Wilfried Rohm

Cluster 4: Beschränktes Wachstum

zum Menü

Hinweis: Cluster 4 bezieht sich auf Höhere Technische Lehranstalten mit den Abteilungen Informationstechnologie, Elektronische Datenverarbeitung und Organsiation, Informatik

Das soziale Internet-Netzwerk Facebook hat große Bedeutung für die weltweite Kommunikation erlangt.

a) Zu Beginn des Jahres 2010 gab es in Österreich ca. 1.5 Millionen Facebook-User. Ein Jahr später waren es 2.2 Millionen Österreicher, die auf Facebook registriert waren. Gehen Sie von einer in den nächsten Jahren gleichbleibenden Zahl von ca. 6 500 000 Internetusern in Österreich aus.

Verwenden Sie folgende Bezeichnungen und Daten:
t……… Jahre seit dem Jahr 2010
F(t)….. Anzahl der Facebook-User zum Zeitpunkt t in Millionen

Die Betreiber von Facebook möchten eine langfristige Prognose über die weitere Entwicklung der Anzahl der Facebook-User in Österreich aufstellen. Ihre Untersuchungen haben ergeben, dass die Zuwachsrate $\frac{dF}{dt}$ in den letzten Jahren stets proportional zur Anzahl jener Internetuser in Österreich war, die noch nicht auf Facebook registriert waren. Man geht davon aus, dass sich dieser Trend auch in den nächsten Jahren nicht ändern wird.

Geben Sie jene Differentialgleichung an, die dieses Wachstum beschreibt, und lösen Sie diese unter Angabe der einzelnen Rechenschritte. (B4_4-A,B)

b) Auch für Deutschland wurde eine ähnliche Studie gemacht. Man erhielt folgende Funktionsgleichung:
$F(t) = 50 - 39 \cdot e^{-0.1978257 \cdot t}$ Bezeichnungen wie in Aufgabe a)
Berechnen Sie, wann dieser Prognose zufolge erstmals 30 Millionen deutsche Internetuser auf Facebook registriert sein werden. (B4_2-B)

c) In einem Dorf mit nur 500 Internetusern gelten andere Gesetze. Zu Beginn einer Marktforschungsstudie war in diesem Dorf niemand auf Facebook registriert. Daraufhin startete Facebook eine Werbekampagne und geht von folgender Annahme aus:

$$N(w) = \frac{300w}{2w + 25}$$

w ………..Betrag der eingesetzten Werbemittel in Euro ($w \geq 0$)
$N(w)$ …. Anzahl der Facebook User in Abhängigkeit von den eingesetzten Werbemitteln

Berechnen Sie den $\lim\limits_{w \to \infty} N(w)$ und interpretieren Sie dieses Ergebnis. (B4_4-B,C)

Lösung :

a) Die Zuwachsrate bzw. Änderungsrate $\frac{d}{dt}F(t)$ ist gemäß Angabe proportional zur noch verbleibenden Mange an Internetusern, die noch nicht auf Facebook registriert sind. Daher kann folgende differentialgleichung angesetzt und gelöst werden:

$IUser := 6.5$ Anzahl der Internetuser in Millionen $IUser := IUser$

$$\frac{d}{dt}F(t) = k\cdot(IUser - F(t))$$

Diese Gleichung kann man direkt durch Trennen der Variablen lösen (Variante 1) und auch als "Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten" auffasen und entsprechend dem üblichen Lösungsverfahren lösen (Variante 2)

Variante 1 - Lösen der Gleichung mit Trennen der Variablen:

$$\frac{d}{dt}F(t) = k\cdot(IUser - F(t))$$

$$\frac{\frac{d}{dt}F(t)}{IUser - F(t)} = k\cdot dt$$

Mathcadunterstützte Nebenrechnung

$$\int \frac{\frac{d}{dt}F(t)}{IUser - F(t)}\, dt \rightarrow -\ln(IUser - F(t))$$

$$\ln(|IUser - F(t)|) = k\cdot t + c$$

$$IUser - F(t) = C\cdot e^{k\cdot t}$$

$$F(t) = IUser - C\cdot e^{k\cdot t}$$

$$F(t, C, k) := IUser - C\cdot e^{k\cdot t}$$

Die beiden Parameter C und k werden nun über die gegebenen Werte ermittelt:

Vorgabe

$$F(0, C, k) = 1.5$$

$$F(1, C, k) = 2.2$$

$$\text{Suchen}(C, k)\ \text{Gleitkommazahl}, 2 \rightarrow \begin{pmatrix} IUser - 1.5 \\ \ln\left(\frac{IUser - 2.2}{IUser - 1.5}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -0.15082 \end{pmatrix}$$

also : $C := 5$

$k := -0.15082$ $k := k$

$$F_1(t) := IUser - C\cdot e^{k\cdot t}$$

Variante 2: Lösen gemäß Lösungsalgorithmus für Lineare Differentialgleichungen 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$\frac{d}{dt}F(t) = k\cdot(IUser - F(t))$ erhält man die Lineare Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}F(t) + k\cdot F(t) = k\cdot IUser$$

homogene Gleichung

$$\frac{d}{dt}F(t) = k\cdot F(t)$$

$$\frac{\frac{d}{dt}F(t)}{F(t)} = k$$

$$\ln(F(t)) = k\cdot t + c$$

$$F(t) = C\cdot e^{k\cdot t}$$

inhomogene Gleichung

Ansatz : $F(t) = Konst$

einsetzen : $k\cdot Konst = k\cdot Iuser$

$$Konst = Iuser$$

Gesamtlösung $F(t) = C\cdot e^{k\cdot t} + IUser$

Bestimmung der Integrationskonstanten C mit Hilfe der Anfangsbengung F(0)=1.5

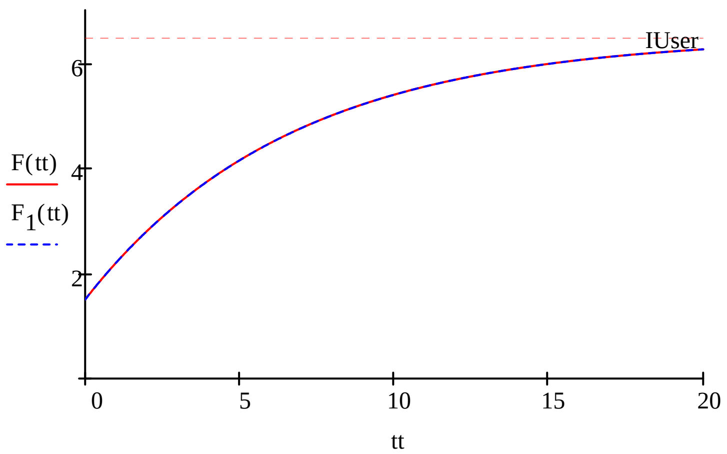
$1.5 = C + IUser$ $C := 1.5 - IUser$ $C = -5$

Bestimmung von k mit F(1)=2.2

$k := 2.2 = C\cdot e^{k\cdot 1} + IUser$ | auflösen, k; Gleitkommazahl, 3 $\rightarrow \ln\left(\frac{IUser - 2.2}{IUser - 1.5}\right)$

$k = -0.151$ $F(t) := C\cdot e^{k\cdot t} + IUser$

$tt := 0, 0.01 .. 20$ Die graphische Darstellung zeigt die Gleichwertigkeit der beiden Lösungen



b) Ausgangspunkt ist die Funktionsgleichung für Deutschland :

$$F(t) := 50 - 39 \cdot e^{-0.1978257 \cdot t}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung und Lösung nach t wird ermittelt, wann die Anzahl der Facebookuser 30 Millionen erreicht haben soll.

$$F(t) = 30 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 2 \end{array} \right. \rightarrow 3.4$$

Ergebnis : Nach 3.4 Jahren , d.h. etwa ab Mitte des Jahres 2013 wird es demnach in Deutschland etwa 30 Millionen Facebook-User geben.

c) Situation in einem Dorf:

$$N(w) := \frac{300 \cdot w}{2w + 25}$$

$$\lim_{w \to \infty} N(w) \rightarrow 150$$

Das bedeutet : Die Anzahl der Facebookuser wird gemäß der angenommenen Funktion N(w) nie die Zahl 150 überschreiten - unabhängig vom Werbeaufwand.
Das könnte mit der Bevölkerungszusammensetzung in dem Ort oder anderen (unbekannten) Faktoren zusammenhängen.

zum Menü