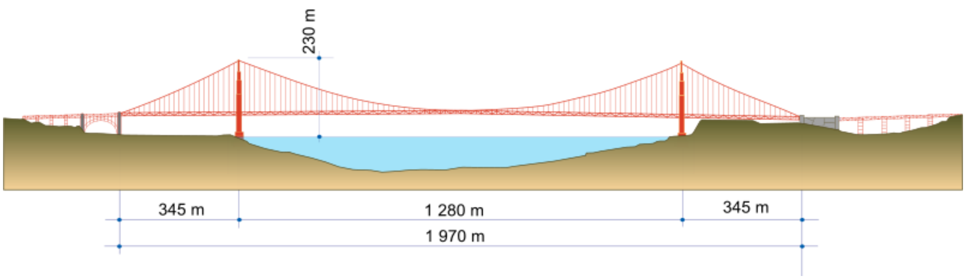
Doris Schöndorfer

Cluster 1: Kabelverlauf

zum Menü

Hinweis: Cluster 1 bezieht sich auf Höhere Technische Lehranstalten (HTL) für die Ausbildungsrichtungen Bautechnik, Holztechnik & Innenraumgestaltung und Kunst & Design (vorläufig)



Die obenstehende Skizze zeigt die Golden Gate Bridge, deren Kabelverlauf an den Außenseiten durch zwei Geraden und in der Mitte näherungsweise durch eine Parabel beschrieben werden kann. Weiters ist bekannt, dass bei Hochwasser die maximale Durchfahrtshöhe für Schiffe 67m beträgt. Diese Situation ist in der Abbildung dargestellt.

1. Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen der Parabel einerseits und die der Geraden andererseits unter der Annahme eines symmetrischen Brückenverlaufs!
   Hinweis: der Ursprung des Koordinatensystems kann beliebig gewählt werden.

2. Wenn man den Ursprung des Koordinatensystems unterschiedlich annimmt, kommt man zu unterschiedlichen Funktionsgleichungen der Parabel. Erklären Sie, ob sich dadurch auch die Bogenlänge der Parabel ändert.

3. Berechnen Sie die gesamte Kabellänge einer anderen ähnlichen Hängebrücke, wenn bekannt ist, dass die Parabel durch die Funktionsgleichung $f(x) = 2.5\cdot 10^{-3}\cdot x^2 - 1.5\cdot x$ und die Geraden durch die Funktionsgleichungen g1: $-250x + 264.11y = 10000$ und g2: $250x + 264.11y = 250000$ beschrieben werden können!
   Hinweis: Die Kabel werden auf beiden Seiten der Fahrbahn geführt!

4. Alle fünf Jahre müssen die Kabel erneuert werden. Aus diesem Grund wird nun im Zuge von Wartungsarbeiten das Kabel mit einer Gesamtlänge von 8 000m ausgetauscht.Das Kabel weist einen Durchmesser von 92 Zentimeter auf. Es besteht aus Stahl mit einer Dichte von $r = 7.8 g/cm^3$. Berechnen Sie die Masse in kg. Das Ergebnis muss in Gleitkommadarstellung und mit auf drei signifikante Stellen angegeben werden!

Lösung:

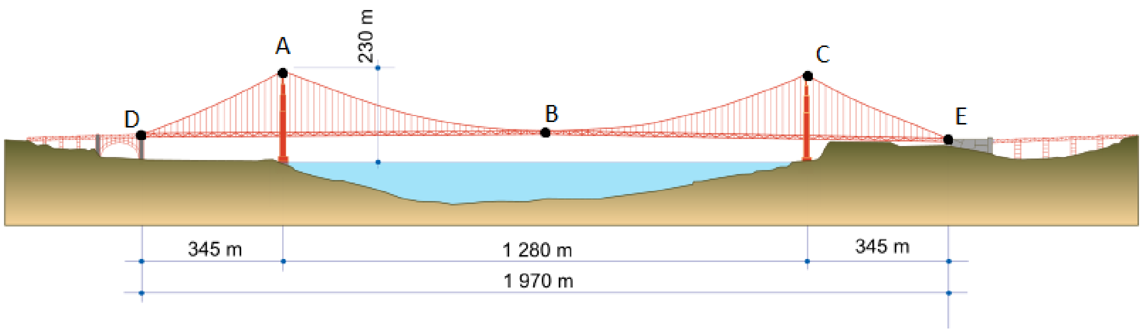
Grundideen:
Durch geeignete Wahl eines entsprechenden Koordinatensystems müssen die Funktionsgleichung der Parabel einerseits und die Funktionsgleichungen der beiden Geraden berechnet werden.
Das Koordinatensystem wird beispielsweise so gelegt, dass der Ursprung im Punkt A(0|0) liegt. Somit können aus dem Koordinatensystem folgende drei Punkte für die Berechnung der Parabelgleichung herausgelesen werden: A(0|0), B(640|-163) und C(1280|0).
(siehe Skizze unterhalb)

z.B: Die Berechnung des y - Wertes des Punktes B:
Der gesamte Brückenpfeiler besitzt eine Höhe von 230m und von diesem wird die maximale Durchfahrtshöhe von 67m subtrahiert. Dies ergibt einen Wert von 163m. Da der Koordinatenursprung in A liegt, ergibt sich für den y - Wert "-163".

