sin(x) = 10 \text{ auflösen}, x \rightarrow 3.2357589330384011 47$$

$$x^{5}-\sin(x)+3\cdot\ln(x) = \operatorname{atan}(x) \text{ auflösen}, x \rightarrow$$

In diesem Beispiel wird auch eine komplexe Lösung gefunden, allerdings braucht Mathcad 15 SEHR (!) lang dazu, sodaß hier der Ausdruck vorgabemäßig deaktiviert wurde. (Aktivieren über Maus-rechts) .
In solchen Fällen und auch um andere Lösungen zu finden sowie bei nichtlinearen Gleichungssystem benötigt man numerische Lösungsverfahren (siehe 2.Abschnitt)

1) Schlüsselwort "auflösen"

2) Numerische Lösung von Gleichungen

2) Berechnung numerischer Lösungen

$$x^{2}+5\cdot\sin(x) = 10 \text{ auflösen}, x \rightarrow 3.235758933038401147$$

In Mathcad 11 wird hierfür keine Lösung gefunden (Mathcad 14/15 schaltet an dieser Stelle auf ein numerisches Verfahren um !

Nicht immer findet der "Auflösen"-Befehl eine Lösung, weil in der Regel versucht wird , symbolisch zu rechnen.

Wenn das so ist oder wenn gezielt bestimmte Lösungen "angesteuert" werden, wählt man ein numerisches Lösungsverfahren, dem (analog zum Newton-Verfahren) ausgehend von einem Startwert die Lösung iterativ ermittelt wird
Im Wesentlichen stehen 2 verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung

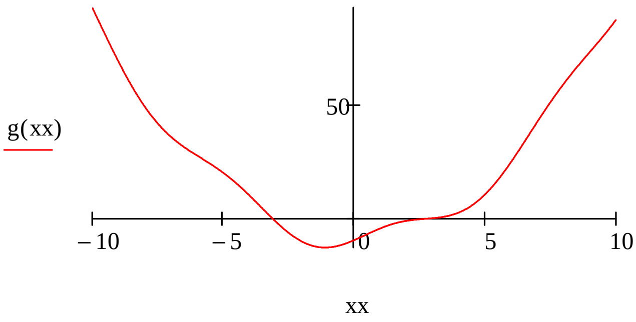
Verwendung der wurzel-Funktion (engl: root)

Grundprinzip:

wir definieren die **Gleichung als Funktion** $g(x) := x^2 + 5 \cdot \sin(x) - 10$

$x := 1$ $\text{wurzel}(g(x), x) = 3.236$ die links stehende Zuweisung dient als Startwert für den Iterationsalgorithmus

$x := -3$ $\text{wurzel}(g(x), x) = -3.153$



Anwendung des vorgabe-suchen-Blockes (given - find)

$x := 1$ Startwert

Vorgabe

$x^2 + 5 \cdot \sin(x) - 10 = 0$

$x0 := \text{Suchen}(x)$ $x0 = 3.236$

Diese Methode erlaubt mit der rechten Maustaste auf "Suchen" die Auswahl eines bestimmten Verfahrens!!

2) Numerische Lösung von Gleichungen

3) Gleichungssysteme mit vorgabe-suchen

3) Lösungsblock "vorgabe - suchen" == "given - find" für Gleichungssysteme :

Beispiel : Elektrisches Netzwerk - numerische oder symbolische Lösung

$E_1 := 10 \cdot V$ $R_1 := 1 \cdot \Omega$ $R_3 := 2 \cdot \Omega$ $R_5 := 5 \cdot \Omega$ $R_7 := 2 \cdot \Omega$

$E_2 := 5 \cdot V$ $R_2 := 2 \cdot \Omega$ $R_4 := 1 \cdot \Omega$ $R_6 := 1 \cdot \Omega$

