Dipl.-Ing. Paul Mohr, p.mohr@eduhi.at

Föppl-Funktion

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Mathematik: unstetige Funktionen
  Mechanik: Verlauf von Schnittreaktionen

- Kurzzusammenfassung

  Mit Hilfe der Föppl-Funktion (auch Föppl-Klammer) werden einzelne Terme einer Funktion abhängig vom Wert der unabhängigen Variablen (de)aktiviert. Je nach Ordnung der Föppl-Klammer lassen sich u.a. Funktionssprünge und -knicke darstellen.

  Eine typische Anwendung findet die Föppl-Funktion in der Mechanik bei der Berechnung der Schnittreaktionen in Trägern, wofür sie auch ursprünglich „erfunden" wurde.

- Didaktische Überlegungen:

  Anschauliche Darstellung von Schnittkräften und Momenten über den gesamten Träger statt nur einzelner Punkte.

- Lehrplanbezug:

  U.a. Schnittreaktionen im statisch bestimmten Träger

- Mathcad-Version:

  Mathcad 15

Verweis auf die Föppl-Funktion

Verweis:C:\Users\Paul\Documents\Schule\Divers\M&T Beiträge\Föpplfunktion\f_Foeppl.xmcd(R)

Ein Doppelklick auf die Verweiszeile öffnet das Funktionsmodul.

Definition der Föppl-Funktion

allgemeine Funktion

$$f\_F(x,\xi,n) := \begin{cases} \left(\dfrac{x}{\mathrm{UnitsOf}(x)} - \dfrac{\xi}{\mathrm{UnitsOf}(\xi)}\right)^n & \text{if } x \ge \xi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Die Argumente müssen einheitenlos gemacht werden, weil Mathcad bei Einheiten keinen variablen Exponenten (hier n) zulässt.

Föpplfunktion 0. Ordn. $f\_F_0(x,\xi) := f\_F(x,\xi,0)$

Föpplfunktion 1. Ordn. $f\_F_1(x,\xi) := f\_F(x,\xi,1)\cdot \mathrm{UnitsOf}(x)$

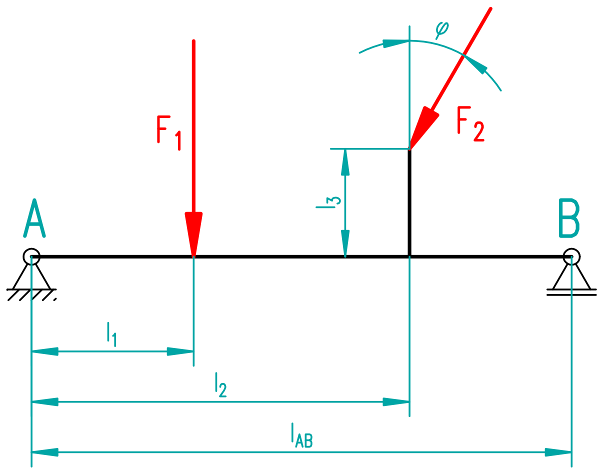
Föpplfunktion 2. Ordn. $f\_F_2(x,\xi) := f\_F(x,\xi,2)\cdot \mathrm{UnitsOf}(x)^2$

Föpplfunktion 3. Ordn. $f\_F_3(x,\xi) := f\_F(x,\xi,3)\cdot \mathrm{UnitsOf}(x)^3$

usw.

Zum einheitenlosen Funktionsergebnis müssen die Einheiten wieder hinzugefügt werden.

Beispiel-1: Träger mit Einzelkräften und Momentensprung



Angaben

$F_1 := 3\text{kN}$ $\quad l_1 := 225\text{mm}$

$F_2 := 2.25\text{kN}$ $\quad l_2 := 525\text{mm}$ $\quad l_3 := 150\text{mm}$

$l_{AB} := 750\text{mm}$ $\quad \varphi := 30°$

Auflagerkräfte

$$F_B := \frac{F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot \left(\cos(\varphi) \cdot l_2 - \sin(\varphi) \cdot l_3\right)}{l_{AB}}$$