HINWEIS: Das angegebene Koordinatensystem ist nur eine der möglichen Varianten!!!

Die allgemeine Funktionsgleichung einer Polynomfunktion zweiten Grades lautet: $\mathbf{y = ax^2 + bx + c.}$

Skizze:



Vorgabe

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$0 = a \cdot 1280^2 + b \cdot 1280 + c$$

$$-163 = a \cdot 640^2 + b \cdot 640 + c$$

$$L := \text{Suchen}(a, b, c) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{163}{409600} \\ -\frac{163}{320} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0.0004 \\ -0.5094 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = L_0 \cdot x^2 + L_1 \cdot x + L_2 \rightarrow f(x) = \frac{163 \cdot x^2}{409600} - \frac{163 \cdot x}{320} \text{ Gleitkommazahl, 4 } \rightarrow f(x) = \frac{163 \cdot x^2}{409600} - \frac{163 \cdot x}{320}$$

Berechnung der linearen Funktion:
Die allgemeine Funktionsgleichung f(x) = ax+b mit den Punkten A(0|0) und D(-345|-163):

Vorgabe

$$-163 = a\cdot(-345) + b$$

$$0 = a\cdot 0 + b$$

$$G := \text{Suchen}(a,b) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{163}{345} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0.472 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = G_0\cdot x + G_1 \rightarrow f(x) = \frac{163\cdot x}{345} \text{ Gleitkommazahl}, 3 \rightarrow f(x) = \frac{163\cdot x}{345}$$ ... Gleichung der ersten Geraden

Da die beiden linearen Funktion sich nur dadurch unterscheiden, dass die eine der beiden Geraden steigend ist und die andere Gerade fallend ist, unterscheiden sich die Steigungen der Geraden nur im Vorzeichen.
Berechnung der Geradengleichung mit den Punkten C(1280|0) und E(1280+345|-163).

Vorgabe

$$0 = a\cdot 1280 + b$$

$$-163 = a\cdot(1280 + 345) + b$$

$$F := \text{Suchen}(a,b) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{163}{345} \\ \frac{41728}{69} \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -0.472 \\ 604.754 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = F_0\cdot x + F_1 \rightarrow f(x) = \frac{41728}{69} - \frac{163\cdot x}{345} \text{ Gleitkommazahl}, 3 \rightarrow f(x) = \frac{41728}{69} - \frac{163\cdot x}{345}$$ ... Gleichung der zweiten Geraden

2. Die Bogenlänge der Parabel ist unabhängig von der Lage im Koordinatensystem.
Die relative Lage der Punkte zueinander ändert sich nicht.

3. Berechnung der Bogenlänge entsprechend der Beziehung: $l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}y\right)^2}\, dx$

Zum besseren Verständnis wird eine Skizze erstellt. (siehe unterhalb)

Die Geradengleichungen müssen zuerst auf die Form y = ax + b umgeformt werden:

$$y1(x) := -250\cdot x + 264.11\cdot y = 100000 \;\Big|\begin{array}{l}\text{auflösen}, y\\ \text{Gleitkommazahl}, 3\end{array} \rightarrow 0.947\cdot x + 379.0$$

$$y2(x) := 250\cdot x + 264.11\cdot y = 250000 \;\Big|\begin{array}{l}\text{auflösen}, y\\ \text{Gleitkommazahl}, 3\end{array} \rightarrow -0.947\cdot x + 947.0$$

Man berechnet zuerst die Schnittpunkte der Parabel mit den Geraden:

$$f(x) := 2.5\cdot 10^{-3}\cdot x^2 - 1.5\cdot x$$

$$S1 := f(x) = y1(x) \;\Big|\begin{array}{l}\text{auflösen}, x\\ \text{Gleitkommazahl}, 5\end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -135.99 \\ 1114.8 \end{pmatrix}$$

$$S2 := f(x) = y2(x) \;\Big|\begin{array}{l}\text{auflösen}, x\\ \text{Gleitkommazahl}, 5\end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -514.73 \\ 735.93 \end{pmatrix}$$