Startwerte

$I_1 := 1 \cdot A$ $I_2 := I_1$ $I_3 := I_1$ $I_4 := I_1$

Vorgabe

$$E_1 = I_1 \cdot (R_6 + R_1 + R_3) + I_3 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_3$$

$$E_2 = I_2 \cdot (R_7 + R_2) - I_3 \cdot R_2$$

$$0 = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot (R_1 + R_5 + R_2) - I_4 \cdot R_5$$

$$0 = I_1 \cdot R_3 - I_3 \cdot R_5 + I_4 \cdot (R_3 + R_4 + R_5)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} := \text{Suchen}(I_1, I_2, I_3, I_4)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.897 \\ 0.441 \\ -1.618 \\ -1.985 \end{pmatrix} A$$

Nichtlineare Gleichungen und Gleichungssysteme

Gleichungssystem mit Gleichungen und Ungleichungen

$x := 1 \qquad y := 1$

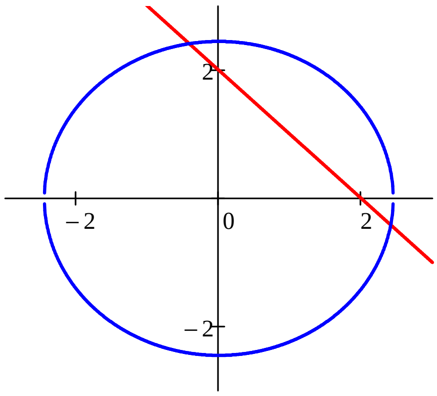
Vorgabe

$$x^2 + y^2 = 6$$

$$x + y = 2$$

$$x > 0$$

$$\text{Suchen}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.414 \\ -0.414 \end{pmatrix}$$



Ist auch die symbolische Lösung möglich ?

Vorgabe

$$i^2 + j^2 = 6$$

$$i + j = 2$$

$$l := \text{Suchen}(i, j) \rightarrow \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}+1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$l = \begin{pmatrix} -0.414 & 2.414 \\ 2.414 & -0.414 \end{pmatrix}$$

$l_{0,0} = -0.414$

$l_{1,1} = -0.414$

Elastischer Stoßprozeß zweier Massen m_1, m_2:

Zwei Massen mit Geschwindigkeiten v_1 und v_2 stoßen zentral und elastisch aufeinander, w1 und w2 seien die Geschwindigkeiten nach dem Stoß.

Vorgabe

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot w_1 + m_2 \cdot w_2 \qquad \text{Impulssatz}$$

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot w_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot w_2^2}{2} \qquad \text{Energiesatz}$$

$$\text{Suchen}(w_1, w_2) \rightarrow \begin{pmatrix} v_1 & \dfrac{m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2 & \dfrac{2 \cdot m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_2 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeiten nach dem elastischen Stoß (allgemeine Lösung)

3) Gleichungssysteme mit vorgabe-suchen

4) Gleichungssysteme mit Matrizenrechnung

4) Lineare Gleichungssysteme mit der Matrizenrechnung

$w := 1 \quad x := 1 \quad y := 1 \quad z := 1$

Vorgabe

Jedes lineare Gleichungssystem
kann auch direkt mit der Matrizenrechnung gelöst werde

$$0.3 \cdot w + 0.2 \cdot x + 6.6 \cdot y - 1.1 \cdot z = 1$$

$$4.5 \cdot w - 1.8 \cdot x - 0.3 \cdot y + 6.5 \cdot z = .1$$

$$-7.3 \cdot w + 9.7 \cdot x + 10.9 \cdot y - 4.1 \cdot z = .01$$

$$8.1 \cdot w - 2.7 \cdot x + 8.7 \cdot y + 8.9 \cdot z = .001$$

$$\mathrm{Suchen}(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} -3.937 \\ -2.975 \\ 0.746 \\ 1.952 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 6.6 & -1.1 \\ 4.5 & -1.8 & -0.3 & 6.5 \\ -7.3 & 9.7 & 10.9 & -4.1 \\ 8.1 & -2.7 & 8.7 & 8.9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -148.003$$

Die Determinante (ungleich 0), zeigt, dass die Matrix nicht singulär ist - also eine eindeutige Lösung besitzt.

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot b \qquad \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.937 \\ -2.975 \\ 0.746 \\ 1.952 \end{pmatrix}$$

4) Gleichungssysteme mit Matrizenrechnung

5) Lösungsblock vorgabe-minfehl

5) Lösungsblock "vorgabe - minfehl"

Es gibt auch Befehle für Systeme, die keine realen Lösungen haben. Dabei werden jene Werte ausgegeben, welche den Randbedingungen **am nächsten** kommen.