$$F_{Ay} := F_1 + F_2 \cdot \cos(\varphi) - F_B$$

$$F_{Az} := F_2 \cdot \sin(\varphi)$$

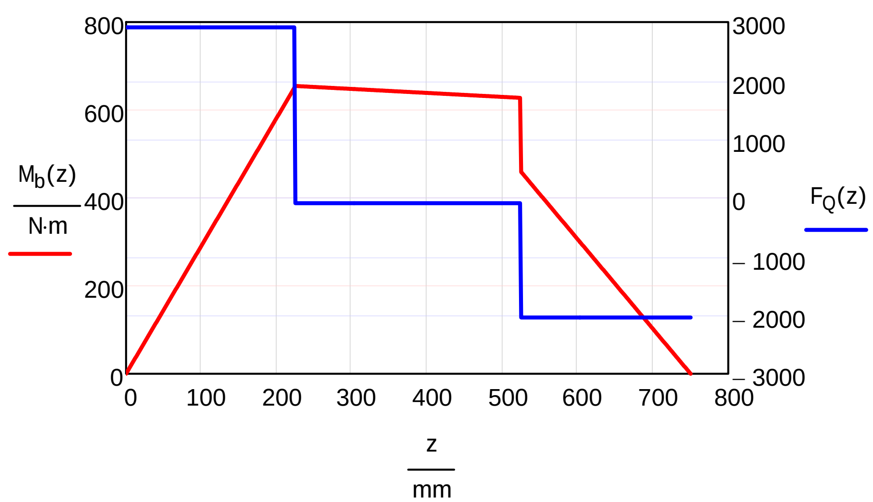
Verlauf der Schnittreaktionen $\quad z := 0, \frac{l_{AB}}{500} .. l_{AB}$

Querkraft $\quad F_Q(z) := F_{Ay} - F_1 \cdot f\_F_0(z, l_1) - F_2 \cdot \cos(\varphi) \cdot f\_F_0(z, l_2)$

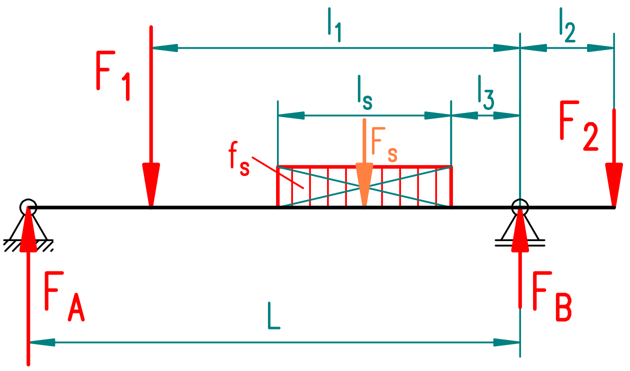
$f\_F_0(z,l)$ liefert "0", wenn $z < l$ und sonst "1"
Auf diese Weise werden die Querkraftsprünge ausgelöst.

Biegemoment $\quad M_b(z) := F_{Ay} \cdot z - F_1 \cdot f\_F_1(z, l_1) - F_2 \cdot \cos(\varphi) \cdot f\_F_1(z, l_2) - F_2 \cdot \sin(\varphi) \cdot l_3 \cdot f\_F_0(z, l_2)$

$f\_F_1(z,l)$ liefert "0m", wenn $z < l$ und sonst "(z-l)m"
Auf diese Weise werden der Momentenknicke ausgelöst.



Beispiel-2: Träger mit Einzelkräften und Gleichlast



Angaben

$F_1 := 12kN$ $F_2 := 2.5kN$ $f_s := 25\frac{kN}{m}$

$l_1 := 1m$ $l_2 := 0.3m$

$l_3 := 0.16m$ $l_s := 0.4m$ $L := 1.2m$

Rohrquerschnitt des Trägers:

$d_a := 108mm$ $s_R := 4mm$

Auflagerkräfte

aus $\Sigma M_{(A)} = 0$ $$F_B := \frac{F_1 \cdot (L - l_1) + f_s \cdot l_s \cdot \left(L - l_3 - \frac{l_s}{2}\right) + F_2 \cdot (L + l_2)}{L} = 12.125 \cdot kN$$

aus $\Sigma F_y = 0$ $$F_A := F_1 + f_s \cdot l_s - F_B + F_2 = 12.375 \cdot kN$$

Schnittreaktionen

Im gesamten Balken treten keine Längskräfte auf, sodass in der Folge nur die Querkräfte und die Biegemomente berechnet werden.