Nun wird die erste Ableitung der Parabelfunktion gebildet:

$$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \qquad f1(x)\ \text{Gleitkommazahl}, 2 \;\rightarrow 0.005\cdot x - 1.5$$

Berechnung der Bogenlänge:

$$L1 := \int_{S1_0}^{S2_1} \sqrt{1 + f1(x)^2}\, dx \qquad L1 = 1350\ \text{m}$$

Die beiden Geraden werden durch eine waagrechte Tangente im Punkt H begrenzt. Der Scheitelpunkt der Parabel ist eine Extremwertstelle H. Um die Koordinaten zu ermitteln, wird die erste Ableitung der Funktionsgleichung der Parabel Null gesetzt:

$$xH := f1(x) = 0\ \text{auflösen}, x \;\rightarrow 300.0$$

$$f(xH) = -225$$

$$H := \begin{pmatrix} xH \\ f(xH) \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 300 \\ -225 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der waagrechten Tangente lautet:

$h(x) := -225$

Nun werden die beiden Geraden y1(x) und y2(x) mit der Geraden h(x) geschnitten. Da für die weitere Berechnung nur die x - Koordinaten der Punkte relevant sind, werden die y - Werte nicht errechnet.

$$x1 := y1(x) = h(x) \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{Gleitkommazahl}, 5 \end{array} \right. \rightarrow -637.8$$

$$x2 := y2(x) = h(x) \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{Gleitkommazahl}, 5 \end{array} \right. \rightarrow 1237.6$$

Bestimmen der ersten Ableitungen der Funktionsgleichungen der Geraden:

$$g1(x) := \frac{d}{dx} y1(x) \qquad g1(x) \rightarrow 0.947$$

das heißt, die Ableitumngen sind konstant

$$g2(x) := \frac{d}{dx} y2(x) \qquad g2(x) \rightarrow -0.947$$

$$L2 := \int_{x1}^{S1_0} \sqrt{1 + g2(x)^2}\, dx \qquad L2 = 691.116 \text{ m}$$

$$L3 := \int_{S2_1}^{x2} \sqrt{1 + g2(x)^2}\, dx \qquad L3 = 690.923 \text{ m}$$

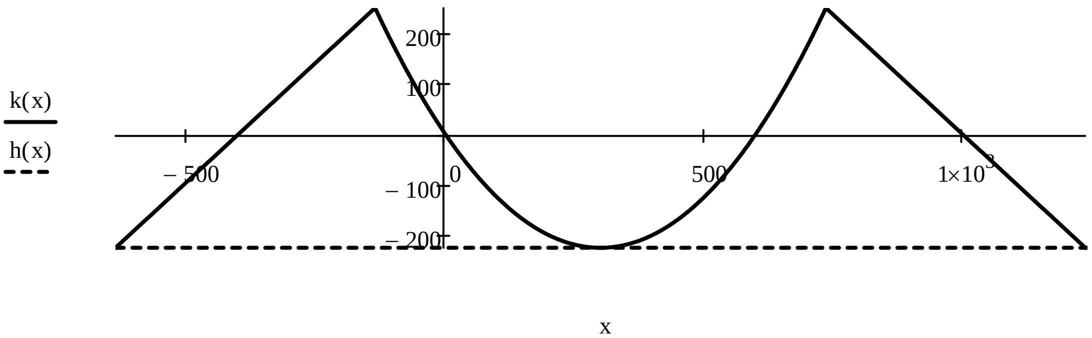
Die Gesamtlänge des Kabels errechnet sich, indem die Summe der Teillängen gebildet wird:

$LG := 2 \cdot (L1 + L2 + L3)$ ... die Kabel verlaufen sowohl rechts als auch links von der Fahrbahn

$LG = 5.464 \times 10^3 \text{ m}$

$$k(x) := \left| \begin{array}{l} y1(x) \text{ if } -637.80 \le x < -135.89 \\ f(x) \text{ if } -135.89 \le x < 735.89 \\ y2(x) \text{ if } 735.89 \le x \le 1237.6 \end{array} \right.$$

$x := -637.80, -637.80 + 1 .. 1300$



4. Die Berechnung der Gesamtmasse ergibt sich folgendermaßen.

$d := 92 \cdot cm$ Durchmeser des Kabels

$\rho := 7800 \cdot \frac{kg}{m^3}$ Dichte des Kabels

$L := 8000 \cdot m$ Länge des Kabels

$V := \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot L$ $V = 5 \times 10^6 L$ Volumen, welches das gesamte Kabel einnimmt

$m_K := \rho \cdot V$ $m_K = 4.15 \times 10^7 \cdot kg$ Berechnung der Masse m_K des Kabels

Das Kabel hat eine Masse von
$4.15 \times 10^7 kg$

zum Menü