$x := 0 \quad y := 0$

Vorgabe

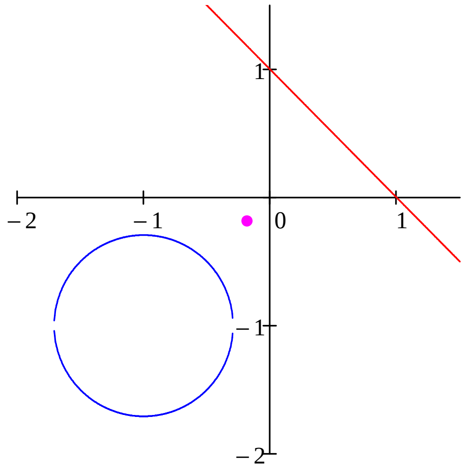
$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 0.5$$

$$x + y = 1$$

Der Versuch mit dem Befehl "Suchen(x,y)" führt zu keiner Lösung, weil die Gerade am Kreis vorbeiführt!
Beachte: Wieder können mit der rechten Maustaste auf "Minfehl" unterschiedliche verfahren eingestellt werden, welche häufig auch zu unterschiedlichen Lösungen führen!

$$P := \mathrm{Minfehl}(x,y)$$

$$P = \begin{pmatrix} -0.1828174 \\ -0.1828173 \end{pmatrix}$$



Eine pädagogisch sehr wertvolle Anwendung des minfehl-Befehls ist die **Ermittlung von Ausgleichsfunktionen nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate** mit Hilfe dieses Befehels!

-> siehe beispielsweise File "Wirtschaftsmathematik" auf **www.math-tech.at**

Mathematischer Hinweis : **Minfehl** bzw. **minerr** unterscheiden sich von "Suchen" darin, dass die Antwort der letzten zulässigen Iteration zurückgegeben wird, wenn der Algorithmus nicht konvergiert - auch we die letzte Iteration die Konvergenzbedingungen nicht erfüllt!

5) Lösungsblock vorgabe-minfehl

6) "Maximieren" / "Minimieren"

Die Funktionen "Maximieren" / "Minimieren" können für lineare und nichtlineare Optimierungsprobleme verwendet werd

$Z(x,y) := x + y$ Zielfunktion

Vorgabe

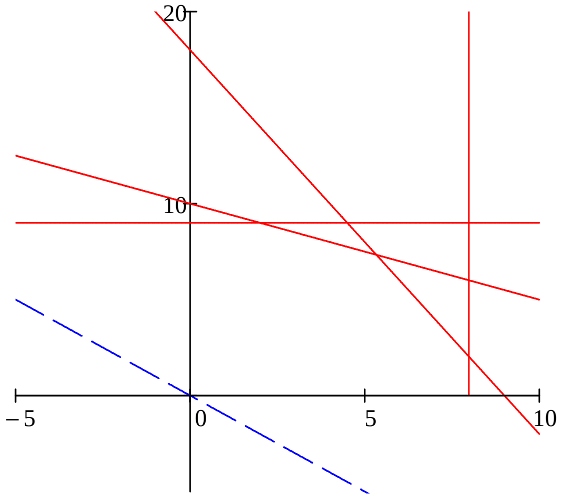
$\frac{1}{2}x + y \le 10$

$2x + y \le 18$

$0 \le x \le 8$

$y \ge 0 \wedge y \le 9$

$\text{Maximieren}(Z, x, y) = \begin{pmatrix} 5.333 \\ 7.333 \end{pmatrix}$



Die Bedingungen können auch mit Hilfe der Matrizenrechnung definiert werden.

Mathematisch arbeiten die Funktionen unterschiedlich nach verschiedenen Verfahren:
"linear" verwendet einen Simplex-Algorithmus (für lineare Optimierungsprobleme), die anderen Verfahren verwenden ande
iterationsverfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme). "linear" benötigt keine Startwerte für die Lösungssuche!

-> File "Wirtschaftsmathematik" auf **www.math-tech.at**

6) "Maximieren" / "Minimieren"