$$\begin{aligned} F_Q(z) := F_A \ldots & \\ + -F_1 \cdot f\_F_0(z, L - l_1) \ldots & \quad \text{Querkraftsprung bei } F_1 \\ + -f_s \cdot f\_F_1(z, L - l_3 - l_s) \ldots & \quad \text{linearer Querkraftanstieg ab Beginn der Gleichlast; dieser muss} \\ + f_s \cdot f\_F_1(z, L - l_3) \ldots & \quad \text{ab dem Ende der Gleichlast wieder herausgerechnet werden.} \\ + F_B \cdot f\_F_0(z, L) & \quad \text{Querkraftsprung bei } F_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_b(z) := F_A \cdot z \ldots & \quad \text{linearer Momentenanstieg durch } F_A \\ + (-F_1) \cdot f\_F_1(z, L - l_1) \ldots & \quad \text{Momentenknick ab Kraftangriffspunkt von } F_1 \\ + (-f_s) \cdot \frac{f\_F_2(z, L - l_3 - l_s)}{2} \ldots & \quad \text{Momentenrückgang durch Gleichlast ab Beginn von } f_s \\ + f_s \cdot \frac{f\_F_2(z, L - l_3)}{2} \ldots & \quad \text{Momentenrückgang duch fs muss ab Ende der Gleichlast wieder zurückgenommen werden.} \\ + F_B \cdot f\_F_1(z, L) & \quad \text{Momentenknick durch } F_B \end{aligned}$$

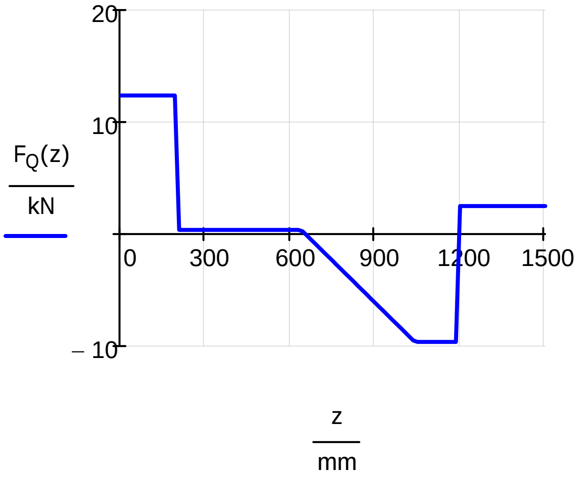
Das Ganze kann natürlich auch "in einer Wurscht" eingegeben werden.

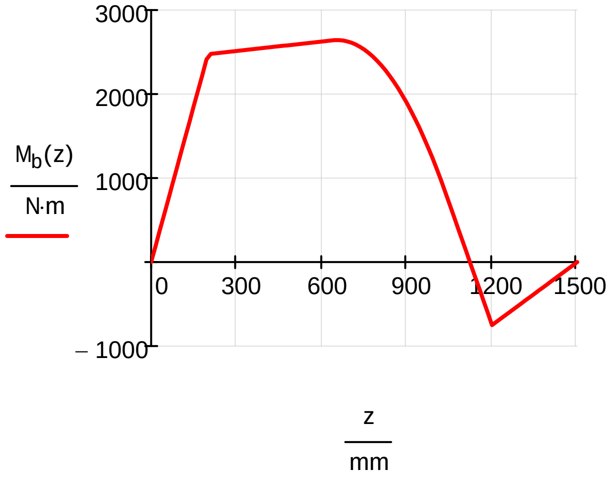
$$F_Q(z) := F_A - F_1 \cdot f\_F_0(z, L - l_1) - f_s \cdot f\_F_1(z, L - l_3 - l_s) + f_s \cdot f\_F_1(z, L - l_3) + F_B \cdot f\_F_0(z, L)$$

$$M_b(z) := F_A \cdot z - F_1 \cdot f\_F_1(z, L - l_1) - f_s \cdot \frac{f\_F_2(z, L - l_3 - l_s)}{2} + f_s \cdot \frac{f\_F_2(z, L - l_3)}{2} + F_B \cdot f\_F_1(z, L)$$

Verlauf der Schnittkräfte

$z_u := 0mm$ $\quad z_o := L + l_2$ $\quad z := z_u, z_u + \frac{z_o - z_u}{100} .. z_o$





Position und Wert des max. Biegemomentes

$z_{Q0} := \mathrm{wurzel}(F_Q(z), z, 600mm, 800mm) = 655 \cdot mm$ $\qquad M_b(z_{Q0}) = 2642.812 \cdot N \cdot m$